Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

Louis Benjamin

L. B. Francoeur,

Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der vierten verbesserten und vermehrten Original-Ausgabe (1837) aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. Edmund Külp,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Ersten Bandes zweites Buch,

enthaltend

die niedere Algebra.

Bern, Chur und Leipzig.

Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.

1839.

Haller'sche Buchdruckerei in Bern.

Erstes Kapitel.

Von den algebraischen Rechnungsarten.

Allgemeine Begriffe.

§. 1. In der Arithmetik hat man zum Zweck, verschiedene Zahlen nach gewissen Regeln mit einander zu verbinden; in der Algebra dagegen ist nicht das numerische Resultat, sondern vielmehr die in der Rechnung vorkommende Verbindungsweise einer jeden Zahl die Hauptsache. Die Auflösung aller zu einer und derselben Gattung gehörigen, nur andere Bestimmungsstücke enthaltenden Aufgaben erfordert die Ausführung ähnlicher Rechnungen mittelst der gegebenen Stücke. Die Interessen eines Kapitals z. B. werden dadurch gefunden, daß man das Kapital, die Zeit und den hunderten Theil des Zinsfußes (Zinsen vom Kapital 100 in der Zeiteinheit) mit einander multiplicirt. Die Algebra beschäftigt sich also mit der Aufsuchung der bei jeder Aufgabe vorzunehmenden Rechnungen. Um dahin zu gelangen, stellt man die gegebenen Größen durch die Buchstaben $a, b, c \ldots$, die alle möglichen Zahlen zu bezeichnen sehr geeignet sind, vor, damit man im Endresultate, durch alle Entwicklungen und Rechnungsoperationen hindurch, die Verbindungsweise einer jeden Zahl erkennen könne.

Suchen wir z. B. die Zahl, deren dreifaches Produkt gleich 100 plus der Hälfte dieser Zahl ist; wir schließen folgendermaßen: 3 mal die Unbekannte gleich 100 plus der Hälfte der Unbekannten . . . . $3x = 100 + \frac{1}{2}x$

Zieht man die Hälfte der Unbekannten auf beiden Seiten ab, so hat man 3 mal die Unbekannte

weniger ihrer Hälfte gleich 100 oder $\frac{5}{2}$ mal die Unbekannte gleich 100 . . . . $3x-\frac{1}{2}x=100$

Wird auf beiden Seiten endlich durch $\frac{5}{2}$ dividirt (Arithmetik §. 6), so ist die Unbekannte gleich $\frac{2}{5}$ von 100 oder gleich 40 . . . . $\frac{5}{2}x=100$ $x=\frac{2}{5}.100=40$

Der Algebraist stellt die Unbekannte durch x vor und drückt, wie man so eben gesehen, mit Hülfe der Zeichen die verschiedenen Theile seiner Schlußart aus. Setzt er a für die Zahl 100, so hat er $3x=a+\frac{1}{2}x$, $3x-\frac{1}{2}x=a$, oder $\frac{5}{2}x=a$, woraus $x=\frac{2}{5}a$.

Die Unbekannte, deren dreifaches Produkt gleich ihrer Hälfte plus einer gegebenen Größe ist, beträgt also $\frac{2}{5}$ dieser Größe, von welcher Art letztere auch sein mag.

Ueberdem kann die Art, Lehrsätze in der Algebra zu beweisen, sehr verschieden von der in der Arithmetik sein. Will man einen Satz beweisen, so nimmt man in der Arithmetik irgend ein numerisches Beispiel, verfährt dann dergestalt, daß der zu beweisende Satz, nicht blos für das specielle Beispiel, sondern auch für jedes andere hieraus sich ergibt. Auf ein specielles Beispiel also wendet man eine allgemeine Schlußfolge an. In der Algebra dagegen nimmt man ein aus allgemeinen Symbolen, die alle möglichen Zahlen vorstellen, bestehendes Beispiel, schließt dann auf besondere Weise fort, wobei die Verbindungen rein mechanischer Art sein können. Alles dies wird in der Folge klarer werden.

§. 2. Vereinigen wir uns dahin, die bekannten Größen durch die Buchstaben a, b, c.... vorzustellen; es sind also die gegebenen Zahlen, die uns als Grundlage bei unsern Schlußarten dienen, und die jeden beliebigen Werth hernach annehmen können. Ist s die Summe der vier Zahlen a, b, c und d, so schreiben wir $s=a+b+c+d$. $s=a+a+a+a$ reducirt sich auf $s=4\times a$, oder einfacher $=4a$, wenn man das Zeichen der Multiplication, das hier unnöthig ist, wegläßt.

Die Ziffer 4 heißt der Coefficient. Soll die Zahl a 2, 5, 7... $n$mal genommen werden, so schreibt man $2a$, $5a$, $7a$..... na. Eben so bezeichnet man durch a^2, a^5, a^7.... a^n, daß a 2, 5, 7.... $n$mal als Factor genommen werden soll, nämlich aa, $aaaaa$ u. s. w.

Anmerkung. Man muß sich wohl hüten, die Exponenten mit den Coefficienten, a^4 z. B. mit $4a$, zu verwechseln. Die Ex-

ponenten zeigen die wiederholte Multiplication einer und derselben Größe mit sich selbst an, während die Coefficienten angeben, wie oft die Größe auf dem Wege der Addition genommen wird. $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$, $4a = a + a + a + a$; stellt a die Zahl 5 vor, so ist $a^4 = 625$, und $4a = 20$.

Jede Größe, die von einer andern durch die Zeichen + oder — abgesondert ist, wird Glied oder Theil genannt; das Monom (eingliedrige oder einnamige Größe) hat nur ein Glied; das Binom (zweigliedrige oder mehrnamige Größe) hat zwei Glieder, wie $a + b$, $ac - 4ab$; das Trinom hat drei Glieder, wie $a + b - c$, $ad - 4ab - 2bc$; und allgemein nennt man Polynom (viergliedrige oder vielnamige Größen) solche Größen, die aus mehrern Gliedern bestehen.

Anmerkung. Zu bemerken ist, daß man die Monome auch incomplexe und die Polynome complexe Größen nennt.

Das Trinom $a - b - c$ zeigt, daß, nachdem b von a weggenommen ist, man noch c vom Reste abziehen soll; was auf $a - (b + c)$ hinausgeht. $a - b - b$ ist offenbar so viel wie $a - 2b$; ebenso $a - b - 3b - 2b = a - 6b$.

Anmerkung. Derjenige Theil der Algebra, der mit den Buchstaben als Zahlzeichen rechnen lehrt, wird passend allgemeine Arithmetik oder auch — obgleich unpassend — Buchstabenrechnung genannt.

Von der Reduction, Addition und Subtraction.

§. 3. Man nennt Reduction die algebraische Operation, durch welche man mehrere Glieder in ein einziges vereinigt. In solchem Falle aber dürfen diese Glieder nur rücksichtlich ihrer Coefficienten von einander verschieden sein, sie dürfen nur einerlei Buchstaben, mit denselben Exponenten versehen, enthalten. $3a - 2ab - b$, $3a^2 - 2a$, $5a^3b^2 + 2a^2b^3 - 3b^2$ sind nicht reducirbare Ausdrücke. Man sieht leicht ein, daß

$$3abc^2 - abc^2 - bc^3 + 2bc^3 + a^2d^2 = 2abc^2 + bc^3 + a^2d^2,$$

$$2a - 3b + a - c + 3b = 3a - c,$$

$$3b + 2ac - 5b - 3ac + ac + d = d - 2b.$$

[illegible]

[illegible], daß wenn das erste Glied ohne Vorgänger ist, [illegible] gesetzt werden muß, um den dreien Glieder, [illegible]

wie bei den übrigen, die oben angegebene Regel in Anwendung zu bringen. Dieselbe Bemerkung findet aus gleichem Grunde bei der Multiplication und Division statt.

Von der Multiplication.

§. 5. Die Multiplication der Monome bietet keine Schwierigkeit dar. Denn es sei $4ab \times 5cd$; ändert man die Ordnung der Factoren, so hat man $4 \cdot 5ab \cdot cd$ oder $20abcd$. Sind Exponenten vorhanden, wie $a^2 \times a^3$, so findet man, nach den ersten Principien, $aa \times aaa$ oder $aaaaa = a^5$, d. h. man hat die Exponenten 2 und 3 addirt. Ebenso ist $8a^2b^3 \times 4a^5b = 32a^7b^4$. **Ueberhaupt werden Monome mit einander multiplicirt, wenn man ihre Coefficienten multiplicirt, die Exponenten derselben Buchstaben addirt, und die verschiedenen Buchstaben endlich nebeneinander schreibt.** Man legt den Exponenten 1 denjenigen Buchstaben bei, welche keinen besitzen.

Wir wollen jetzt $a+b$ mit $c+d$ multipliciren, was man durch $(a+b) \times (c+d)$ andeutet. Es ist einleuchtend, daß, um $a+b$ so vielmal, als Einheiten in $c+d$ vorkommen, zu wiederholen, man $a+b$ vorerst $c$mal, darauf $d$mal zu nehmen, und diese Resultate dann zu addiren habe. Um $a+b$ aber $c$mal zu nehmen, muß man a und b einzeln mit c multipliciren, dergestalt daß $(a+b) \times c = ac + bc$, $(a+b) \times d = ad + bd$, was $ac+bc+ad+bd$ als Totalprodukt gibt.

$$\begin{array}{r} a + b \\ c + d \\ \hline ac + bc \\ + ad + bd \end{array}$$

Multipliciren wir nun $a-b$ mit c. Nimmt man das Produkt von a mit c, d. h. ac, so hat man c mal die Größe a addirt; nun soll aber nicht a, sondern $a-b$ mit c multiplicirt werden; man hat also bei jeder Addition von a eine um b Einheiten zu große Zahl genommen, das Produkt ac muß hiernach um die Größe b, so viel mal genommen, als die Zahl a es wurde, oder die Zahl c anzeigt, verringert werden. Ziehen wir daher bc von ac ab, so erhalten wir $(a-b) \times c = ac - bc$. Soll $a-b$ mit $c-d$ multiplicirt werden, so verrichtet man Anfangs die vorige Rechnung. Nun soll aber $a-b$ nicht $c$mal, sondern $(c-d)$ mal genommen werden; man hat also die Größe $(a-b)$ um $d$mal zu viel genommen; von dem vorhergehenden Produkte $ac-bc$ muß man daher die Produkte von $a-b$ mit d, oder

$$\begin{array}{r} a - b \\ c - d \\ \hline ac - bc \\ - ad + bd \end{array}$$

gibt nun $(bc-2b^2)^2 = b^2c^2 - 4b^3c + 4b^4$; das verlangte Produkt ist also $4a^2 - b^2c^2 + 4b^3c - 4b^4$.

IV. Man findet, daß $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$; wird $2abcd$ hinzu addirt und wieder abgezogen, so wird das Produkt auf $(ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$ gebracht. Aus dieser merkwürdigen Eigenschaft geht hervor, daß das vorgelegte Produkt auf zweierlei Art in zwei Quadrate zerlegbar ist. Also $(7^2+2^2)(10^2+4^2) = 6148$, eine Zahl, die mit $(70 \pm 8)^2 + (28 \mp 20)^2$ gleichgeltend ist, folglich 6148 in $78^2 + 8^2$ und $62^2 + 48^2$ zerlegbar.

V. Offenbar ist $(a-b)^2 + 2ab > 2ab$, oder $a^2 + b^2 > 2ab$, d. h. die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist größer als ihr doppeltes Produkt.

VI. Leicht ist's, die Bildungsweise des Produkts aus m Binomialfaktoren $(x+a)\ (x+b)\ (x+c) \ldots\ldots$ zu erhalten. In der That hat man für zwei oder drei Factoren die Produkte:

$x^2 + ax + ab$	$x^3 + ax^2 + abx + abc$
$\quad + bx$	$\quad + bx^2 + acx$
	$\quad + cx^2 + bcx$

Aus dem Verfahren der Multiplication selbst ergibt sich Folgendes:

1) Die verschiedenen Glieder des Produktes können keine Reductionen herbeiführen; die Buchstaben a, b, $c, \ldots$ haben also weder numerische Coefficienten noch Exponenten.

2) Das erste Glied ist das Produkt aus sämmtlichen ersten Gliedern, und das letzte das Produkt aus allen zweiten Gliedern der Binomialfactoren. Zwischen diesen äussern Gliedern nehmen die Exponenten von x um Eins von Glied zu Glied ab und das Produkt hat im Allgemeinen die Form:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots\ldots + abcd \ldots\ldots$$

3) Sämmtliche Glieder bestehen aus einer gleichen Anzahl m von Factoren; der Coefficient A von x^{m-1} kann nicht die Buchstaben $a, b, c \ldots$ mit einander multiplicirt enthalten; der Coefficient B von x^{m-2} besteht aus Produkten von je zwei dieser Buchstaben, oder ab, ac, $bc \ldots$

4) Kommt auf irgend eine Weise der Buchstabe a in einem der Coefficienten $A, B, \ldots$ vor, so kommen daselbst die übrigen Buchstaben b, $c \ldots$ ganz auf dieselbe Weise vor, weil das Produkt ungeändert bleibt, wenn man a anstatt b und b anstatt a setzt, u. s. w. Folglich ist

A die Summe aller zweiten Glieder der Binome;

B die Summe aller verschiedenen Produkte von je zwei;

C die Summe aller verschiedenen Produkte von je drei u. s. w.
Das letzte Glied ist das Produkt aller zweiten Glieder.

Die möglichen Vereinfachungen vorzunehmen darf man nicht unterlassen. So ist für $(4ab-2ac)$ $(6ab-3ac)$ der erste Factor gleichgeltend mit $2a$ $(2b-c)$, und der zweite mit $3a$ $(2b-c)$; das Produkt also $6a^2$ $(2b-c)^2$ oder $6a^2$ $(4b^2-4bc+c^2)$.

Oefters ist es vortheilhaft die Produkte in ihre Factoren zu zerlegen (die Division wird uns bald lehren, dergleichen Zersetzungen auszuführen). Für $3y^2z+3yz^2+py+pz$ sieht man leicht, daß die beiden ersten Glieder mit $3yz$ $(y+z)$ und die beiden andern mit p $(y+z)$ übereinstimmen; man hat also $(3yz+p)$ $(y+z)$.

Von der Division.

§. 7. Es sei a der Dividend, d der Divisor, q der Quotient und r der Rest; r ist kleiner als d. Jede Division gibt die Gleichung $a=dq+r$. (Arith. §. 16.)

Da der Quotient nicht geändert wird, wenn man Dividend und Divisor durch eine und dieselbe Zahl dividirt, so kann man, um die Division der Monome auszuführen, die dem Dividend und Divisor gemeinschaftlichen Buchstaben weglassen, die Exponenten der nämlichen Buchstaben von einander abziehen, die Coefficienten endlich durch einander dividiren. Man sieht übrigens, daß diese Regel die umgekehrte von der der Multiplication ist. (§. 5.)

$$\frac{12a^3b^2c}{3ab}=4a^2bc;\quad \frac{15a^3b^5}{5a^2b^2}=3ab^3;\quad \frac{8a^2b^2c}{4ab^2}=2ac;$$

b^2 verschwindet in dem dritten Exempel, weil die beiden Glieder b^2 als gemeinschaftlichen Factor enthalten.

$$\frac{3abc}{3abc}=1;\quad \frac{4ac^3de^3}{8bd^3e}=\frac{ac^3e^2}{2bd^2}.$$

Weiter kann man die Rechnung nicht fortsetzen; es bleibt noch ac^3e^2 durch $2bd^2$ zu dividiren übrig, wenn man die numerischen Werthe von a, b, c, d, e kennt.

Es sei jetzt $20ab^5+4a^6-25a^2b^4-4b^6$ durch $2b^3+2a^3-5ab^2$ zu dividiren. Da der Quotient mit dem Divisor multiplicirt den

Dividend wieder hervorbringen muß, so würde, in so fern man ein Glied des Produkts $20ab^5 + 4a^6 - \ldots$ kennte, welches aus der Multiplication eines gegebenen Gliedes des Divisors mit einem Gliede des Quotienten ohne Reduction entstanden wäre, eine einfache Division das letztere geben. Nun weiß man aber, daß die Glieder, wo irgend ein Buchstabe, wie a, den höchsten Exponenten in beiden Factoren enthält, dem Produkte ein Glied geben, welches mit keinem andern reducirt werden kann, weil a den höchsten Exponenten hier gleichfalls bei sich führt. Die Glieder $4a^6$ einerseits, und $2a^3$ andererseits, befinden sich in diesem Falle; $4a^6$ ist also das genaue Produkt des Gliedes $2a^3$ mit einem Gliede des Quotienten, wo a den höchsten Exponenten hat. Dieses Glied ist folglich $\frac{4a^6}{2a^3}$ oder $2a^3$. Multiplicirt man darauf den ganzen Divisor mit $2a^3$ und zieht dieses Produkt vom Dividend ab, so wird der Rest das Produkt des Divisors mit den übrigen Theilen des Quotienten sein. Die Aufgabe geht jetzt darauf hinaus, diesen Rest durch den Divisor zu dividiren, und jene Theile zu erhalten, was dieselbe Schlußfolge wie vorher mit sich bringt; das Glied des Restes nämlich, wo der Buchstabe a den höchsten Exponenten hat, wird durch $2a^3$ dividirt.

Um die Verwirrungen zu vermeiden unter den Gliedern des Dividends, so wie in den successiven Resten dasjenige heraus zu finden, wo a den höchsten Exponenten hat, ist es zweckgemäß, den Dividend und Divisor zu ordnen, d. h. in die erste Stelle das Glied, wo a den höchsten Exponenten, in die zweite Stelle das Glied, wo a den unmittelbar darauf folgenden Exponenten hat, zu setzen, und so fort.

$$\begin{array}{ll|l}
 & 4a^6 - 25a^2b^4 + 20ab^5 - 4b^6 & 2a^3 - 5ab^2 + 2b^3 \\
 & -4a^6 + 10a^4b^2 - 4a^4b^3 & 2a^3 + 5ab^2 - 2b^3 \\ \hline
\text{Erster Rest} \ldots & +10a^4b^2 - 25a^2b^4 - 4a^3b^3 + 20ab^5 - 4b^6 & \\
 & -10a^4b^2 + 25a^2b^4 - 10ab^5 & \\ \hline
\text{2ter Rest} \ldots\ldots & -4a^3b^3 + 10ab^5 - 4b^6 & \\
 & +4a^3b^3 - 10ab^5 + 4b^6 & \\ \hline
\text{3ter Rest} \ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

Man sieht, daß nach der Division von $4a^6$ durch $2a^3$ der ganze Divisor mit dem Partialquotienten $2a^3$ multiplicirt und das Produkt vom Dividend abgezogen wurde, was einen ersten Rest gab. Das

Glied $+ 10a^4b^2$ dieses Restes, wo a den höchsten Exponenten hat, wurde dann abermals durch $2a^3$ dividirt; man erhielt so $+ 5ab^2$ als zweites Glied des Quotienten. Der Divisor wurde darauf mit diesem Gliede $+ 5ab^2$ multiplicirt und das Produkt vom ersten Reste abgezogen, was einen zweiten Rest gab. Endlich vervollständigte die Division von $-4a^3b^3 : 2a^3 = -2b^3$ den Quotienten, weil man weiter keinen Rest fand.

Wenn man, wie hier oben, Glieder mit verschiedenen Zeichen, das eine mit +, das andere mit — versehen erhält, so gibt man dem partiellen Quotienten das Zeichen —, und zwar deshalb, damit bei der Multiplication das erste Glied des Dividends wieder zum Vorschein komme. Wären beide Glieder der Partialdivision negativ, so würde der korrespondirende Quotient das Zeichen + erhalten. Man darf dies blos als ein Ergebniß der Rechnung ansehen, ohne erklären zu wollen, was die Division zweier Glieder, die nicht beide zusammen positiv sind, wohl bedeuten möge. In der That handelt es sich hier nur darum, ein System von Gliedern zu finden, welches nach den bekannten Regeln mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder hervorbringe.

Hieraus entnehmen wir für die Division der Polynome folgende Regeln: Ordne den Dividend und Divisor in Bezug auf einen und denselben Buchstaben, dividire das erste Glied des Dividends mit dem ersten Gliede des Divisors, was ein Glied des Quotienten gibt; mit diesem Gliede multiplicire den ganzen Divisor, ziehe das Produkt vom Dividend ab; den Rest unterwerfe derselben Operation. Bei den partiellen Divisionen beobachte die Regel der Zeichen der Multiplication. Diese Operation wird so lange fortgesetzt, bis man auf einen Rest kommt, in welchem die höchste Potenz jenes Buchstabens, nach welchem geordnet worden ist, einen kleinern Exponenten hat, als die höchste Potenz desselben Buchstabens im Divisor.

Daß man auch in Rücksicht auf b, oder auf einen andern gemeinsamen Buchstaben, hätte ordnen, überdem ganz dasselbe in Bezug auf den kleinsten Exponenten des Buchstabens sagen können, was wir über den größten desselben gesagt haben, ist hier noch zu bemerken.

§. 8. Hier stehen zwei andere Divisionsexempel:

$$\begin{array}{lrl} & 6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4 & \big|\ 2a^2+2ab-b^2 \\ & -6a^4-6a^3b+3a^2b^2 & \big|\ 3a^2-ab-2b^2 \\ \text{Erster Rest} \ldots & -2a^3b-6a^2b^2-3ab^3+2b^4 & \\ & +2a^3b+2a^2b^2-ab^3 & \\ \text{2ter Rest} \ldots & -4a^2b^2-4ab^3+2b^4 & \\ & +4a^2b^2+4ab^3-2b^4 & \\ \text{3ter Rest} \ldots & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} & a^5-b^5 & \big|\ a-b \\ & -a^5+a^4b & \big|\ a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\ \text{Erster Rest} \ldots & a^4b-b^5 & \\ & -a^4b+a^3b^2 & \\ \text{2ter Rest} \ldots & a^3b^2-b^5 & \\ & -a^3b^2+a^2b^3 & \\ \text{3ter Rest} \ldots & a^2b^3-b^5 & \\ & -a^2b^3+ab^4 & \\ \text{4ter Rest} \ldots & ab^4-b^5 & \\ & -ab^4+b^5 & \\ \text{5ter Rest} \ldots & 0 & \end{array}$$

Wenn man den Gang der letzten Division mit Aufmerksamkeit verfolgt, so sieht man bei der Division von $a^m - b^m$ durch $a - b$, daß in jedem Reste und jedem Quotienten die Exponenten von a um Eins abnehmen, und die von b um eben so viel zunehmen; die Reste sind also Binome, deren erstes Glied successive $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$.... ist. Kommt man zu dem Reste $ab^{m-1}-b^m$, so gibt die Division durch $(a-b)$ den vollständigen Quotienten b^{m-1}, so daß $a^m - b^m$ durch $(a-b)$ genau theilbar ist. Man hat $\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + ... + b^{m-1}$.

Wenn $b=1$, so ist $\frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + 1$.

Uebrigens ist es leicht, die Richtigkeit dieser Gleichungen darzuthun, indem man die zweite Seite derselben, bezüglich mit $a-b$ und $a - 1$ multiplicirt; man findet auf diese Weise die Zähler $a^m - b^m$ und $a^m - 1$ wieder.

Dividirt man a durch $1 - x$, so hat die Operation kein Ende, und man findet die unbegrenzten Quotienten $\frac{a}{1-x} = a(1+x+x^2+x^3+...)$

Man kann folglich die erste Seite als die Summe der Glieder der zweiten Seite betrachten; dieser Bruch ist hiernach die Summe einer ins Unendliche fortlaufenden geometrischen Reihe, deren erstes Glied a und deren Quotient x ist. Ist z. B. $a = 2$, $x = \frac{1}{3}$, $1 - x = \frac{2}{3}$ so findet man $2 : \frac{2}{3}$ oder 3 als Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe $\div 2 : \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} \ldots.$ Ebenso für $a = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{3} + [\frac{2}{3}]^2 + \ldots.)$. Endlich für $a = \frac{2}{3}$ und $x = -\frac{1}{2}$ ist $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots.)$.

Der periodische Decimalbruch [0,54] so viel wie $\frac{54}{100} + \frac{54}{10000} + \ldots.$ oder $\frac{54}{100}(1 + \frac{1}{100} + [\frac{1}{100}]^2 + \ldots.)$ ist $= \frac{54}{99}$, wenn man $a = \frac{54}{100}$ und $x = \frac{1}{100}$ setzt. Ueberhaupt stellt p die aus n-Ziffern bestehende Periode eines vollständig periodischen Decimalbruchs dar, so ist dieser Bruch

$$\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \ldots. = \frac{p}{10^n - 1} = \frac{p}{999\ldots}$$ (Arith. §. 53).

Setzt man $a = 1$ und $x = \frac{3}{2}$, so kommt $-2 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \ldots.$ Man begreift Anfangs nicht, wie man durch Addition von stets wachsenden und positiven Gliedern als Summe -2 finden könne. Setzt man aber die Division nur bis auf 4 Glieder fort, so hat man den Rest ax^4; der genaue Quotient ist demnach $a\,(1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x})$, wo der Bruch die Summe aller übrigen Glieder bis ins Unendliche darstellt. Dieser Bruch wird $-\frac{81}{8}$, wenn man $a = 1$ und $x = \frac{3}{2}$ setzt; nimmt man also nur auf die ersten Glieder Rücksicht, so bilden die vernachläßigten Glieder eine negative Summe, die größer als der in Betracht genommene Theil ist. Die beiden Theile sind hier $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} - \frac{81}{8}$, was sich auf -2, identisch also mit der ersten Seite der frühern Gleichung, reducirt.

Der Widerspruch rührt allein daher, daß man die n ersten Glieder nur dann als einen mehr oder weniger annähernden Theil der Summe betrachten kann, in so fern $\frac{ax^n}{1-x}$ fortwährend abnimmt, in dem Maße die Zahl der beibehaltenen Glieder zunimmt; was erfordert, daß x kleiner als 1 ist. Eine solche Reihe, in der die Glieder desto mehr abnehmen, je weiter sie sich vom ersten Gliede entfernen, wird eine convergirende Reihe genannt.

Anmerkung. Convergirende Reihen sind eigentlich diejenigen Reihen nur, für welche die Summen der Glieder, von den

Ueberhaupt nimmt man vorerst zwei ähnliche Glieder, die Reduction findet dann blos mit ihren Coefficienten statt, d. h. man addirt diese Coefficienten, wenn sie einerlei Vorzeichen haben, und zieht sie von einander ab, wenn solche verschieden sind; dem Resultate gibt man im ersten Falle das gemeinschaftliche Vorzeichen, und das Zeichen des größern Coefficienten im zweiten Falle. Die Buchstaben nebst ihren Exponenten bleiben übrigens ungeändert.

Hat ein Glied keinen Coefficienten vor sich, so wird immer die Einheit als solcher darunter verstanden (Arithmetik §. 54); so ist z. B. $b = 1b$, $ac = 1 \cdot ac$.

Eigentlich gibt es in der Algebra weder eine Addition noch eine Subtraction, sondern eine bloße Reduction, wenn solche möglich ist. Die Addition und Subtraction bleiben in $a + b$ und $a - b$ noch auszuführen übrig.

In dem nebenstehenden Beispiele also hat man keine andere Schwierigkeit als die, welche die Reduction mit sich bringt, nachdem man dem ersten Gliede jedes Trinoms das Zeichen + beigefügt denkt.

$$\begin{array}{l} 3a^2 + 5bc - 2c^2 \\ 7a^2 - 3bc + 4d \\ \underline{a^2 - 4bc + 2c^2} \\ 11a^2 - 2bc + 4d \end{array}$$

§. 4. Wir wollen $b - c$ von a abziehen. Es ist gewiß, daß die gesuchte Differenz nicht geändert wird, wenn man c diesen beiden Größen hinzufügt: $b - c$ wird demnach in b, und a in $a + c$ umgewandelt; zieht man nun b von $a + c$ ab, so hat man $a - (b - c) = a + c - b$.

Man erhält in der That (Arithm. §. 4) a, wenn $a + c - b$ zu $b - c$ addirt wird. Um also ein Polynom abzuziehen, muß man alle seine Zeichen ändern und die möglichen Reductionen vornehmen. Hier einige Beispiele:

$$\begin{array}{lll} 4ab - 3bc & 4ab - 3c^2 + bc & 5a^2 - 3ac \\ \underline{-(2ab - 6bc)} & \underline{-(ab - c^2 - 2bc)} & \underline{-(2a^2 - 3ac)} \\ 4ab - 3bc & 4ab - 3c^2 + bc & 5a^2 - 3ac \\ \underline{-2ab + 6bc} & \underline{-ab + c^2 + 2bc} & \underline{-2a^2 + 3ac} \\ 2ab + 3bc & 3ab - 2c^2 + 3bc & 3a^2 \end{array}$$

Zu bemerken ist, daß wenn das erste Glied ohne Vorzeichen ist, es mit dem Zeichen + gedacht werden muß, um bei diesem Gliede,

wie bei den übrigen, die oben angegebene Regel in Anwendung zu bringen. Dieselbe Bemerkung findet aus gleichem Grunde bei der Multiplication und Division statt.

Von der Multiplication.

§. 5. Die Multiplication der Monome bietet keine Schwierigkeit dar. Denn es sei $4ab \times 5cd$; ändert man die Ordnung der Factoren, so hat man $4 \cdot 5ab \cdot cd$ oder $20abcd$. Sind Exponenten vorhanden, wie $a^2 \times a^3$, so findet man, nach den ersten Principien, $aa \times aaa$ oder $aaaaa = a^5$, d. h. man hat die Exponenten 2 und 3 addirt. Ebenso ist $8a^2b^3 \times 4a^5b = 32a^7b^4$. **Ueberhaupt werden Monome mit einander multiplicirt, wenn man ihre Coefficienten multiplicirt, die Exponenten derselben Buchstaben addirt, und die verschiedenen Buchstaben endlich nebeneinander schreibt.** Man legt den Exponenten 1 denjenigen Buchstaben bei, welche keinen besitzen.

Wir wollen jetzt $a+b$ mit $c+d$ multipliciren, was man durch $(a+b)\times(c+d)$ andeutet. Es ist einleuchtend, daß, um $a+b$ so vielmal, als Einheiten in $c+d$ vorkommen, zu wiederholen, man $a+b$ vorerst $c$mal, darauf $d$mal zu nehmen, und diese Resultate dann zu addiren habe. Um $a+b$ aber $c$mal zu nehmen, muß man a und b einzeln mit c multipliciren, dergestalt daß $(a+b)\times c = ac + bc$, $(a+b)\times d = ad + bd$, was $ac+bc+ad+bd$ als Totalprodukt gibt.

$$\begin{array}{r} a + b \\ c + d \\ \hline ac + bc \\ + ad + bd \end{array}$$

Multipliciren wir nun $a-b$ mit c. Nimmt man das Produkt von a mit c, d. h. ac, so hat man c mal die Größe a addirt; nun soll aber nicht a, sondern $a-b$ mit c multiplicirt werden; man hat also bei jeder Addition von a eine um b Einheiten zu große Zahl genommen, das Produkt ac muß hiernach um die Größe b, so viel mal genommen, als die Zahl a es wurde, oder die Zahl c anzeigt, verringert werden. Ziehen wir daher bc von ac ab, so erhalten wir $(a-b)\times c = ac - bc$. Soll $a-b$ mit $c-d$ multiplicirt werden, so verrichtet man Anfangs die vorige Rechnung. Nun soll aber $a-b$ nicht $c$mal, sondern $(c-d)$ mal genommen werden; man hat also die Größe $(a-b)$ um $d$mal zu viel genommen; von dem vorhergehenden Produkte $ac-bc$ muß man daher die Produkte von $a-b$ mit d, oder

$$\begin{array}{r} a - b \\ c - d \\ \hline ac - bc \\ - ad + bd \end{array}$$

$ad - bd$ abziehen, was $(a - b) \times (c - d) = ac - bc - ad + bd$ gibt.

Die Multiplication jedes Polynoms läßt sich stets auf diesen letztern Fall, wenn man durch a und c die Summe der additiven Glieder jedes Factors, durch b und c die ihrer negativen Glieder vorstellt, zurückführen; sollen dann die Werthe von ac, bc.... angegeben werden, so hat man wieder den ersten Fall. Betrachtet man die eben gemachten Entwicklungen näher, so sieht man, daß jedes Glied des Multiplicands mit jedem einzelnen Gliede des Multiplicators multiplicirt worden ist; überdem, daß das Produkt das Zeichen —, oder das Zeichen + erhielt, je nachdem die eingliedrigen Partialfactoren verschiedene oder gleiche Zeichen hatten.

Hieraus schließen wir, daß das Produkt von zwei Polynomen gefunden wird, indem man successive, nach den für die Monome gegebenen Regeln, alle Glieder des einen mit jedem Gliede des andern multiplicirt; wobei jedes Partialprodukt negativ wird, wenn seine Factoren entgegengesetzte Zeichen, dagegen positiv ist, wenn sie einerlei Zeichen haben (beide + oder beide —). Hat das erste Glied kein Vorzeichen, so wird immer + als solches darunter verstanden (§. 4).

Anmerkung. Man sagt gewöhnlich, die Multiplication hat vier Regeln, nämlich die Regel der Coefficienten, die der Buchstaben, die der Exponenten und die Regel der Zeichen. Die drei ersten sind bei den Monomen angeführt worden, die vierte wird folgendermaßen ausgedrückt: $+ \times + = +$, $+ \times - = -$, $- \times + = -$, $- \times - = +$.

Dem an die algebraische Sprache nicht gewöhnten Ohre mag der Ausdruck $- \times -$ gibt $+$ befremdend erscheinen. Der hierbei entstehende Zweifel liegt allein in der Unrichtigkeit der Sprache; denn es ist ungereimt, ein Zeichen mit einem Zeichen multipliciren zu wollen. Keineswegs darf man aber den hier gebrauchten Ausdrücken einen streng wörtlichen Sinn unterlegen; sie sind nur deshalb dunkel, weil man, der leichten Anwendung halber, dem Bedürfnisse sich kurz zu fassen, die Richtigkeit der Aussage aufgeopfert hat. Man multiplicirt also nicht — mit —, selbst nicht $-b$ mit $-d$, wohl aber $a-b$ mit $c-d$; die genaueste Schlußfolge führt so zu dem oben gegebenen

Sätze. Kurz, man sollte das in Frage stehende Prinzip nicht die Regel der Zeichen, sondern vielmehr die Regel der Multiplication der Polynome nennen.

§. 6. Hier stehen einige Multiplications-Beispiele:

$$\begin{array}{l} a + 3c - d \\ 2a - d \\ \hline 2a^2 + 6ac - 2ad \\ -ad - 3cd + d^2 \\ \hline 2a^2+6ac-3ad-3cd+d^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2a + bc - 2b^2 \\ 2a - bc + 2b^2 \\ \hline 4a^2 + 2abc - 4ab^2 \\ -2abc - b^2c^2 + 2b^3c \\ +4ab^2 + 2b^3c - 4b^4 \\ \hline 4a^2 - b^2c^2 + 4b^3c - 4b^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ +ab + b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ +a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ -ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

Vorstehende Beispiele liefern uns interessante Folgerungen:

I. Das Quadrat von $(a+b)$ ist $a^2 + 2ab + b^2$. (Arithmetik §. 61.)

II. Der Cubus von $(a+b)$ ist $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. (Arithmetik §. 67.)

III. Aus $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ geht hervor, daß die Summe zweier Größen, mit ihrer Differenz multiplicirt, die Differenz ihrer Quadrate als Produkt gibt. $(7+5) \times (7-5) = 7^2 - 5^2$, oder $12 \times 2 = 49 - 25 = 24$.

Wir zerlegen a in zwei beliebige Theile, wird der eine durch $\frac{1}{2}a - x$ dargestellt, so ist der andere $\frac{1}{2}a + x$, und das Produkt ist $\frac{1}{4}a^2 - x^2$; letztere Größe ist kleiner als $\frac{1}{4}a^2$, so lange x nicht Null wird. Läßt man also den einen Theil der Zahl a von Null an zunehmen, so wird der andere kleiner und das Produkt größer; geht der erste Theil in $\frac{1}{2}a$ über, so ist das Produkt gleich dem Quadrat dieser Hälfte und erreicht seinen größten Werth, dergestalt, daß es wieder abnimmt, wenn der erste Theil zu wachsen fortfährt.

Diese Sätze werden besonders zur Abkürzung der Rechnungen gebraucht. So z. B. sieht man im zweiten Exempel bald, daß hier das Produkt von $2a + (bc - 2b^2)$ mit $2a - (bc - 2b^2)$ verlangt wird; man muß demnach die Differenz der Quadrate von $2a$ und $(bc - 2b^2)$ oder $4a^2 - (bc - 2b^2)^2$ finden. Die erste unserer Regeln

gibt nun $(bc - 2b^2)^2 = b^2c^2 - 4b^3c + 4b^4$; das verlangte Produkt ist also $4a^2 - b^2c^2 + 4b^3c - 4b^4$.

IV. Man findet, daß $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$; wird $2abcd$ hinzu addirt und wieder abgezogen, so wird das Produkt auf $(ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$ gebracht. Aus dieser merkwürdigen Eigenschaft geht hervor, daß das vorgelegte Produkt auf zweierlei Art in zwei Quadrate zerlegbar ist. Also $(7^2 + 2^2)(10^2 + 4^2) = 6148$, eine Zahl, die mit $(70 \pm 8)^2 + (28 \mp 20)^2$ gleichgeltend ist, folglich 6148 in $78^2 + 8^2$ und $62^2 + 48^2$ zerlegbar.

V. Offenbar ist $(a - b)^2 + 2ab > 2ab$, oder $a^2 + b^2 > 2ab$, d. h. die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist größer als ihr doppeltes Produkt.

VI. Leicht ist's, die Bildungsweise des Produkts aus m Binomialfaktoren $(x + a)(x + b)(x + c) \ldots$ zu erhalten. In der That hat man für zwei oder drei Factoren die Produkte:

$$\begin{array}{l|l} x^2 + ax + ab & x^3 + ax^2 + abx + abc \\ \quad\;\; + bx & \quad\;\; + bx^2 + acx \\ & \quad\;\; + cx^2 + bcx \end{array}$$

Aus dem Verfahren der Multiplication selbst ergibt sich Folgendes:

1) Die verschiedenen Glieder des Produktes können keine Reductionen herbeiführen; die Buchstaben $a, b, c \ldots$ haben also weder numerische Coefficienten noch Exponenten.

2) Das erste Glied ist das Produkt aus sämmtlichen ersten Gliedern, und das letzte das Produkt aus allen zweiten Gliedern der Binomialfactoren. Zwischen diesen äussern Gliedern nehmen die Exponenten von x um Eins von Glied zu Glied ab und das Produkt hat im Allgemeinen die Form:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + abcd \ldots$$

3) Sämmtliche Glieder bestehen aus einer gleichen Anzahl m von Factoren; der Coefficient A von x^{m-1} kann nicht die Buchstaben $a, b, c \ldots$ mit einander multiplicirt enthalten; der Coefficient B von x^{m-2} besteht aus Produkten von je zwei dieser Buchstaben, oder $ab, ac, bc \ldots$

4) Kommt auf irgend eine Weise der Buchstabe a in einem der Coefficienten $A, B, \ldots$ vor, so kommen daselbst die übrigen Buchstaben $b, c \ldots$ ganz auf dieselbe Weise vor, weil das Produkt ungeändert bleibt, wenn man a anstatt b und b anstatt a setzt, u. s. w. Folglich ist

A die Summe aller zweiten Glieder der Binome;

B die Summe aller verschiedenen Produkte von je zwei;

C die Summe aller verschiedenen Produkte von je drei u. s. w.

Das letzte Glied ist das Produkt aller zweiten Glieder.

Die möglichen Vereinfachungen vorzunehmen darf man nicht unterlassen. So ist für $(4ab-2ac)(6ab-3ac)$ der erste Factor gleichgeltend mit $2a(2b-c)$, und der zweite mit $3a(2b-c)$; das Produkt also $6a^2(2b-c)^2$ oder $6a^2(4b^2-4bc+c^2)$.

Oefters ist es vortheilhaft die Produkte in ihre Factoren zu zerlegen (die Division wird uns bald lehren, dergleichen Zersetzungen auszuführen). Für $3y^2z+3yz^2+py+pz$ sieht man leicht, daß die beiden ersten Glieder mit $3yz(y+z)$ und die beiden andern mit $p(y+z)$ übereinstimmen; man hat also $(3yz+p)(y+z)$.

Von der Division.

§. 7. Es sei a der Dividend, d der Divisor, q der Quotient und r der Rest; r ist kleiner als d. Jede Division gibt die Gleichung $a=dq+r$. (Arith. §. 16.)

Da der Quotient nicht geändert wird, wenn man Dividend und Divisor durch eine und dieselbe Zahl dividirt, so kann man, um die Division der Monome auszuführen, die dem Dividend und Divisor gemeinschaftlichen Buchstaben weglassen, die Exponenten der nämlichen Buchstaben von einander abziehen, die Coefficienten endlich durch einander dividiren. Man sieht übrigens, daß diese Regel die umgekehrte von der der Multiplication ist. (§. 5.)

$$\frac{12a^3b^2c}{3ab}=4a^2bc;\quad \frac{15a^3b^5}{5a^2b^2}=3ab^3;\quad \frac{8a^2b^2c}{4ab^2}=2ac;$$

b^2 verschwindet in dem dritten Exempel, weil die beiden Glieder b^2 als gemeinschaftlichen Factor enthalten.

$$\frac{3abc}{3abc}=1;\quad \frac{4ac^3de^3}{8bd^3e}=\frac{ac^3e^2}{2bd^2}.$$

Weiter kann man die Rechnung nicht fortsetzen; es bleibt noch ac^3e^2 durch $2bd^2$ zu dividiren übrig, wenn man die numerischen Werthe von a, b, c, d, e kennt.

Es sei jetzt $20ab^5+4a^6-25a^2b^4-4b^6$ durch $2b^3+2a^3-5ab^2$ zu dividiren. Da der Quotient mit dem Divisor multiplicirt den

Dividend wieder hervorbringen muß, so würde, in so fern man ein Glied des Produkts $20ab^5 + 4a^6 - \ldots$ kennte, welches aus der Multiplication eines gegebenen Gliedes des Divisors mit einem Gliede des Quotienten ohne Reduction entstanden wäre, eine einfache Division das letztere geben. Nun weiß man aber, daß die Glieder, wo irgend ein Buchstabe, wie a, den höchsten Exponenten in beiden Factoren enthält, dem Produkte ein Glied geben, welches mit keinem andern reducirt werden kann, weil a den höchsten Exponenten hier gleichfalls bei sich führt. Die Glieder $4a^6$ einerseits, und $2a^3$ andererseits, befinden sich in diesem Falle; $4a^6$ ist also das genaue Produkt des Gliedes $2a^3$ mit einem Gliede des Quotienten, wo a den höchsten Exponenten hat. Dieses Glied ist folglich $\frac{4a^6}{2a^3}$ oder $2a^3$. Multiplicirt man darauf den ganzen Divisor mit $2a^3$ und zieht dieses Produkt vom Dividend ab, so wird der Rest das Produkt des Divisors mit den übrigen Theilen des Quotienten sein. Die Aufgabe geht jetzt darauf hinaus, diesen Rest durch den Divisor zu dividiren, und jene Theile zu erhalten, was dieselbe Schlußfolge wie vorher mit sich bringt; das Glied des Restes nämlich, wo der Buchstabe a den höchsten Exponenten hat, wird durch $2a^3$ dividirt.

Um die Verwirrungen zu vermeiden unter den Gliedern des Dividends, so wie in den successiven Resten dasjenige heraus zu finden, wo a den höchsten Exponenten hat, ist es zweckgemäß, den Dividend und Divisor zu ordnen, d. h. in die erste Stelle das Glied, wo a den höchsten Exponenten, in die zweite Stelle das Glied, wo a den unmittelbar darauf folgenden Exponenten hat, zu setzen, und so fort.

$$4a^6 - 25a^2b^4 + 20ab^5 - 4b^6 \quad \Big| \quad 2a^3 - 5ab^2 + 2b^3$$

$$-4a^6 + 10a^4b^2 - 4a^4b^3 \quad \Big| \quad 2a^3 + 5ab^2 - 2b^3$$

Erster Rest . . $+10a^4b^2 - 25a^2b^4 - 4a^3b^3 + 20ab^5 - 4b^6$

$$-10a^4b^2 + 25a^2b^4 - 10ab^5$$

2ter Rest . . . . $-4a^3b^3 + 10ab^5 - 4b^6$

$$+4a^3b^3 - 10ab^5 + 4b^6$$

3ter Rest 0

Man sieht, daß nach der Division von $4a^6$ durch $2a^3$ der ganze Divisor mit dem Partialquotienten $2a^3$ multiplicirt und das Produkt vom Dividend abgezogen wurde, was einen ersten Rest gab. Das

Glied $+ 10a^4b^2$ dieses Restes, wo a den höchsten Exponenten hat, wurde dann abermals durch $2a^3$ dividirt; man erhielt so $+ 5ab^2$ als zweites Glied des Quotienten. Der Divisor wurde darauf mit diesem Gliede $+ 5ab^2$ multiplicirt und das Produkt vom ersten Reste abgezogen, was einen zweiten Rest gab. Endlich vervollständigte die Division von $-4a^3b^3 : 2a^3 = -2b^3$ den Quotienten, weil man weiter keinen Rest fand.

Wenn man, wie hier oben, Glieder mit verschiedenen Zeichen, das eine mit $+$, das andere mit $-$ versehen erhält, so gibt man dem partiellen Quotienten das Zeichen $-$, und zwar deshalb, damit bei der Multiplication das erste Glied des Dividends wieder zum Vorschein komme. Wären beide Glieder der Partialdivision negativ, so würde der korrespondirende Quotient das Zeichen $+$ erhalten. Man darf dies blos als ein Ergebniß der Rechnung ansehen, ohne erklären zu wollen, was die Division zweier Glieder, die nicht beide zusammen positiv sind, wohl bedeuten möge. In der That handelt es sich hier nur darum, ein System von Gliedern zu finden, welches nach den bekannten Regeln mit dem Divisor multiplicirt den Dividend wieder hervorbringe.

Hieraus entnehmen wir für die Division der Polynome folgende Regeln: Ordne den Dividend und Divisor in Bezug auf einen und denselben Buchstaben, dividire das erste Glied des Dividends mit dem ersten Gliede des Divisors, was ein Glied des Quotienten gibt; mit diesem Gliede multiplicire den ganzen Divisor, ziehe das Produkt vom Dividend ab; den Rest unterwerfe derselben Operation. Bei den partiellen Divisionen beobachte die Regel der Zeichen der Multiplication. Diese Operation wird so lange fortgesetzt, bis man auf einen Rest kommt, in welchem die höchste Potenz jenes Buchstabens, nach welchem geordnet worden ist, einen kleinern Exponenten hat, als die höchste Potenz desselben Buchstabens im Divisor.

Daß man auch in Rücksicht auf b, oder auf einen andern gemeinsamen Buchstaben, hätte ordnen, überdem ganz dasselbe in Bezug auf den kleinsten Exponenten des Buchstabens sagen können, was wir über den größten desselben gesagt haben, ist hier noch zu bemerken.

§. 8. Hier stehen zwei andere Divisionsexempel:

$$
\begin{array}{ll}
6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4 & \mid 2a^2+2ab-b^2 \\
-6a^4-6a^3b+3a^2b^2 & \mid 3a^2-ab-2b^2 \\
\text{Erster Rest} \ldots\ldots -2a^3b-6a^2b^2-3ab^3+2b^4 & \\
+2a^3b+2a^2b^2-ab^3 & \\
\text{2ter Rest} \ldots\ldots -4a^2b^2-4ab^3+2b^4 & \\
+4a^2b^2+4ab^3-2b^4 & \\
\text{3ter Rest} \ldots\ldots 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
a^5-b^5 & \mid a-b \\
-a^5+a^4b & \mid a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \\
\text{Erster Rest} \ldots a^4b-b^5 & \\
-a^4b+a^3b^2 & \\
\text{2ter Rest} \ldots a^3b^2-b^5 & \\
-a^3b^2+a^2b^3 & \\
\text{3ter Rest} \ldots a^2b^3-b^5 & \\
-a^2b^3+ab^4 & \\
\text{4ter Rest} \ldots ab^4-b^5 & \\
-ab^4+b^5 & \\
\text{5ter Rest} \ldots 0 &
\end{array}
$$

Wenn man den Gang der letzten Division mit Aufmerksamkeit verfolgt, so sieht man bei der Division von $a^m - b^m$ durch $a - b$, daß in jedem Reste und jedem Quotienten die Exponenten von a um Eins abnehmen, und die von b um eben so viel zunehmen; die Reste sind also Binome, deren erstes Glied successive $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$.... ist. Kommt man zu dem Reste $ab^{m-1}-b^m$, so gibt die Division durch $(a-b)$ den vollständigen Quotienten b^{m-1}, so daß $a^m - b^m$ durch $(a-b)$ genau theilbar ist. Man hat $\frac{a^m-b^m}{a-b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + b^{m-1}$.

Wenn $b=1$, so ist $\frac{a^m-1}{a-1} = a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots\ldots + 1$.

Uebrigens ist es leicht, die Richtigkeit dieser Gleichungen darzuthun, indem man die zweite Seite derselben, bezüglich mit $a-b$ und $a-1$ multiplicirt; man findet auf diese Weise die Zähler $a^m - b^m$ und $a^m - 1$ wieder.

Dividirt man a durch $1-x$, so hat die Operation kein Ende, und man findet die unbegrenzten Quotienten $\frac{a}{1-x} = a(1+x+x^2+x^3+\ldots)$

Man kann folglich die erste Seite als die Summe der Glieder der zweiten Seite betrachten; dieser Bruch ist hiernach die Summe einer ins Unendliche fortlaufenden geometrischen Reihe, deren erstes Glied a und deren Quotient x ist. Ist z. B. $a = 2$, $x = \frac{1}{3}$, $1 - x = \frac{2}{3}$ so findet man $2 : \frac{2}{3}$ oder 3 als Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe $\div 2 : \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} \ldots\ldots$ Ebenso für $a = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{3} + [\frac{2}{3}]^2 + \ldots\ldots)$. Endlich für $a = \frac{2}{3}$ und $x = -\frac{1}{2}$ ist $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots)$.

Der periodische Decimalbruch $[0{,}54]$ so viel wie $\frac{54}{100} + \frac{54}{10000} + \ldots\ldots$ oder $\frac{54}{100}(1 + \frac{1}{100} + [\frac{1}{100}]^2 + \ldots\ldots)$ ist $= \frac{54}{99}$, wenn man $a = \frac{54}{100}$ und $x = \frac{1}{100}$ setzt. Ueberhaupt stellt p die aus n-Ziffern bestehende Periode eines vollständig periodischen Decimalbruchs dar, so ist dieser Bruch

$$\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \ldots\ldots = \frac{p}{10^n - 1} = \frac{p}{999\ldots}$$ (Arith. §. 53).

Setzt man $a = 1$ und $x = \frac{3}{2}$, so kommt $-2 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \ldots\ldots$ Man begreift Anfangs nicht, wie man durch Addition von stets wachsenden und positiven Gliedern als Summe -2 finden könne. Setzt man aber die Division nur bis auf 4 Glieder fort, so hat man den Rest ax^4; der genaue Quotient ist demnach $a\,(1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x})$, wo der Bruch die Summe aller übrigen Glieder bis ins Unendliche darstellt. Dieser Bruch wird $-\frac{81}{8}$, wenn man $a = 1$ und $x = \frac{3}{2}$ setzt; nimmt man also nur auf die ersten Glieder Rücksicht, so bilden die vernachläßigten Glieder eine negative Summe, die größer als der in Betracht genommene Theil ist. Die beiden Theile sind hier $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} - \frac{81}{8}$, was sich auf -2, identisch also mit der ersten Seite der frühern Gleichung, reducirt.

Der Widerspruch rührt allein daher, daß man die n ersten Glieder nur dann als einen mehr oder weniger annähernden Theil der Summe betrachten kann, in so fern $\frac{ax^n}{1-x}$ fortwährend abnimmt, in dem Maße die Zahl der beibehaltenen Glieder zunimmt; was erfordert, daß x kleiner als 1 ist. Eine solche Reihe, in der die Glieder desto mehr abnehmen, je weiter sie sich vom ersten Gliede entfernen, wird eine convergirende Reihe genannt.

Anmerkung. Convergirende Reihen sind eigentlich diejenigen Reihen nur, für welche die Summen der Glieder, von den

ersten an gerechnet, sich einer gewissen Grenze unendlich nähern. Wenn aber das Gegentheil statt findet, d. h. die erwähnte Summe bei Zunehmen der Zahl der Glieder sich keiner bestimmten Grenze nähert, so heißt die Reihe eine divergirende Reihe. Siehe die höhere Algebra über die Convergenz der Reihen und Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis (übersetzt von Huzler) sechstes Kapitel, von den convergirenden und divergirenden Reihen.

§. 9. Auf eine Schwierigkeit wollen wir aufmerksam machen. Es kommt nämlich zuweilen vor, daß der Buchstabe, nach welchem man ordnet, sich in mehreren Gliedern mit demselben Exponenten versehen vorfindet. Es ist die Frage, welch Glied hier zuerst geschrieben werden soll, und was dann aus unserer frühern Beweisart wird. Nach einiger Ueberlegung sieht man, daß es in diesem Falle hinreichend ist, den fraglichen Gliedern den Buchstaben mit seinem Exponenten als gemeinschaftlichen Factor zu geben, zwischen Klammern sonach die ihn multiplicirende Größe zu setzen. Dieses Aggregat wird dann als ein einziges Glied betrachtet. Hätte man z. B. $4a^4b^2 - 4a^4bc + a^4c^2$, so schreibt man $a^4(4b^2 - 4bc + c^2)$, das als ein einziges Glied angesehen wird.

Ein Exempel wird den hier zu befolgenden Gang klarer machen:

$$(4b^2-4bc+c^2)a^4-(b^2+2bc+c^2)a^2b^2+(b+c)2ab^4-b^6 \;\Big|\; \frac{(2b-c)a^2-(b+c)ab+b^3}{(2b-c)a^2+(b+c)ab-b^3}$$

$$\underline{-(4b^2-4bc+c^2)a^4+(2b-c)(b+c)a^3b-(2b-c)a^2b^3}$$

$$(2b-c)(b+c)a^3b-(3b^2+bc+c^2)a^2b^2+(b+c)2ab^4-b^6$$

$$\underline{-(2b-c)(b+c)(a^3b+(b^2+2bc+c^2)a^2b^2-(b+c)\;ab^4}$$

$$-(2b-c)\,a^2b^3+(b+c)\;ab^4-b^6$$

$$\underline{+(2b-c)\,a^2b^3-(b+c)\;ab^4+b^6}$$

$$0$$

Von den Brüchen und den gemeinschaftlichen Theilern.

§. 10. Alles, was wir über die arithmetischen Brüche gesagt haben, läßt sich auch von den algebraischen Brüchen behaupten.

1) $\frac{a}{b}$ bezeichnet also, daß die Einheit in b gleiche Theile getheilt ist, und von diesen a Theile genommen sind. Der Bruch

mit seinem Nenner multiplicirt gibt den Zähler, d. h. es ist immer $\frac{a}{b} \times b = a$. (Arith. §. 37.)

2) Was auch m sein mag, so hat man $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. (Arithmetik §. 38.)

3) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ (Arith. §. 39); $\frac{a}{m} \pm 1 = \frac{a \pm m}{m}$.
Das Zeichen $\pm$ wird plus oder minus ausgesprochen; es zeigt an, daß man in beiden Theilen zugleich entweder das obere oder das untere Zeichen nehmen soll.

4) $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$; $\frac{a}{mb} \times b = \frac{a}{m}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;
$(a + \frac{b}{c})\ (m + \frac{p}{q}) = \frac{(ac + b)\ (mq + p)}{cq}$ (Arith. §. 40.)

5) $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$; $\frac{am}{b} : m = \frac{a}{b}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$;
$(a + \frac{b}{c}) : (m + \frac{p}{q}) = \frac{q\,(ac + b)}{c\,(mq + p)}$. (Arith. §. 41.)

6) $\frac{a}{b}$ ist größer oder kleiner als $\frac{a + x}{b + x}$, je nachdem a größer oder kleiner als b ist. Werden die beiden Brüche unter einerlei Benennung gebracht, so ist $\frac{a}{b} = \frac{ab + ax}{b(b + x)}$ und $\frac{a + x}{b + x} = \frac{ab + bx}{b(b+x)}$.
Von den Brüchen $\frac{ab+ax}{b(b+x)}$ und $\frac{ab+bx}{b(b+x)}$ ist nun derjenige der bedeutendere, der den größern Zähler hat, d. h. der erste übertrifft den zweiten, wenn $a > b$; dagegen übertrifft der zweite den ersten, wenn $b > a$. Eben so beweist man, daß $\frac{a}{b} > \frac{a - x}{b - x}$, wenn $a < b$ und $\frac{a}{b} < \frac{a - x}{b - x}$, wenn $a > b$ ist.

§. 11. Suchen wir jetzt den größten gemeinschaftlichen Theiler D von zwei Polynomen, A und B, so ist dieses ein drittes Polynom, welches die beiden ersten genau theilt, und zwar so, daß die herauskommenden Quotienten keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben.

I. Sind A und B durch D theilbar, so ist $A = Dx$ und $B = Dy$. Dividiren wir A durch B, bezeichnen den Quotienten dieser Division durch q, und durch R den Rest, so werden wir erhalten $A = Bq + R$, woraus wir, wenn mit D dividirt wird, $x = yq + \frac{R}{D}$ ableiten; R ist also nothwendigerweise durch D theilbar und von der Form $R = Dz$, was $x = yq + z$ gibt.

Jeder gemeinschaftliche Theiler von A und B wird also auch den Rest ihrer Division genau theilen.

Nehmen wir jetzt an, daß D der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B sei, d. h. x und y keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben: so enthalten auch y und z keinen solchen Factor; denn wäre derselbe vorhanden, so würde er auch x theilen müssen, mithin ein gemeinschaftlicher Factor von x und y existiren. Der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B ist also auch immer der größte gemeinschaftliche Theiler von B und dem Reste ihrer Division.

II. Der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B wird nicht geändert, wenn man A durch eine Größe, welche mit B keinen gemeinsamen Factor hat, dividirt, oder multiplicirt. Denn es sei $A = Dx$ und $B = Dy$, wo x und y keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Offenbar wird D noch der größte gemeinschaftliche Theiler bleiben, wenn man x oder y, oder auch nur irgend einen ihrer Factoren wegläßt; das nämliche findet statt, wenn man A mit einer beliebigen Größe z, die mit B keinen gemeinsamen Factor hat, multiplicirt.

III. Ist ein nach a geordnetes Polynom A durch eine von a unabhängige Größe F theilbar, so müssen die Coefficienten jeder Potenz dieses Buchstaben a einzeln durch F theilbar sein. Es sei $Ma^m + Ha^h + \ldots$ der Quotient von A dividirt durch F, also $A = FMa^m + FHa^h + \ldots$ Da nun in F kein a vorkommt, so können hier auch keine Reductionen von einem zu einem andern Gliede statt finden. Jeder Coefficient behält demnach den Factor F bei.

Wir schreiten nun zur Anwendung dieser Sätze. Wenn man nach der sogleich zu zeigenden Methode den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier beliebigen Coefficienten von A, dann einen solchen

Theiler zwischen dem eben gefundenen Factor und einem andern Coefficienten von A aufsucht, und dies für alle übrigen Coefficienten fortsetzt: so ist klar, im Falle A einen von a unabhängigen Factor hat, solcher mithin jedes einzelne Glied genau theilt, daß man auf diese Weise jenen von a unabhängigen Factor F finden wird. Man erhält hiernach $A = FA'$, wo A' ein bekanntes Polynom darstellt, das keinen Factor ohne a mehr zuläßt. Eine ähnliche mit B ausgeführte Rechnung wird den von a unabhängigen Factor F', wenn solcher existirt, zum Vorschein bringen; man hat dann $B = F'B'$.

Der größte Theiler K zwischen F und F' ist der von a unabhängige, den Größen A und B gemeinschaftliche Factor; oder mit andern Worten: hat der größte gemeinschaftliche Theiler der Polynome A und B die Form QK, wo der eine Factor Q die Größe a, der andere K kein a enthält, und ist dieser letztere (K) gefunden, so bleibt nur noch übrig Q zu suchen, das durch keinen von a unabhängigen Factor theilbar sein kann. Ist einmal K bekannt, hat man mithin $F = K\alpha$ und $F' = K\beta$, woraus $A = K\alpha \cdot A'$ und $B = K\beta \cdot B'$: so wird, indem man den Factor K wegstreicht, Q der größte gemeinschaftliche Theiler der Größen $A'\alpha$ und $B'\beta$, oder vielmehr der Größen A' und B' sein, weil man α und β weglassen kann. (II.)

Hieraus entnehmen wir Folgendes: Nachdem die von a unabhängigen und allen Gliedern gemeinsamen Factoren F und F', der eine von A, der andere von B, gefunden sind, läßt man diese Factoren weg und erhält dadurch die vereinfachten Polynome A' und B'. Der den Größen F und F' gemeinsame Factor K wird bei Seite gesetzt, um den herauskommenden Theiler Q zwischen A' und B' damit zu multipliciren; KQ wird dann der verlangte Theiler sein.

Wir gehen nun an die Aufsuchung des von a abhängigen Factors Q. Da der Quotient q von A', dividirt durch B', kein Bruch sein darf, so reicht das bloße Verfahren wie bei Zahlen hier nicht aus. Es seien die zwei Polynome gegeben:

$$A' \ldots . \; Ma^m + M'a^{m'} + \ldots . ,$$
$$B' \ldots . \; Na^n + N'a^{n'} + \ldots . ,$$

die nach dem Buchstaben a geordnet sind. Man dividirt das erste Glied Ma^m durch das Glied Na^n; enthält nun N einen Factor α, der M nicht theilt, so wird der Quotient ein Bruch. Um diese Schwierigkeit zu heben, multiplicirt man A' mit α, was hier zulässig ist, da die von a unabhängigen gemeinschaftlichen Factoren der

Annahme gemäß aus B' herausgenommen sind. M geht dadurch in die durch N theilbare Größe $M\alpha$ über. Man kann also die ersten Glieder immer dahin verwandeln, daß die Theilbarkeit möglich wird, indem man die Factoren, welche dem Aufgeben der Division entgegenstehen, theils in N wegläßt, theils in M einführt. Ein ähnlicher Gang wird bei jeder nachfolgenden Division beobachtet, damit, wie es der Lehrsatz erfordert, in sämmtlichen Partialquotienten keine Brüche zum Vorschein kommen.

1) Es seien die Polynome

$36a^2cd - 120abcd + 100b^2cd$, und $36a^2c - 6a^2bc - 90ab^2c$ gegeben.

Der gemeinschaftliche Factor von $120abcd$ und $100b^2cd$ ist $20bcd$; der von $20bcd$ und $36a^2cd$ ist $4cd(F)$. Ebenso erhält man $6ac(F')$ als gemeinschaftlichen Factor sämmtlicher Glieder des zweiten Polynoms. Werden diese Factoren weggelassen, so reducirt sich die Aufgabe darauf, den größten gemeinschaftlichen Theiler der Polynome $9a^2 - 30ab + 25b^2$ und $6a^2 - ab - 15b^2$ zu suchen. Da aber $4cd$ und $6ac$ den Factor $2c$ gemein haben, so behält man $2c$ zurück, um damit den gemeinschaftlichen Theiler der reducirten Polynome zu multipliciren; $2c$ ist der von a unabhängige Factor K. Hier steht das Ende der Rechnung:

$9a^2 - 30ab + 25b$	$6a^2 - ab - 15b$	$3a - 5b$ gemeinsch. Theil.
$18a^2 - 60ab + 50b$	1r Quot.: 3	$2a + 3b$
1r Rest $- 57ab + 95b$	2r Rest $9ab - 15b^2$	
oder $- 19b(3a - 5b)$	3r Rest 0	

Weil $9a^2$ durch $6a^2$ nicht theilbar ist, so multiplicirt man zuvor den ganzen Dividend mit 2; der Quotient 3 führt dann zu dem Reste $- 57ab + 95b^2$. Die Aufgabe ist nun den größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen diesem Binom und dem vorigen Divisor zu finden. Man hat also eine ähnliche Rechnung wie eben zu verrichten. Das zweite Polynom $6a^2 - ab - 15b^2$ dient als Dividend, der Rest $-57ab + 95b^2$ als Divisor. Der letztere läßt sich durch Hinwegstreichen des gemeinsamen Factors $-19b$, der kein Factor vom Dividend ist, vereinfachen, und man erhält $(3a - 5b)$. Da hier die Division aufgeht, so ist der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler $2c(3a - 5b)$ oder $6ac - 10bc$.

2) Der Bruch $\frac{6a^3 - 6a^2y + 2ay^2 - 2y^3}{12a^2 - 15ay + 3y^2}$ soll auf die einfachste Form gebracht werden. Die Polynome haben 2 und 3 als Factoren, die man, ohne den größten gemeinschaftlichen Theiler zu ändern, weglassen kann; der Divisor wird dadurch in $4a^2 - 5ay + y^2$ und das erste Glied des Dividends in $3a^3$ verwandelt. Um die Theilbarkeit möglich zu machen, multiplicirt man den Dividend mit 4, d. h. man verdoppelt den Zähler; man hat also den größten gemeinschaftlichen Theiler von $12a^3 - 12a^2y + 4^2ay - 4y^3$ und $4a^2 - 5ay + y^2$ zu suchen. Eine erste Division gibt den Quotienten $3a$ und den Rest $3a^2y + ay^2 - 4y^3$. Um die Division abermals möglich zu machen, multiplicirt man diesen Rest mit 4; der Dividend wird, nachdem man den gemeinsamen Factor y weggelassen hat, $12a^2 + 4ay - 16y^2$. Eine zweite Division führt zu dem Reste $19ay - 19y^2$, der jetzt als Divisor von $4a^2 - 5ay + y^2$ gebraucht wird und sich auf $a - y$ reducirt, wenn man die Factoren 19 und y wegstreicht. Da die Division aufgeht, so ist $a - y$ der größte gemeinschaftliche Theiler. Der vorgelegte Bruch reducirt sich hiernach auf $\frac{6a^2 + 2y^2}{12a - 3y}$. Hier steht die Rechnung:

$12a^3 - 12a^2y + 4ay^2 - 4y^3$	$4a^2 - 5ay + y^2$	$19ay - 19y^2$
$+ 3a^2y + ay^2 - 4y^3$	$3a + 3$	$a - y$ gemeinsch. Theiler.
$12a^2 + 4ay - 16y^2$	$- ay + y^2$	$4a - y$.
$19ay - 19y^2$	0	

3) Man findet ebenso, daß $2a^2 + 2ab - b^2$ der größte gemeinschaftliche Theiler der Größen $4a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$ und $6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4$ ist. Der Bruch $\frac{4a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4}{6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4}$ ist demnach gleich $\frac{2a^2 - 2ab + b^2}{3a^2 - ab - 2b^2}$.

4) In dem Bruche $\frac{54a^2b - 24b^3}{45a^3b + 3a^2b^2 - 9ab^3 + 6b^4}$ ist $3b$ der von a unabhängige Factor; läßt man ihn in beiden Gliedern, desgleichen 2 im Zähler weg, so ist man darauf zurückgeführt den gemeinschaftlichen Theiler von $9a^2 - 4b^2$ und $15a^3 + a^2b - 3ab^2 + 2b^3$ zu suchen. Man findet, daß solcher $3a + 2b$, mithin $3b\,(3a + 2b)$ der verlangte Theiler ist; der gegebene Bruch reducirt sich hiernach auf $\frac{6a - 4b}{5a^2 - 3ab + b^2}$.

5) Man darf nicht vergessen, die Glieder, die dieselbe Potenz des Buchstaben, nach welchem geordnet ist, enthalten, zusammen zu nehmen und als ein einziges Glied zu betrachten. Es findet dies bei dem Bruche

$$\frac{a^2(b^2 - c^2) - ab\,(2b^2 + bc - c^2) + b^3\,(b + c)}{a^3\,(b^2 + 2bc + c^2) - a^2b\,(2b^2 + 3bc + c^2) + ab^3\,(b + c)}$$

statt. Die Betrachtung der Coefficienten $(b + c)$, $(2b^2 + bc - c^2)$, $(b^2 - c^2)$ u. s. w., zeigt bald, daß $(b + c)$ ein von a unabhängiger gemeinsamer Factor ist. Man scheidet ihn als einen Factor des größten gemeinschaftlichen Theilers aus und sucht solchen letztern zwischen den erhaltenen Quotienten $a^2(b-c) - ab\,(2b - c) + b^3$ und $a^3(b+c) - a^2b\,(2b + c) + ab^3$. Man findet bei fortgesetzter Operation noch den gemeinsamen Factor $a - b$; das Produkt aus diesem in den ersten oder $(a - b)\,(b + c)$ ist der größte gemeinschaftliche Theiler der Glieder des gegebenen Bruches; er reducirt sich hiernach auf

$$\frac{a\,(b - c) - b^2}{a^2\,(b + c) - ab^2}.$$

6) Man suche den größten gemeinschaftlichen Theiler der Polynome $(c - d)\,a^2 + 2b\,(c - d)\,a + b^2\,(c - d) \ldots.\,(A)$ und $(bc - bd + c^2 - cd)\,a + b^2d + bc^2 - b^2c - bcd \ldots.\,(B)$.

Man sieht auf der Stelle, daß A und B den gemeinsamen Factor $c - d$ haben, der aus beiden Größen herausgezogen wird, wodurch A in $a^2 + 2b + b^2\,(A')$ und B in $(b + c)\,a + b\,(c - b)\,(B')$ verwandelt wird. Es zeigt sich bald, daß A' und B' keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben; folglich ist der oben gefundene Factor $(c - d)$ der größte gemeinschaftliche Theiler von A und B.

§. 12. Die kleinste durch zwei gegebene Zahlen a und b theilbare Zahl n zu finden. Diese Zahl würde offenbar $a \times b$ sein, wenn a und b Primzahlen unter sich wären. Nun sei d ein Theiler von a und b, so daß $a = da'$ und $b = db'$. Da $da'\,b' = ab' = a'b$, so ist $da'\,b'$ durch a und b theilbar. $\frac{ab}{d}$ ist aber desto kleiner, je größer d ist; hiernach wird die Zahl $n = da'b'$, die kleinste durch a und b theilbare Zahl sein, wenn d ihr größter gemeinschaftlicher Theiler ist. So haben 312 und 132 als größten Theiler 12; die Quotienten sind 26 und 11; folglich $12 \cdot 26 \cdot 11 = 3432$ das kleinste Vielfache von 312 und 132.

Zweites Kapitel.

Von den Gleichungen des ersten Grades.

Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten.

§. 13. Der Grad einer Gleichung wird durch die höchste in ihr vorkommende Potenz der Unbekannten angezeigt: x, y, z.... stellen die unbekannten, a, b, c.... dagegen die gegegebenen Größen dar. So ist $ax + b = cx$ eine Gleichung vom ersten Grade;

$ax^2 + dx = c$ eine vom zweiten Grade, oder quadratische Gleichung;

$x^3 + 9x^2 = r$ eine vom dritten Grade, oder cubische Gleichung, u. s. w.

Anmerkung. Eine Gleichung heißt unbedingt oder identisch, wenn ihr völlig Genüge geleistet wird, welchen Werth man auch den darin vorkommenden Buchstaben geben mag. Eine solche Gleichung ist $4(a + b)c = 2ac + 4bc + 5d + 2ac - 5d$. Eine algebraische oder bedingte Gleichung ist dagegen diejenige, welche erst dann bestehen kann, wenn man einem oder mehreren der darin vorkommenden Buchstaben gewisse Werthe beilegt. So ist $5x = 2x + 8$ eine algebraische Gleichung, weil sie nur für einen gewissen Werth von x richtig wird. Gleichungen, in welchen ausser den Unbekannten blos Zahlen vorkommen heißen numerische Gleichungen, dagegen Literalgleichungen diejenigen, welche blos Buchstaben enthalten.

Um eine vorgelegte Aufgabe oder ein Problem aufzulösen, muß man vorerst die Bedingungen, durch welche die gegebenen Größen mit der unbekannten verbunden sind, mittelst einer Gleichung ausdrücken. Ist diese Uebertragung der Aufgabe in die algebraische Sprache geschehen, so bleibt nur noch die Aufgabe aufzulösen übrig, d. h. die unbekannte von allen bekannten Größen, mit welchen sie sich

verbunden findet, befreien, und sie auf die Form $a = A$ bringen; A ist der gesuchte Werth.

Z. B. ein Vater ist jetzt viermal so alt als sein Sohn, die Summe ihrer Alter beträgt 45 Jahre; wie alt ist jeder? Es sei x das Alter des Sohnes, $4x$ demnach das Alter des Vaters; da $x + 4x$ zusammen 45 Jahre betragen soll, so ist $5x = 45$. Es ist dies die Gleichung, welche in unserer Aufgabe die Verbindungsweise, in der die unbekannte zu den gegebenen Größen steht, ausdrückt. Diese Gleichung muß jetzt aufgelöst werden, was dadurch geschieht, daß man auf beiden Seiten mit 5 dividirt (Arith. §. 5); man erhält $x = 9$, also 9 Jahre das Alter des Sohnes und 36 Jahre das des Vaters.

Man sieht hier deutlich, wie die Aufgabe aus zwei sehr verschiedenen Theilen besteht, erstens aus dem Ansetzen der Gleichung, zweitens aus dem Auflösen derselben. Wir wollen nun diese zwei Theile näher untersuchen, und mit dem zweiten den Anfang machen.

§. 14. In einer Gleichung vom ersten Grade kann die unbekannte mit den bekannten Größen nur durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division verbunden sein. Hier folgen die Regeln, die man anwenden muß, um sie davon zu befreien:

I. Hat die Unbekannte mehrere Bruch-Coefficienten, so multiplicirt man die ganze Gleichung mit der Zahl, welche der gemeinschaftliche Nenner abgeben würde (Arith. §. 38). Diese Operation stört die Gleichung nicht, und entfernt aus ihr die Divisoren. Es geht dies dahin aus, alle Glieder auf einerlei Nenner zu bringen und solchen nachher wegzulassen. Es sei z. B. die Gleichung:

$$\tfrac{2}{3}\,x + \tfrac{1}{2}\,x - 20 - \tfrac{1}{6}\,x = \tfrac{3}{4}\,x - \tfrac{1}{12}\,x - 8.$$

Wird das Ganze mit 12 multiplicirt, so wird die Gleichung

$$8x + 6x - 240 - 2x = 9x - x - 96,$$

$$\text{oder } 12x - 240 = 8x - 96,$$

wenn man auf jeder Seite die angezeigten Operationen ausführt.

II. Alle unbekannten Glieder werden auf die eine Seite, und die gegebenen Größen auf die andere Seite gebracht; dabei erhalten die Glieder, welche von einer Seite auf die andere kommen, ein dem vorher gehabten entgegengesetztes Vorzeichen. Unsere letzte Gleichung wird hiernach: $12x - 8x = 240 - 96$, oder $4x = 144$.

In der That läßt man 240 im ersten Gliede der Gleichung $12x - 240$ weg, wodurch es auf $12x$ reducirt wird, so ist es um 240 vermehrt worden; damit die Gleichung nicht aufgehoben werde, muß man also das zweite Glied um 240 vermehren. Aehnlicherweise wird durch Hinweglassung von $8x$ das zweite Glied der Gleichung um $8x$ vermindert; man muß daher auch das erste Glied um $8x$ verringern.

III. Vermittelst dieser beiden Regeln kann die Gleichung auf die Form $ax = b$ gebracht werden. b ist das Produkt von a multiplicirt mit x (Arith. §. 6); wenn man daher b durch a dividirt, so gibt der Quotient den Werth von x; also $x = \frac{b}{a}$. Die Unbekannte wird folglich von ihren Coefficienten dadurch befreit, daß man die ganze Gleichung durch diesen Coefficienten dividirt.

Unsere Gleichung $4x = 144$ gibt hiernach $x = \frac{144}{4} = 36$. Diese Zahl thut der oben gegebenen Gleichung Genüge, d. h. ihre beiden Glieder werden einerlei sein, wenn man überall 36 anstatt x setzt. In unserm Beispiele ist $24 + 18 - 20 - 6 = 27 - 3 - 8 = 16$, wie es sein muß.

IV. Eine Gleichung vom ersten Grade läßt nur eine Auflösung zu. Denn jede kann immer auf die Form $ax + b = cx + d$ gebracht werden; könnte nun x zwei Werthe, α und β, haben, so hätte man die Gleichungen $a\alpha + b = c\alpha + d$, $a\beta + b = c\beta + d$, woraus, indem die zweite von der ersten abgezogen wird, $a(\alpha - \beta) = c(\alpha - \beta)$, oder $(a - c)(\alpha - \beta) = 0$; dieser Gleichung kann nur dadurch Genüge geschehen, daß $\alpha = \beta$, weil a und c gegebene ungleiche Größen sind.

Hier nur einige Beispiele zur Anwendung dieser Regeln:

1) $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{f} + m = px + \frac{cx}{f} + n$; wird der auf beiden Seiten gemeinschaftliche Bruch $\frac{cx}{f}$ weggelassen, so hat man

$$\frac{ax}{b} + m = px + n;$$

wird das Ganze mit b multiplicirt, so kommt $ax + bm = bpx + bn$;
werden die Glieder bm und bpx versetzt, so ist $ax - bpx = bn - bm$;
oder . . . . $x(a - bp) = b(n - m)$;
wird durch $a - bp$ dividirt, so kommt endlich $x = \frac{b(n-m)}{a - bp}$.

2) $\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$; durch Versetzung erhält man $\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$, oder $\frac{6}{5}x - \frac{2}{3}x = 8$; wird die Gleichung mit 15 multiplicirt, so kommt $18x - 10x = 8 \times 15$, oder $8x = 8 \cdot 15$, woraus $x = 15$.

3) $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ gibt $9 + 10 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x$; wird mit 21 multiplicirt, so kommt $19 \times 21 = 7x - 6x = x$; also $x = 399$.

4) $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ gibt $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$; wird mit $9 \times 4 \times 5$ multiplicirt, so erhält man $40x - 45x + 252x = 180 \cdot 100$, oder $247x = 18000$; folglich $x = \frac{18000}{247} = 72{,}8745$.

§. 15. Wir kommen nun zum ersten und schwierigsten Theile der Aufgabe, der darin besteht, die Gleichung anzusetzen. Um dahin zu gelangen untersucht man mit Aufmerksamkeit die Aufgabe in allen ihren Umständen, um sie gehörig zu verstehen; gibt der Unbekannten einen vorläufigen Werth, und nimmt dann mit dieser Zahl die erforderlichen Operationen vor, um zu prüfen, ob sie passe oder nicht. Auf diese Weise kennt man die Reihe von Rechnungsoperationen, die man mit der gesuchten Zahl ausführen müßte, wenn sie gegeben wäre, um zu ermitteln, ob sie wirklich der Aufgabe genüge. Mit Hülfe der algebraischen Zeichen endlich, unterwirft man x, welches die Unbekannte vorstellt, ganz denselben Operationen, und die Gleichung wird gebildet sein.

Hier einige Beispiele um die Anwendung dieser Vorschrift zu zeigen:

I. Wie groß ist die Schuldenlast einer Person, die nach Abtragung der Hälfte, des Drittels und des Zwölftels derselben noch 630 fl. schuldig bleibt?

Nehmen wir an, daß die Person 1200 fl. schuldig sei; 600 ist die Hälfte, 400 das Drittel, 100 das Zwölftel: die Person hat also 1100 fl. bezahlt; nun ist sie noch 630 fl. schuldig, folglich wäre sie im Ganzen 1100 + 630 oder 1730 fl. schuldig, und nicht, wie angenommen wurde, 1200 fl. Die Annahme war demnach unrichtig; aus den dabei stattfindenden Rechnungen, die man mit x leicht ausführt, ergibt sich

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 630.$$

Das Uebrige bietet keine Schwierigkeiten mehr dar; wird mit 12 multiplicirt, so hat man $12x = 6x + 4x + x + 7560$, oder $12x =$

$11x + 7560$; woraus $x = 7560$ fl.; es ist dies die gesuchte Zahl, wie man sich leicht überzeugen kann.

Unsere Regel, um eine Aufgabe in Gleichung zu bringen, besteht also, wie schon gesagt, darin, mit x sämmtliche Operationen vorzunehmen, die man ausführen müßte, um den Werth der Unbekannten zu prüfen, ob er in der That der Aufgabe Genüge leiste.

Der der Unbekannten willkürlich beigelegte Werth dient nur dazu, die fraglichen Rechnungsoperationen gehörig herauszustellen; der Mühe, davon Gebrauch zu machen, ist man durch einige Uebung bald überhoben.

II. Es soll die Zahl angegeben werden, deren dritter und vierter Theil zusammen 63 ausmachen. Setzt man die unbekannte Zahl $= x$, so ist der dritte Theil derselben $= \frac{x}{3}$ und der vierte Theil $= \frac{x}{4}$. Folglich ist die Gleichung $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 63$; sie reducirt sich auf $7x = 12 \cdot 63$; woraus $x = \frac{12 \cdot 63}{7} = 12 \cdot 9 = 108$.

Will man die Zahl haben, deren fünfter und sechster Theil zusammen 22 geben, so muß man von neuem die Gleichung ansetzen, und sie dann auflösen. Man hat auf solche Weise $\frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 22$; woraus $11x = 30 \cdot 22$, und $x = 60$.

Will man nun diese beiden Aufgaben, und alle ähnlichen der Art, die nur durch numerische Werthe von einander verschieden sind, auf einmal lösen, so stellt man die Zahlen durch die Zeichen $a, b, c \ldots$, geeignet, alle möglichen Werthe auszudrücken, dar, und löst dann folgende Aufgabe auf: Welche Zahl ist es, die, wenn sie durch a und b dividirt wird, und hierauf die Quotienten addirt werden, die Summe s gibt? Man findet $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = s$, woraus $x = \frac{abs}{a+b}$.

Dieser Ausdruck ist eigentlich, so zu sagen, nicht der Werth, der in unsern Aufgaben vorkommenden Unbekannten, er zeigt vielmehr die auszuführenden Rechnungsoperationen für alle an. Ein solcher Ausdruck heißt eine **Formel**. Die vorliegende Formel zeigt, daß die Unbekannte gefunden wird, indem man die in der Aufgabe enthaltenen drei Zahlen miteinander multiplicirt, und das Produkt abs

durch die Summe $a + b$ der beiden Divisoren dividirt. Unsere Formel ist also nichts anderes, als eine abgekürzte Schreibart dieser Aussage. Die Algebra ist folglich nichts anderes als eine Sprache, die bestimmt ist, Vernunftschlüsse auszudrücken; ihre Schriftzeichen zu lesen und zu schreiben, muß man verstehen. Der Vortheil, den jene Formel gewährt, ist solcher Art, daß der erfahrenste Algebraist und der ungeschickteste Rechner beide jetzt die Aufgabe lösen können. Der letztere gelangt nur dahin, indem er sich einer mechanisch erworbenen Fertigkeit blindlings überläßt; verschiedenartige Aufgaben bringen überdies verschiedene Formeln mit sich, der Algebraist allein weiß sie zu finden. Man sieht hieraus, wie zuweilen Personen mit erstaunenswerther Leichtigkeit rechnen und Resultate genau finden können, ohne daß sie eigentlich verstehen, was sie machen.

III. Die Summe der Alter zweier Brüder beträgt 57 Jahre, der eine ist 7 Jahre älter als der andere; wie alt ist jeder? Es sei x das Alter des Jüngern, also $x + 7$ das Alter des Aeltern, folglich die Gleichung $x + x + 7 = 57$; woraus $2x + 7 = 57$ und $x = 25$: der Jüngere ist 25 Jahre alt, der Aeltere 32 Jahre.

Wenn man die Aussage dieser Aufgabe näher untersucht, so sieht man leicht, daß sie unnöthige Dinge enthält; offenbar geht sie dahin, aus der bekannten Summe 57 von zwei Zahlen und ihrem Unterschiede 7, jede dieser Zahlen zu finden. Ueberhaupt ist es zweckgemäß, die Aufgaben von dem ihnen beigemengten Fremdartigen, das die Ideen nur verdunkelt und die Verbindungsweise der Größen untereinander versteckt, möglichst zu entkleiden. Es gehört dazu ein besonderer Takt, den man nur durch Uebung sich erwirbt; weder Lehrer noch Bücher können uns die erforderliche Urtheilskraft geben, um zu entscheiden, was bei einer Aussage nothwendig, was unnöthig sei. Um die vorige Aufgabe allgemein zu machen, drücken wir sie nun folgendergestalt aus: Es sollen zwei Zahlen gesucht werden, deren Summe gleich s und deren Differenz gleich d ist. Man bezeichne die kleinere durch x, die größere wird dann durch $x + d$ ausgedrückt. Die Bedingung der Aufgabe gibt also $x + (x + d) = s$; woraus $2x = s - d$, und $x = \frac{1}{2}(s - d)$. Die kleinere der gesuchten Zahlen ist gefunden; die größere ist $x + d$, oder $\frac{1}{2}(s - d) + d = \frac{1}{2}(s + d)$. Folglich sind $x = \frac{1}{2}(s - d)$, und $x + d = \frac{1}{2}(s + d)$ die der Aufgabe entsprechenden Zahlen. Man nimmt die Hälfte der

gegebenen Summe und die der gegebenen Differenz; die größere Zahl erhält man dann, wenn diese Hälften addirt, und die kleinere, wenn die Hälften von einander abgezogen werden.

Ein aus zwei Stockwerken bestehendes Haus hat eine Höhe von 15 Metern, der erste Stock ist 1 Meter höher als der zweite; wie hoch ist jeder Stock? $7\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ sind die Hälften der gegebenen Zahlen; also ist $7\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 8$ Meter die Höhe des ersten Stocks, $7\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$ Meter die Höhe des zweiten.

IV. Eine Zahl a in zwei solche Theile zu zerlegen, die sich zu einander verhalten wie m zu n. Welches sind diese Theile? Der erste Theil sei x, der andere ist dann $\frac{nx}{m}$; da die Summe dieser Theile a beträgt, so hat man die Gleichung $x + \frac{xn}{m} = a$; woraus $x = \frac{ma}{m+n}$.

Eine Zahl in drei Theile zu zerlegen, die sich zu einander verhalten wie $m:n:p$. Ist x der erste Theil, so sind die zwei andern $\frac{nx}{m}$ und $\frac{px}{m}$; folglich $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a$; woraus $x = \frac{ma}{m+n+p}$. (Gesellschaftsrechnung Arith. §. 79.)

V. Ein Vater ist jetzt 40, sein Sohn 12 Jahre alt; in wie viel Jahren wird der Vater dreimal so alt als sein Sohn sein? In x Jahren ist des Vaters Alter $= 40 + x$ Jahre und das des Sohnes $= 12 + x$. Da $40 + x$ gleich dem Dreifachen von $12 + x$ sein soll, so ist $40 + x = 36 + 3x$; woraus $x = 2$.

VI. Mehrere Personen, die $A, B, C\ldots$ heißen mögen, sollen eine gewisse Geldsumme unter sich theilen; nach getroffener Uebereinkunft nimmt A aus der Masse 10 Dukaten und den sechsten Theil des Restes; B nimmt 20 Dukaten und den sechsten Theil des Restes; C nimmt 30 Dukaten und den sechsten Theil des Restes, und so fort bis zur letzten Person, die, das was übrig bleibt, nimmt; nach geschehener Theilung hat jede Person gleich viel. Wie groß war die zu theilende Summe, die Zahl der Personen und der Antheil eines jeden?

Obgleich hier drei Unbekannte vorkommen, so zeigt doch eine geringe Aufmerksamkeit, daß, wenn die zu theilende Summe x gefun-

den wäre, man bald auch die übrigen haben würde; die Aufgabe kann folglich so behandelt werden, als wenn nur eine Unbekannte da wäre.

Nimmt A 10 Dukaten, so bleiben noch $x - 10$; der sechste Theil davon ist $\frac{x-10}{6}$; der Antheil des A ist folglich $10 + \frac{x-10}{6}$, oder $\frac{x+50}{6}$.

B nimmt jetzt 20 weg, es bleiben hiernach $x - \frac{x+50}{6} - 20 = \frac{5x-170}{6}$; der sechste Theil davon ist $\frac{5x-170}{36}$; der Antheil des B ist folglich $20 + \frac{5x-170}{36}$ oder $\frac{5x+550}{36}$.

Da diese beiden Antheile gleich sein sollen, so hat man $\frac{x+50}{6} = \frac{5x+550}{36}$; oder $6x + 300 = 5x + 550$; woraus $x = 250$.

Die Summe beträgt also 250 Dukaten; der Antheil eines Jeden ist $\frac{x+50}{6}$ oder 50; die Zahl der Personen ist gleich $\frac{250}{50}$ oder 5.

VII. Aus a Karten werden b Karten gezogen; auf jede der letztern legt man so viel Karten, bis die Zahl der Karten mit der Zahl der Augen der Karte, auf welche man legt, c ausmache; zuletzt bleiben dann noch d Karten übrig. Wie groß ist die Summe der Augen x auf jenen b ersten Karten.

Die Zahl der Augen, nebst der Zahl der darauf gelegten Karten macht zusammen bc; zieht man die Anzahl der darauf gelegten Karten davon ab, so ist der Rest gleich x. Nun ist die Anzahl dieser Karten $= a - d - b$. Folglich $x = bc - (a - d - b)$ oder $x = b(c+1) + d - a$.

Hat man 32 Karten, zieht aus ihnen drei Karten heraus, und soll die Anzahl der Augen der ersten Karte mit der Anzahl der darauf liegenden zusammen 12 ausmachen, so ist $x = d + 7$.

VIII. Hat man eine Formel, welche den Werth der Unbekannten eines Problems in Buchstaben ausdrückt, gefunden, so kann man hernach diese Unbekannte als gegeben ansehen, und dafür eine der gegebenen Größen als die gesuchte annehmen; löst man nämlich die gefundene Gleichung in Bezug auf die letztere auf, so hat man die

Formel abgeleitet, welche eine durch jene Aenderung der Unbekannten entstandene andere Frage beantwortet. Ueberhaupt kann man in einer Gleichung jede verschiedene darin vorkommende allgemeine Größe als die gesuchte ansehen. Es ist also nicht gerade nöthig, die Elemente einer Aufgabe in gegebene und unbekannte Größen zu unterscheiden. Man sucht nunmehr die Relation der verschiedenen in der Aufgabe vorkommenden Größen zu einander durch eine Gleichung auszudrücken; die jedesmalige Frage bestimmt, welcher der als unbekannt zu betrachtende Buchstabe sei. Diese Bemerkung erleichtert die Auflösung von Problemen, wo die Unbekannte in einer verwickelten Verbindungsweise vorkömmt. Wir geben nun ein ziemlich zusammengesetztes Exempel, in dem das eben Gesagte seine Anwendung finden kann.

Die Mechanik lehrt, daß die Schwingungszeiten t, t' zweier Pendeln sich wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen l, l' verhalten, oder $t:t' = \sqrt{l}:\sqrt{l'}$. Kennt man drei dieser Größen, so findet man die vierte aus der Gleichung $l't^2 = lt'^2$. Ein Pendel macht aber desto mehr Schwingungen, je schneller er geht; sind also n und n' die Zahl der Schwingungen, welche die zwei Pendel l und l' in derselben Zeit machen, so hat man die Proportion $t:t' = n':n$; folglich $n':n = \sqrt{l}:\sqrt{l'}$, woraus $n'\sqrt{l'} = n\sqrt{l}$. Nun zeigt die Erfahrung, daß der Sekundenpendel (derjenige, der 60 Schwingungen in einer Minute, oder 86400 Schwingungen an einem Tage macht) im leeren Raume zu Paris eine Länge von 0,9938267 Meter (l), oder von 36,713285 Zoll (l) hat.

Hiernach kann man die Zahl der Schwingungen n' eines bekannten Pendels l' während einer gegebenen Zeit leicht bestimmen, oder umgekehrt, aus der Zahl der Schwingungen n' während einer bestimmten Zeit die Länge l' eines Pendels finden. Denn das zweite Glied der Gleichung $n'\sqrt{l'} = n\sqrt{l}$ ist bekannt, man braucht also nur l' oder n' zu suchen. Z. B. welche Länge muß ein Pendel haben, damit er 100000 Schwingungen in 24 Stunden mache?

Man hat $l' = \frac{ln^2}{n'^2}$, wo $n = 86400$, $n' = 100{,}000$ und $l = 0{,}9938267$ ist. Die nebenstehende Rechnung gibt l' in Meter an; es ist die Länge des Sekundenpendels, wenn man den Tag in 10 Stunden, die Stunde in 100 Minuten, die Minute in 100 Sekunden abtheilt.

$$\begin{aligned} \text{Log.}\, n^2 &= 9{,}8730274 \\ \text{Log.}\, l &= 0{,}9973106-1 \\ -\text{Log.}\, n'^2 &= -10 \\ \hline \text{Log.}\, l' &= 0{,}8703380-1 \\ l' &= 0{,}7418878 \end{aligned}$$

IX. A und B treten mit gleich viel Geld zu einem Spiel; der Verlust des A beträgt 12 fl., der des B 57 fl., dadurch hat B nur noch den vierten Theil von dem was A übrig behält. Wie viel hatte jeder vor dem Spiel? Antwort: 72.

X. Verdoppelte man mir die Zahl meiner Thaler, sagt Jemand, so würde ich 8 verschenken; man erfüllt dreimal nach einander diesen Wunsch, es bleibt ihm zuletzt nichts übrig. Wie viel Thaler hatte diese Person? Antwort: 7.

XI. Eine Zahl zu finden, bei welcher, wenn sie durch a und b dividirt wird, und hierauf die Quotienten abgezogen werden, die Differenz gleich d sei? Welche Zahl ist es? Antwort: $x = \frac{abd}{b-a}$.

XII. Eine Zahl zu finden, deren Produkt aus ihren m gleichen Theilen gleich dem Produkte aus ihren $m+1$ gleichen Theilen sei (das Produkt der drei Drittel z. B. gleich dem der vier Viertel). Man hat

$$x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}.$$

XIII. Ein Jäger verspricht für jeden Fehlschuß, den er thäte, einem andern b fl.; dagegen soll der andere ihm jedesmal c fl. geben, wenn er träfe. Nach n Schüssen sind beide Jäger sich entweder nichts schuldig, oder der erste ist dem zweiten d schuldig, oder der zweite dem ersten. Man verlangt eine Formel, welche die Anzahl der Fehlschüsse für diese drei Fälle gibt. Der Gewinn ist c mal die Zahl $(n-x)$ der glücklichen Schüsse, der Verlust ist b mal x; woraus $bx - c(n-x) = \pm d$.

Man findet $x = \frac{cn \pm d}{b+c}$.

Für den ersten Fall ist d Null; für den zweiten Fall gilt das obere, für den dritten das untere Zeichen.

XIV. Ein Springbrunnen füllt einen Wasserbehälter in h Stunden, ein zweiter füllt denselben Behälter in h' Sunden; in welcher Zeit würden beide Springbrunnen, wenn sie zugleich fließen, den Behälter füllen? Antwort: $x = \frac{hh'}{h+h'}$.

Das Problem wird ebenfalls leicht gelöst, wenn mehr als zwei Springbrunnen da wären. (Arith. §. 77.)

Anmerkung. Die Aufgabe wird eine andere, wenn die Geschwindigkeit, mit der das Wasser fließt, nicht unverändert bleibt.

Sich in der Bildung und Auflösung der verschiedensten Gleichungen tüchtig zu üben, ist nützlich und nothwendig. Eine treffliche Auswahl solcher Aufgaben enthalten nachstehende Schriften:

1) Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra von Meier Hirsch.

2) Sammlung von Formeln, Aufgaben und Beispielen aus der Arithmetik und Algebra von J. Salomon.

3) Sammlung arithmetischer Uebungsaufgaben in ihrer Anwendung auf Gegenstände, welche sich besonders mit Logarithmen und Formeln viel leichter als gewöhnlich berechnen lassen, von Ch. Breithaupt.

4) Auflösungslehre der Gleichungen des ersten und zweiten Grades, sammt einer Sammlung von Aufgaben von T. Beskiba.

Bemerkungen über die Gleichungen des ersten Grades.

§. 16. Die algebraischen Formeln können nur in so fern einen klaren Sinn haben, als sie der Ausdruck einer Reihe von Rechnungsoperationen sind, deren Auflösung möglich ist. Die isolirte Größe $b-a$ z. B. drückt etwas Ungereimtes aus, sobald $a>b$ ist. Es ist hier der Ort, auf die vorigen Operationen zurückzukommen, da sie zuweilen dergleichen Schwierigkeiten darbieten.

Jede Gleichung vom ersten Grade kann immer dahin gebracht werden, daß ihre sämmtlichen Glieder positiv seien, oder daß sie folgende Form habe

$$ax+b=cx+d \;\ldots.\; (1).$$

Anmerkung. Die negativen Glieder wegzuschaffen ist stets möglich, da nichts hindert, auf beiden Seiten eine und dieselbe Größe hinzu zu addiren. Eine solche aber abzuziehen geht nicht in allen Fällen an; die beiden Glieder müssen deshalb größer als jene subtraktive Größe sein.

Nehmen wir nun $cx+b$ auf beiden Seiten der Gleichung (1) weg, so kommt $ax-cx=d-b$, woraus $x=\dfrac{d-b}{a-c} \;\ldots.\; (2).$

Drei Fälle kommen jetzt in Betracht: erstens, wenn $d > b$ und $a > c$; zweitens, wenn nur eine dieser Bedingungen statt hat; drittens, wenn $b > d$ und $c > a$. In dem ersten Falle löst der Werth (2) das Problem auf; in den beiden andern Fällen aber weiß man nicht mehr recht, welchen Sinn man diesem Werthe von x beilegen soll. Dies ist's, was wir hier näher zu untersuchen haben.

Im zweiten Falle ist eine der Subtractionen $d-b$, $a-c$ unmöglich. Es sei z. B. $b > d$ und $a > c$; es ist klar, daß alsdann die Gleichung ungereimt ist, weil die beiden Glieder ax und b des ersten Theils bezüglich größer als die Glieder cx und d des zweiten Theiles sind. Stellt sich also diese Schwierigkeit dar, so wird man überzeugt sein, daß irgend eine Absurdität in der Aufgabe vorkomme, indem die Gleichung ja nicht anders, als eine getreue Uebersetzung jener in die algebraische Sprache ist.

Der dritte Fall findet statt, wenn $b > d$ und $c > a$; man hat alsdann zwei unmögliche Subtractionen. Nun haben wir, um die Gleichung (1) aufzulösen, auf beiden Seiten $cx + b$ abgezogen, was offenbar unmöglich ist, weil jeder Theil an und für sich von $cx + b$ übertroffen wird. Da eine solche Rechnung fehlerhaft war, so wollen wir jetzt $ax + d$ auf beiden Seiten in Abzug bringen; es kommt hierdurch

$b-d=cx-ax$, woraus $x = \frac{b-d}{c-a}$ . . . . . (3).

Eine Vergleichung dieser beiden Werthe (2) und (3) zeigt, daß sie nur in so weit sich von einander unterscheiden, als die Zeichen des zweiten oben und unten geändert sind; andere Schwierigkeiten bietet er nicht mehr dar. Stößt man also auf den letztern Fall, so gibt ein solcher zu erkennen, daß man, anstatt die unbekannten Glieder in den ersten Theil zu setzen, sie vielmehr in den zweiten Theil hätte bringen sollen. Um diesen Fehler wieder zu beseitigen, ist es nicht nöthig, die Rechnung von Neuem vorzunehmen; es reicht schon hin, oben und unten die Zeichen des Ausdrucks zu ändern.

Ein Hauptvorzug der Algebra besteht darin, daß sie Formeln für alle Fälle einer Aufgabe, welche Werthe auch die daselbst vorkommenden Zahlen haben mögen, angibt. Diesen Zweck werden wir hier erreichen, in so fern wir die Uebereinkunft treffen, die negativen Größen, wenn sie einzeln stehen, denselben Operationen zu unterwerfen, als wenn sie Theile von mehrnamigen Größen wären. Hätte man also z. B. $m+d-b$ und $b > d$, so würde man

$m - (b - d)$ schreiben; für den Fall, daß m Null und $b > d$ ist, werden wir der Uebereinkunft zufolge ebenfalls $d - b = -(b - d)$ schreiben.

Der Werth von x im zweiten Falle wird hiernach $x = -\frac{b-d}{a+c}$ und wir sagen alsdann: jede negative Auflösung zeigt eine Ungereimtheit an.

Um das Polynom $-a^4 + 3a^2b^2 +$ ꝛc. durch $-a^2 + b^2 +$ ꝛc. zu dividiren, dividirt man Anfangs das erste Glied $-a^4$ durch $-a^2$, wo der Quotient das Zeichen $+$ hat (§. 7). Ganz dasselbe sagen wir von den einzelnen negativen Größen $-a^4$ und $-a^2$; im dritten Falle erhält sonach der Werth (2) von x die Form $\frac{-(b-d)}{-(c-a)}$, was sich auf $\frac{b-d}{c-a}$ reducirt, wie es sein soll (3).

§. 17. Diese Uebereinkunft, die keine Schwierigkeit mit sich führt, vereinigt demnach alle Fälle in der Formel (2). Dabei darf man aber nicht vergessen, die isolirten negativen Größen $-k$, $-\frac{m}{n}$ blos als Resultate der Uebereinkunft, als Symbole (Sinnbilder) zu betrachten, die keine eigentliche Existenz durch sich selbst haben; sie werden nur in einer bestimmten Annahme gebraucht, bei der man sicher ist, einen wichtigen Zweck zu erreichen, ohne daß irgend eine Schwierigkeit dadurch entstände. In der That kann nur eins von beiden Dingen statt finden, nämlich: entweder hat das Resultat das Zeichen $-$ oder es hat das Zeichen $+$. Im ersten Falle schließt man, daß das Problem ungereimt sei, das Zeichen $-$ ist nur das Symbol, das eine solche Ungereimtheit andeutet. Was den zweiten Fall anlangt, so ist bewiesen, daß das Zeichen dasjenige ist, welches es sein soll, obschon es aus der Division zweier negativen Größen herrührt. Hieraus entnehmen wir Folgendes:

1) Man darf sämmtliche Zeichen einer Gleichung ändern, sie auch mit einer negativen Größe multipliciren. Im ersten unserer drei Fälle wird die vorige richtige Gleichung zwar dadurch in eine ungereimte verwandelt; die nachherige Division der negativen Größen bringt jedoch die Dinge wieder auf ihren anfänglichen Zustand zurück. Im zweiten Falle wird die Ungereimtheit der Aufgabe abermals durch einen

negativen Werth angedeutet. Im dritten Fall endlich hebt die Zeichenänderung den Fehler der Rechnung auf.

2) Ist die Gleichung ungereimt, so kann man doch von der im zweiten Falle erhaltenen negativen Auflösung Gebrauch machen. Denn setzt man $-x$ anstatt x, so geht die vorgelegte Gleichung in $-ax+b=-cx+d$ über, woraus $x=\frac{b-d}{a-c}$, ein Werth, der dem Werthe (2) gleichgeltend, aber positiv ist. Wird demnach die Aufgabe in der Art modifizirt, daß die Gleichung ihr genüge, so wird diese anders gestellte Aufgabe, die mit der ersten eine nicht zu verkennende Aehnlichkeit hat, nicht mehr ungereimt sein, und abgesehen vom Zeichen einerlei Auflösung zulassen.

Um die Sache mehr aufzuklären, wollen wir die Aufgabe V vornehmen, und zwar soll sie nun so abgefaßt sein. Ein Vater ist jetzt 42 Jahre, sein Sohn 12 Jahre alt, in wie viel Jahren beträgt das Alter des Vaters das Vierfache von dem des Sohnes? Man hat die Gleichung $42+x=4\,(12+x)$, woraus $x=-2$; das Problem ist demnach ungereimt. Setzt man aber $-x$ statt x, so wird die Gleichung $42-x=4\,(12-x)$; die entsprechende Bedingung ändert die Aufgabe in folgende um: Ein Vater ist jetzt 42 Jahre, sein Sohn 12 Jahre alt; vor wie viel Jahren war der Vater viermal so alt als der Sohn? Man erhält $x=2$.

Eine Zahl zu finden, die durch a dividirt, s als Summe des Dividends, des Divisors und des Quotienten gibt. Man hat die Gleichung $a+x+\frac{x}{a}=s$, woraus $x=\frac{a\,(s-a)}{a+1}$. Wenn $a>s$, so ist x negativ und die Aufgabe ungereimt, was übrigens leicht vorauszusehen war. Z. B. $a=11$, $s=5$ geben $x=-5\frac{1}{2}$. Verwandelt man in der Gleichung aber x in $-x$, so findet man $11-x-\frac{1}{11}x=5$; hiernach ist $x=5\frac{1}{2}$ diejenige Zahl, die sammt ihrem eilften Theile von 11 abgezogen 5 als Rest läßt. Nach dieser Aussage hört die Aufgabe auf, ungereimt zu sein.

Eine Zahl zu finden, deren dritter und fünfter Theil zusammen addirt und um 7 verringert, die Zahl selbst als Rest geben. Man hat $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x-7=x$; woraus $x=-15$. Die Aufgabe ist ungereimt, wird aber $-x$ anstatt x gesetzt (oder vielmehr -7 anstatt $+7$), so findet man, daß 15 diejenige Zahl ist, deren dritter und fünfter Theil, zu 7 addirt, 15 geben.

§. 18. Die Gleichung bietet noch zwei sonderbare Fälle dar. Ist $a = c$, so hat man $x = \frac{d - b}{o}$; bei dieser Annahme geht aber die vorgelegte Gleichung in $ax + b = ax + d$ über, woraus $b = d$. So lange nun b von d sich unterscheidet, ist das Problem absurd; eine ähnliche Modification wie oben ist hier nicht zuläßig. Der Bruch $\frac{m}{n}$ wird größer in dem Maße, als n abnimmt; für $n = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, werden die Quotienten, bei demselben Werthe von m, 2, 100, 1000 mal größer. Die Grenze ist das Unendliche, das dem Werthe $n = o$ entspricht. Die Aufgabe ist also unmöglich, wenn die Auflösung einen unendlichen Werth hat; man drückt dies durch das Zeichen $x = \infty$ aus.

Hat man aber $a = c$ und $b = d$, so ist $x = \frac{o}{o}$, die vorgelegte Gleichung wird alsdann $ax + b = ax + b$. Beide Seiten sind einerlei, welchen Werth auch x haben mag, das ganz und gar willkührlich ist. Das Problem ist unbestimmt oder läßt eine unendliche Anzahl von Auflösungen zu, wenn man $x = \frac{o}{o}$ findet.

Gleichungen vom ersten Grade mit mehrern Unbekannten.

§. 19. Hat man mehrere Unbekannte und eben so viele Gleichungen, um den Werth jener gesuchten Größen zu finden, so kann man auf verschiedene Art operiren.

I. Man suche aus jeder Gleichung den Werth einer der Unbekannten, als wenn alles Uebrige bekannt wäre; setze die gefundenen Werthe nach einander gleich, und bilde eben so viel Gleichungen weniger eins, als anfänglich da waren. Indem man mit diesen neuen Gleichungen eben so verfährt, wird jedesmal eine unbekannte Größe weggeschafft oder eliminirt. Hat man dann den Werth der letzten Unbekannten bestimmt, so geht man nach und nach wieder zurück, um den Werth der übrigen Unbekannten zu finden.

Man suche z. B. die Werthe aus folgenden zwei Gleichungen:

$$5x - 3y = 1,\ 7y - 4x = 13.$$

Aus der ersten folgt $x = \frac{3y + 1}{5}$,

aus der zweiten .... $x = \frac{7y - 13}{4}$.

Setzt man diese zwei Werthe einander gleich, so hat man $\frac{3y+1}{5} = \frac{7y-13}{4}$, eine Gleichung, die nur eine Unbekannte enthält. Man zieht aus ihr folgende: $12y + 4 = 35y - 65$; dann $35y - 12y = 65 + 4$; oder $23y = 69$; endlich $y = 3$. Geht man zu dem ersten Werthe von x zurück, so erhält man $x = \frac{3 \cdot 3 + 1}{5} = 2$.

Aehnlicherweise werden die drei Gleichungen

$$2x + 5y - 3z = 3,$$
$$3x - 4y + z = -2,$$
$$5x - y + 2z = 9,$$

geben $z = \frac{2x + 5y - 3}{3} = 4y - 3x - 2 = \frac{9 + y - 5x}{2}$.

Werden die Nenner weggeschafft, so finden wir:

$$2x + 5y - 3 = 12y - 9x - 6,$$
$$8y - 6x - 4 = 9 + y - 5x,$$

oder $7y - 11x = 3$, $7y - x = 13$.

Hieraus ziehen wir $7y = 3 + 11x = 13 + x$; woraus $x = 1$. Gehen wir auf die obigen Werthe von y und z zurück, so erhalten wir endlich $y = \frac{3 + 11}{7} = 2$, $z = \frac{2 + 2 \cdot 5 - 3}{3} = 3$.

Anmerkung. Manche nennen diese Methode des Gleichsetzens auch die Comparations-Methode.

II. Die Substitutions-Methode besteht darin, daß man wie vorhin, den Werth einer der Unbekannten sucht, und diesen Werth für jene Unbekannte in den andern Gleichungen substituirt. Man erhält so eine Gleichung und eine Unbekannte weniger; dieses Verfahren wird so weiter fortgesetzt.

Es seien die Gleichungen $3x + 2y = 12$, $2z + y = 5$, $x + y + 3z = 8$ gegeben. Die zweite gibt $y = 5 - 2z$; wird dieser Werth in die übrigen substituirt, so kommt $3x - 4z = 2$, $x + z = 3$.

Die letztern Gleichungen geben $z = 1$ und $x = 2$; woraus $y = 3$.

III. Die erste Methode, obgleich einfacher als die übrigen, wendet man, wegen ihrer Länge, selten an. Die zweite Methode wird in denjenigen Fällen nur angewandt, wo die Unbekannten nicht alle in

den Gleichungen vorkommen. Wir gehen nun zu einer dritten Methode, die am häufigsten gebraucht wird, über.

Es seien die zwei Gleichungen gegeben:

$$ax + by = c,\ a'x + b'y = c' \ldots . (A).$$

Wir nehmen $a = a'$ an. Die unbekannte Größe x wird verschwinden, wenn wir die Gleichungen von einander abziehen. Hätten a und a' verschiedene Zeichen, so wird man, um zu demselben Zwecke zu gelangen, die Gleichungen addiren. Sind a und a' nicht einander gleich, so multiplicirt man die erste Gleichung mit a', die zweite mit a, um die verlangte Bedingung zu erfüllen: aa' ist alsdann der gemeinschaftliche Coefficient von x.

Anmerkung. Haben a und a' gemeinsame Factoren, so nimmt man zu den respektiven Multiplicatoren bloß die nicht gemeinsamen Factoren von a und a', wie solches bei der Reduktion auf einen gemeinschaftlichen Nenner geschieht.

Werden die multiplicirten Gleichungen von einander abgezogen, so erhält man $a'by - ab'y = a'c - ac'$.

Wir eliminiren eben so y, d. h. wir multipliciren die erste Gleichung mit b', die zweite mit b, ziehen dann die Produkte von einander ab, woraus $a'bx - ab'x = bc' - b'c$.

Wir haben folglich als Endresultat:

$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'},\ y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \ldots (B).$$

Anmerkung. Diese Additions- oder Subtractions-Methode nennt man vorzugsweise die Elimination.

§. 20. Behandeln wir eben so die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \end{aligned}\right\} (C),$$

welche die allgemeinen Gleichungen mit 3 Unbekannten darstellen, so würden wir die Werthe von x, y und z finden. Um das Bildungsgesetz der Resultate zu entdecken, wollen wir die Rechnung etwas abändern und sie wie folgt ausführen. Wir multipliciren die erste Gleichung mit k, die zweite mit k', addiren die Produkte und ziehen dann die dritte ab, wir erhalten:

$$(ka + k'a' - a'')\,x + (kb + k'b' - b'')y$$
$$+ (kc + k'c' - c'')\,z = kd + k'd' - d''.$$

Die beliebigen Größen k und k' bestimmen wir so, daß in dem Resultate zwei Unbekannte, z. B. y und z, verschwinden. Wir setzen deshalb die Gleichungen:

$$kb + k'b' = b'', \; kc + k'c' = c'' \; \ldots . (D);$$

sie lehren uns k und k' kennen.

Wir haben auf diese Weise $x = \dfrac{kd + k'd' - d''}{ka + k'a' - a''} \ldots . (E).$

Wir müssen nun k und k' bestimmen und ihre Werthe dann in die letzte Gleichung einführen; die Rechnung läßt sich jedoch bedeutend vereinfachen. Vertauscht man nämlich a, a', a'' bezüglich mit d, d', d'', so wird der Zähler von x aus dem Nenner abgeleitet. Da nun k und k' von diesen Größen unabhängig sind, so wird dasselbe nach der Substitution der Werthe von k und k' gleichfalls noch statt finden.

Es handelt sich folglich darum, den Nenner zu bestimmen, da durch eine einfache Vertauschung von a mit d der Zähler abgeleitet werden kann. Die Formeln (B) auf die Gleichungen (D) angewandt geben

$$k = \frac{b'c'' - c'b''}{cb' - bc'}, \; k' = \frac{cb'' - bc''}{cb' - bc'};$$

woraus $ka + k'a' - a'' = \dfrac{a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'')}{cb' - bc'} - a''.$

Reduciren wir auf einerlei Nenner, und lassen solchen weg, da er beiden Gliedern des Bruches (E) gemeinschaftlich ist, so finden wir folgenden Werth für den gesuchten Nenner:

$$K = a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb').$$

Betrachten wir die hier auszuführenden Multiplicationen mit Aufmerksamkeit, so bemerken wir, daß die Rechnung sich auf folgende Operationen reducirt. Man nimmt die Differenz $bc - cb$ zwischen den beiden Versetzungen der Buchstaben b und c, läßt darauf den Buchstaben a, auf der linken Seite anfangend, durch alle Stellen gehen, mit der Vorsicht, bei dem Stellenwechsel jedesmal die Zeichen zu verändern; $+bc$ erzeugt so $+abc$, $-bac$ und $+bca$; $-cb$ so $-acb$, $+cab$ und $-cba$.

Man vereinigt endlich diese sechs Glieder, bezeichnet dabei den zweiten Buchstaben mit einem Accent, und den dritten mit zwei, und findet so

$$ab'c'' - ba'c'' + bc'a'' - ac'b'' + ca'b'' - cb'a'',$$

ein Resultat, welches mit K einerlei ist.

Um y zu finden, wird man ähnlicherweise in der obenstehenden Gleichung die Coefficienten von x und z = Null setzen; die Symmetrie der Rechnung zeigt aber, daß es hinreichend ist, in dem Werthe von x, b mit a zu vertauschen. Für den Werth von z werden c und a unter sich vertauscht.

Hieraus folgern wir erstens, daß der Nenner der Werthe von x, y und z derselbe ist; zweitens daß man den Zähler für jede Unbekannte aus dem Nenner dadurch ableitet, indem man die Coefficienten dieser Unbekannten gegen die ganz bekannten Glieder vertauscht.

Die gesuchten Werthe erhalten sonach folgende Formen:

$$x = \frac{db'c'' - bd'c'' + bc'd'' - dc'b'' + cd'b'' - cb'd''}{K},$$

$$y = \frac{ad'c'' - da'c'' + dc'a'' - ac'd'' + ca'd'' - cd'a''}{K},$$

$$z = \frac{ab'd'' - ba'd'' + bd'a'' - ad'b'' + da'b'' - db'a''}{K},$$

Das hier gezeigte Bildungsgesetz folgt unmittelbar aus der Rechnung selbst. Für vier Unbekannte mit vier Gleichungen

$$ax+by+cz+dt=f,\quad a'x+b'y+c'z+d't=f', \text{ u. s. w.,}$$

ist es blos nöthig, den Nenner zu suchen; jeder Zähler wird alsdann aus dem Nenner abgeleitet. Die Bildungsweise des Nenners ist die hier oben angegebene. Man nimmt also die sechs Versetzungen der Buchstaben abc des oben stehenden Nenners mit Hinweglassung der Accente, oder die sechs Produkte $abc - bac + bca - acb + cab - cba$; führt alsdann den Buchstaben d in jedes dieser Glieder ein, wobei man ihn, auf der linken Seite anfangend, nach und nach alle Stellen einnehmen läßt, mit der Vorsicht, bei einem solchen Stellenwechsel von d jedesmal die Zeichen zu verändern; endlich gibt man jedem zweiten Buchstaben einen Accent, dem dritten zwei und dem vierten drei Accente. Der gemeinschaftliche Nenner hat demnach die Form: $da'b''c''' - ad'b''c''' + ab'd''c''' - ab'c''d''' - db'a''c''' + bd'a''c''' -$ ꝛc.

Anmerkung. Der Ausdruck des gedachten Nenners für vier Unbekannte mit vier Gleichungen wird aus 24 Gliedern, der für fünf Unbekannte aus 120, der für sechs Unbekannte aus 720 Gliedern bestehen u. s. w., so daß für n Unbekannte mit n Gleichungen der Werthausdruck jeder Unbekannten im Zähler und Nenner $1.2.3\ldots(n-1).n$ Glieder enthalten wird.

Diese Methode, die Gleichungen mit unbestimmten Factoren zu multipliciren, um alle Unbekannten weniger eine mit einem mal zu eliminiren, rührt von Bezout her.

Wir geben hier einige Aufgaben:

I. Eine Person hat Rechenpfennige in Händen; nimmt sie einen davon aus der rechten in die linke Hand, so hat sie in beiden gleich viel. Nimmt sie aber zwei aus der linken in die rechte Hand, so hat sie in der letzten doppelt so viel als in der andern. Wie viel Rechenpfennige hatte die Person in jeder Hand?

Man findet $x - 1 = y + 1$, und $x + 2 = 2(y - 2)$; woraus $x = 10$ und $y = 8$.

II. Jemand kauft drei Edelsteine; der Preis des ersten plus der Hälfte des Preises der beiden andern macht 25 Louisd'or; der Preis des zweiten plus dem Drittel des Preises der andern beträgt 26 Louisd'or; endlich macht der Preis des dritten plus der Hälfte des Preises der übrigen 29 Louisd'or. Wie theuer ist jeder Edelstein?

Man hat $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 25$; $y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 26$; $z + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 29$; woraus $x = 8$, $y = 18$, $z = 16$.

III. A, B, C haben eine gewisse Anzahl Thalerstücke; gibt A von seinen Thalern an B und C so viel, als jeder schon hat; dann gibt B von den seinigen an A so viel, als derselbe übrig behalten, und so viel an C, als derselbe jetzt in Händen hat; endlich gibt C gleichfalls von B und C ab und zwar jedem so viel, als dieser eben hat. Es stellt sich nun heraus, daß sie sämmtlich gleich viel haben, nämlich jeder 16 Thaler. Wie viel hatte jeder anfänglich? Bezeichnen x, y und z die Zahl der Thaler des A, B und C vor diesen Vertheilungen, so findet man die drei Gleichungen: $x - y - z = 4$, $3y - x - z = 8$, $7z - x - y = 16$; woraus: $x = 26$, $y = 14$, $z = 8$.

IV. Drei Zahlen aus folgenden Angaben zu finden: Wenn zur Hälfte der zweiten drei Viertel der dritten plus 31,4 addirt werden, so ist die Summe gleich der ersten; wird zur ersten die Hälfte der dritten plus 9,5 addirt, so ist die Summe gleich der zweiten; wird aber von der zweiten die Hälfte der ersten sammt 158,5 abgezogen, so ist die Differenz gleich der dritten. Wird die erste Zahl durch x, die zweite durch y, die dritte durch z dargestellt, so haben wir die drei Gleichungen:

$x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z + 31{,}4$; $y = x + \frac{1}{2}z + 9{,}5$; $z = y - \frac{1}{2}x - 158{,}5$. Hieraus finden wir $x = 523{,}7$; $y = 646{,}05$; $z = 225{,}7$.

§. 21. Es kommt zuweilen vor, daß eine Gleichung nur dadurch existiren kann, daß sie sich in zwei andere abtheilt. Z. B. $x^2 + y^2 = 0$ gibt $x = 0$ und $y = 0$, weil zwei positive Quadrate sich nicht gegenseitig aufheben und die Summe Null machen können. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$ liefert eben so $x = 1$ und $y = 2$. Obschon hier der Form nach eine einzige Gleichung vorlag, so waren im Grunde genommen doch deren zwei vorhanden. Ganz dasselbe gilt von folgender Aufgabe, die nur eine einzige Bedingung enthält. Zwei Zahlen sollen aus folgenden Eigenschaften berechnet werden. Wird zu dem Quadrate der einen und dem fünffachen Quadrate der andern 9 addirt, so ist das Resultat dem Produkte aus dem Doppelten der zweiten Zahl mit dem um 3 vermehrten Zweifachen der ersten Zahl gleich. Man hat

$5x^2 + y^2 + 9 = 2x(2y+3)$, oder
$4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 - 6x + 9 = 0$, oder
$(2x-y)^2 + (x-3)^2 = 0$; folglich $2x - y = 0$, und $x - 3 = 0$; mithin $x = 3$, und $y = 6$.

Aus ähnlichen Gründen ist die Gleichung $x^2 + y^2 + 1 = 0$ unmöglich.

§. 22. Wir führen jetzt einen sehr merkwürdigen Fall vor, wo die Gleichung in zwei andere zerfällt.

Wir nehmen an, daß die Gleichung $A + \alpha = B + \beta$ die Verbindungsweise der Elemente einer Aufgabe ausdrückt, daß ferner mehrere dieser Elemente zugleich veränderlich sind, dabei aber jene Gleichung in allen möglichen Zuständen ihrer Größe bestehen soll; daß endlich einige Glieder A, B beständig bleiben, während die andern α, β veränderlich sind, und zugleich so klein werden können, als man nur will. Unter solchen Voraussetzungen zerfällt unsere Gleichung in zwei andere, nämlich in eine $A = B$, wo die beständigen Glieder vorkommen, und in eine zweite $\alpha = \beta$, in welchen die veränderlichen Glieder eintreten, und die für alle Werthe von α und β statt finden wird. In der That wäre A und B ungleich, so hätte man $A - B = \pm K$, wo K ihren Unterschied bezeichnet; hieraus $\beta - \alpha = \pm K$; die veränderlichen Größen β und α hätten folglich eine bestimmte

Differenz K, würden mithin nicht kleiner als K werden können, was gegen die Annahme ist.

Auf diesem Prinzip beruht die Methode der Grenzen, von der wir in der Folge häufig Gebrauch machen werden. Kann eine veränderliche Größe $A-\alpha$ einer andern bestimmten unveränderlichen Größe A so nahe kommen, daß ihr Unterschied α kleiner als irgend eine gegebene Größe sei, ohne daß sie jedoch jemals vollkommen gleich werden, so wird die zweite A eine **Grenze** der ersten $A-\alpha$ genannt. Uebrigens thut man wohl daran, bei jedesmaliger Anwendung dieses Satzes die obenangeführte Schlußreihe zu wiederholen, um dadurch die erforderliche Klarheit in die Resultate zu bringen; wir ersuchen den Leser, diesem Rathe Folge zu leisten, wovon er den Nutzen einsehen wird. Wir geben nun über diesen Satz ein Paar Anwendungen, die ganz geeignet sind, den Gang der Rechnung und des Raisonnements zu zeigen.

I. Es seien $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ zwei incommensurable Größen, z und t ihre Näherungswerthe, x und y die Differenzen zwischen diesen Werthen und den Wurzelgrößen. Man hat also $z=\sqrt{a}-x$; $t=\sqrt{b}-y$. Nun sind die rationalen Produkte $z\times t$ und $t\times z$ einander gleich, folglich $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\pm\alpha=\sqrt{b}\times\sqrt{a}\pm\beta$, wo α und β sämmtliche Glieder darstellen, in denen x und y als Factoren vorkommen. Setzt man die Annäherung immer weiter fort, so nehmen die Fehler x und y stets ab, und dies um so viel, als man nur immer will, wobei übrigens die Gleichung nicht aufhört statt zu finden; die Factoren $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ bleiben unveränderlich, während α und β fortwährend abnehmen. Die Gleichung zerfällt demnach in zwei andere: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{b}\times\sqrt{a}$, und $\alpha=\beta$; d. h. man kann eben so gut die Ordnung der irrationalen Factoren, als die der rationalen verwechseln.

II. Es werde der Werth S des periodischen Decimalbruchs 0,[54] (Arith. §. 51) verlangt. Wird die Periode nur zweimal genommen und durch k der Werth der vernachlässigten Brüche dargestellt, so hat man $S-k=0{,}5454$. Wird mit 100 multiplicirt, so kommt $100\,S-100\,k=54{,}54$, und, beide Gleichungen von einander abgezogen, $99\,S-99\,k=54-\frac{54}{10000}$. Hätte man aber drei- oder viermal die Periode genommen, so würde das letzte Glied $\frac{54}{(100)^3}$ oder $\frac{54}{(100)^4}$ gewor-

den sein; man sieht also, daß dieses Glied und der Fehler k immer kleiner und kleiner werden können, wenn man eine größere Anzahlmal die Periode nimmt. Unsere letzte Gleichung läßt sich folglich auf die Form $99\,S - \alpha = 54 - \beta$ bringen, woraus $99\,S = 54$ und $S = \frac{54}{99}$, was wir schon wußten. Ueberdem hat man $\alpha = \beta$, welches auch die in Betracht gezogene Anzahl der Perioden sein mochte. In der That nimmt man zweimal die Periode, z. B. $k = 0{,}0000(54)$, woraus $100^2\,k = 0{,}[54] = \frac{54}{99}$ und $99\,k = \frac{54}{10000}$, oder $\alpha = \beta$.

Es sei $S = 0{,}(p)$, wo die Periode p aus n Ziffern besteht; man hat $10^n\,S = p{,}(p)$, und ähnlich wie vorhin $(10^n - 1)\,S = p$, woraus

$$S = \frac{p}{10^n - 1} = \frac{p}{999\ldots} \quad \text{(Arith. §. 53.)}$$

§. 23. Die Formeln (B) bieten einige sonderbare Fälle dar, die wir näher untersuchen wollen. So lange die Werthe von x und y positiv sind, ergibt sich die Auflösung aus den Formeln; es entsteht weder Zweifel noch Schwierigkeit. Es kann aber auch anders sein, und dies führt auf drei Ausnahmen unserer Gleichungen (B).

1) x oder y kann negativ sein; die Aufgabe ist alsdann unter der gegebenen Form ungereimt, man kann sie aber mittelst einer einfachen Modification, die darin besteht, das Zeichen dieser Unbekannten in den Gleichungen (A) zu ändern, möglich machen. Die Rechnung bringt in der That die Aufgabe auf nur eine Unbekannte zurück, worauf das in §. 16 Gesagte seine Anwendung findet.

2) Wenn die Formeln unendlich sind, so haben die Coefficienten solche numerische Werthe, aus denen $a'b - ab' = 0$, oder $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ sich ergibt. Um die Natur der Aufgabe hier besser zu erkennen, müssen wir diese Bedingung in die Gleichungen (A) einführen. Setzen wir deshalb $\frac{ab'}{b}$ anstatt a', so wird die zweite dadurch $\frac{ab'}{b}\,x + b'y = c'$; im gegenwärtigen Falle sind also die vorgelegten Gleichungen $ax + by = c$, $b'(ax + by) = bc'$.

Sie stimmen aber nur in so fern überein, als $b'c = bc'$, oder $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. Diese Relation kann nun statt finden, oder sie kann es nicht; im letztern Fall ist das Problem unmöglich, weil die Bedingungen der Aufgabe im Widerspruche stehen; dieser Umstand wird

durch die unendlichen Werthe von x und y angedeutet. Die Coefficienten bilden alsdann eine Proportion $a : a' = b : b'$, an welche das Verhältniß der bekannten Glieder c und c' sich nicht anknüpfen läßt.

3) Hat man aber ausser der Relation, welche den Nenner Null macht, oder ausser der Gleichung $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ auch noch die Gleichung $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, so sind die beiden Gleichungen (A) einerlei, die beiden Bedingungen der Aufgabe drücken ein und dasselbe aus. Man hat also nur eine Gleichung und zwei Unbekannte, die Aufgabe ist folglich unbestimmt. Solches ereignet sich, wenn die Coefficienten der Gleichungen drei unter sich gleiche Verhältnisse $a : a' = b : b' = c : c'$ bilden; dieser Fall wird durch die Werthe von x und y unter der Form $\frac{0}{0}$ zur Evidenz gebracht.

$A \quad d \quad B \qquad\qquad C \quad k \quad D \quad D' \quad k \quad C'$

Als Erläuterungs-Beispiel wählen wir folgende Aufgabe: Zwei Boten gehen zur nämlichen Zeit, der eine von A, der andere von B aus, in einer und derselben Richtung AC; der erste macht m Kilometer, der zweite n Kilometer in einer Stunde; die anfängliche Entfernung ist $AB = d$. Wir wollen die Zeit aufsuchen, in welchen die Boten in einer Entfernung $CD = k$ von einander abstehen. A macht den Weg $AC = x$ in einer durch $\frac{x}{m}$ angegebenen Zeit; eben so macht B den Weg $BD = y$ in einer durch $\frac{y}{n}$ angedeuteten Zeit. Sind die Boten gleichzeitig der eine in C, der andere in D, so ist $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ woraus $nx = my$. Auf der andern Seite aber $AD = x + k = y + d$. Die Elimination gibt $x = \frac{m(d-k)}{m-n}$, $y = \frac{n(d-k)}{m-n}$; die dazu erforderliche Stundenzahl ist $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{d-k}{m-n}$. — Macht man $k = 0$, so hat man den Ort und die Zeit des Zusammentreffens beider Boten.

Die Boten werden jedoch abermals um k von einander entfernt sein, nachdem A an B vorbeigegangen ist; alsdann hat der eine den Weg $AC' = x$, der andere den Weg $BD' = y$ zurückgelegt, und es ist $x - k = y + d$. Man hat also nur nöthig, eine Zeichenänderung

mit k in unsern Gleichungen vorzunehmen. Es ist dies eine zweite Auflösung der Aufgabe.

Um die Aufgabe allgemeiner zu machen, wollen wir annehmen, daß die Boten schon seit einiger Zeit unterwegs sind und A und B Trefforte darstellen. Ist dann der Werth von y negativ, was bei $m < n$ und $d > k$ statt findet, so zeigt dies an, daß der Ort des zweiten Boten links von B gelegen ist, im Falle seine Entfernung vom ersten k beträgt; dieser Moment geht der Ankunft in B vorher.

Gehen die Boten in entgegengesetzter Richtung, so reicht es hin, n und y negativ zu nehmen, wovon man sich auf direkte Weise überzeugen kann. — Man sehe in der ebenen Trigonometrie, was wir dort über den Gebrauch der negativen Zeichen sagen werden.

Wenn $m = n$, so sind x und y unendlich, und das Problem ist unmöglich; es rührt dies daher, daß die Boten bei gleicher Geschwindigkeit die vorgeschriebene Bedingung nicht erfüllen können. Ist überdem $A = k$, so sind x und y $\frac{0}{0}$, und es gibt unendlich viele Trefforte. In der That ändert sich die Entfernung der von einem und demselben Orte ausgegangenen Boten nicht.

Von den Ungleichheiten.

§. 24. Die Ausdrücke, in denen das Zeichen $>$ vorkömmt, um anzudeuten, daß eine Anzahl größer als eine andere ist, sind Ungleichheiten. Da die Differenz, wenn man die nämliche Zahl addirt und abzieht, dieselbe bleibt, so darf man auf beiden Seiten einer Ungleichheit Gleiches addiren oder subtrahiren, ohne sie zu ändern, folglich sie auch den nämlichen Rechnungen, wie die Gleichungen (§. 14) unterwerfen; d. h. sämmtliche Glieder mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren, und irgend ein Glied auf die andere Seite mit entgegengesetztem Zeichen bringen. — Es sei $3x - 7 > x + 11$. Wird auf beiden Seiten 7 addirt und x abgezogen, so kommt $3x - x > 11 + 7$, oder $2x > 18$, woraus $x > 9$. Die Aufgabe, eine Zahl von solcher Beschaffenheit zu finden, daß ihr dreifaches Produkt um 7 verringert die Zahl plus 11 übertreffe, hat demnach unendlich viele Auflösungen, weil jede Zahl, die größer als 9 ist, ihr Genüge thut.

Jede der verschiedenen Ungleichheiten, die x enthalten, bestimmt eine Grenze dieser Unbekannten; sind nun dergleichen Grenzen in einem und demselben Sinne genommen; d. h. z. B. $x > 9$ und $x > 7$, so ist

die Berücksichtigung einer einzigen dieser Ungleichheiten ausreichend. Finden dagegen derlei Grenzen in entgegengesetztem Sinne statt, d. h. z. B. $x > 9$ und $x < 15$, so gelten für x nur die dazwischen liegenden Werthe. Es können dergleichen Grenzen sogar einander gegenseitig ausschließen, wie z. B. $x > 4$ und $x < 3$; das Problem ist alsdann unmöglich und enthält Bedingungen, die sich widersprechend sind. — Eine Zahl größer als 15 von solcher Beschaffenheit zu finden, daß ihr Dreifaches plus 1 kleiner als ihr Doppeltes $+ 20$ sei; daß überdies, wenn von der Zahl 1 abgezogen und zu ihr 3 addirt wird, der Quotient der Differenz durch die Summe den Bruch $\frac{4}{5}$ übertreffe. Diese Bedingungen werden folgendermaßen geschrieben: $x > 15$, $3x + 1 < 2x + 20$, $\frac{x-1}{x+3} > \frac{4}{5}$.

Wir ziehen hieraus $x > 15$, $x < 19$ und $x > 17$. Da die Zahl zwischen 17 und 19 liegt, so ist die erste der gegebenen Bedingungen überflüssig: für x kann man also nehmen $17\frac{1}{2}$, $17\frac{2}{3}$...., und eine unendliche Anzahl anderer Werthe. Soll x aber eine ganze Zahl sein, so läßt das Problem nur eine Auflösung zu, nämlich $x = 18$.

§. 25. Hat man $a < b$ und $a' < b'$, so folgt offenbar hieraus

$$a + a' < b + b', \quad a - b' < b - a', \quad aa' < bb',$$

$$\frac{a}{b'} < \frac{b}{a'}, \quad a^n < b^n, \quad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b};$$

man kann also zwei Ungleichheiten, bei denen die Zeichen des Ungleichseins in demselben Sinne genommen sind, Glied für Glied addiren und multipliciren; man kann ferner mit einer Ungleichheit eine Potenzerhebung und eine Wurzelausziehung vornehmen, dieselben Zeichen des Ungleichseins werden in den Resultaten beibehalten; man kann endlich zwei Ungleichheiten, bei denen die Zeichen in umgekehrtem Sinne genommen sind, Glied für Glied subtrahiren und dividiren, im Resultate wird dasjenige Zeichen, welches dem Minuend und Dividend angehört, beibehalten.

Der Ausdruck a nicht $> b$, welcher andeutet, daß a nicht größer als b sein darf, wird öfters auch folgendermaßen geschrieben: $a \stackrel{=}{<} b$; er ist denselben Regeln wie die einfachen Ungleichheiten unterworfen. Welche Zahl z. B. ist es, deren Dreifaches, um 2 vermindert, nicht kleiner als 7 sein, und deren Zehnfaches weniger 1 nicht das Sechsfache

der Zahl plus 11 übersteigen soll. Diese Bedingungen werden folgendermaßen geschrieben:

$$3x - 2 \overset{=}{>} 7,\ 10x - 1 \overset{=}{<} 11 + 6x, \text{ woraus}$$
$$3x \overset{=}{>} 7 + 2,\ 10x - 6x \overset{=}{<} 11 + 1;$$

also $x =$ oder > 3, und $x =$ oder < 3, oder vielmehr $x = 3$.

§. 26. Wir schließen mit einer wichtigen Bemerkung. Lassen wir x in dem Ausdrucke $a - x$ sich ändern. In dem Maße als x wächst und sich a nähert, nimmt $a - x$, welches positiv ist, ab, und wird endlich Null, wenn $x = a$; fährt x zu wachsen fort, so wird $a - x$ negativ. Wir wollen diese Umstände dadurch anzeigen, indem wir schreiben $a - x > 0$, so lange $a - x$ positiv ist; und $a - x < 0$, sobald x größer als a ist. Wir wollen hiermit nicht sagen, daß es Größen geben könne, die kleiner als Null seien. Wenn wir aber übereinkommen, dergleichen Ungleichheiten späterhin nach Art der Gleichungen zu behandeln, so wird offenbar die eine $a > x$, die andere $a < x$ geben; es ist dieses also nichts anders als eine bloße Schreibart, um anzuzeigen, daß $a - x$ in dem einen Falle positiv, und im zweiten negativ ist. Wir sehen hiernach die negativen Größen kleiner als Null, und die positiven größer als Null an; es ist dieses eine bloße Uebereinkunft, die geeignet ist, die Rechnung zu vereinfachen.

Da $a - x > 0$ gibt $-x > -a$ und $a > x$, so sieht man, daß die Zeichen sämmtlicher Glieder einer Ungleichheit nur in so fern geändert werden dürfen, als man $>$ in $<$ umändert, und umgekehrt; ohne eine ähnliche Vertauschung eintreten zu lassen, können auch beide Seiten einer Ungleichheit mit einer negativen Größe nicht multiplicirt werden. Es entsteht hierdurch ein wichtiger Unterschied zwischen den Rechnungen, denen die Ungleichheiten unterworfen sind, und denen, welche für die Gleichungen gelten: $1, 2, 3, 4 \ldots$ sind zunehmende Größen, während $-1, -2, -3, -4 \ldots$ abnehmende Größen sind; man hat $4 < 5$ und $-4 > -5$.

Anmerkung. Eine Ungleichheit wird als unverändert geblieben betrachtet, wenn da, wo Größeres stand, auch wieder Größeres steht.
Werden beide Seiten einer Ungleichheit durch gleiches Negatives dividirt, so wird sie umgekehrt; d. h. das Größere steht jetzt da, wo das Kleinere stand.

Unbestimmte Aufgaben.

§. 27. Ist die Zahl der Gleichungen mit der der Unbekannten nicht einerlei, so können zwei Fälle statt finden.

Erster Fall. Sind mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden, so heißt die Aufgabe eine unbestimmte (diophantische) Aufgabe, weil man ganz willkührliche Werthe einigen Unbekannten beilegen kann, bis deren nur so viele übrig bleiben, als Gleichungen vorhanden sind; die Elimination gibt dann die zugehörigen Werthe dieser übrigen Unbekannten. Der Auflösungen, welche den Gleichungen oder dem Probleme Genüge thun, dessen Bedingungen in diesen Gleichungen ausgedrückt sind, werden demnach unzählig viele sein. Wir wollen z. B. zwei Zahlen x und z suchen, deren Summe 70 betrage; wir müssen demnach zwei Zahlen finden, die der einzigen Gleichung $x + z = 70$ Genüge leisten. Aus dieser Gleichung folgt $x = 70 - z$, und es läßt sich x nur bestimmen, wenn z gegeben ist. Setzt man nach und nach 1, 2, $3\frac{1}{2}$.... anstatt z, so findet man $x = 69$, 68, $66\frac{1}{2}$....; folglich entsprechen der aufgestellten Bedingung die Paare 1 und 69, 2 und 68, $3\frac{1}{2}$ und $66\frac{1}{2}$...., und noch eine unzählige Menge theils ganzer, theils gebrochener Zahlen.

Drei Zahlen x, y, z zu finden, deren Summe 105 betrage, und deren Differenzen zwischen je zwei gleich seien. Man hat also $x + y + z = 105$, $x - y = y - z$, d. h. drei Unbekannte und nur zwei Gleichungen. Ziehen wir diese Gleichungen, um x zu eliminiren, von einander ab, so haben wir die vorige Aufgabe wieder; wir haben $y = 35$, woraus $x + z = 70$. Setzen wir nun für z oder x einen beliebigen Werth, so wird die andere mittelst dieser letzten Gleichung bestimmt sein; diese Zahlen sind gleichzeitig mit $y = 35$ die Auflösungen der Aufgabe.

Es sei noch die Gleichung $x^2 - ax = y^2 - ay$ gegeben; aus ihr folgt $x^2 - y^2 + ay - ax = 0$, oder $(x + y)(x - y) - a(x - y) = 0$, oder $(x - y)(x + y - a) = 0$, weil $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ist.

Das Produkt $(x - y)(x + y - a)$ wird Null, wenn einer seiner Factoren es ist; man hat also nach Belieben die Gleichung $x = y$ oder $x = a - y$. Legt man y alle möglichen Werthe bei, so erhält man die Werthe von x, welche allein die Aufgabe befriedigen; es ist hinreichend, daß die zwei Unbekannten gleich seien, oder daß ihre Summe a betrage, was auf unendlich viele Arten geschehen kann.

Die Alligationsrechnung kann an diese Lehre sich anreihen. Wir nehmen an, daß zwei Substanzen mit einander vermischt werden, bei denen keine chemische Einwirkung eintritt. Wenn p und q die Preise der Einheit einer jeden, x und y die Menge der gemischten Einheiten bedeuten, so wird $px + qy$ der Preis und $x + y$ die Quantität der ganzen Mischung sein; der Preis z jeder Einheit der letztern ist also $z = \frac{px + qy}{x + y}$ . . . . (F).

So geben 8 Bouteillen Wein zu 15 Sous, mit 12 Bouteillen Wein zu 10 Sous vermischt, 20 Bouteillen, deren Werth $8 \times 15 + 12 \times 10 = 240$ Sous beträgt; folglich der Preis einer Bouteille $= \frac{240}{20} = 12$ Sous.

4 Kilogr. 0,95 feinhaltigen Goldes werden mit 5 Kilogr. 0,86 feinhaltigen Goldes zusammengeschmolzen; wie viel feinhaltig ist die Mischung? Die obige Formel gibt $z = \frac{4 \times 0{,}95 + 5 \times 0{,}86}{4 + 5} = 0{,}9$.

Anmerkung. Enthält das Gold oder Silber $\frac{1}{10}$ Zusatz, so daß das Uebrige reines Metall ist, so sagt man, das Metall hat 0,9 Feingehalt.

Man drückt gewöhnlich den Feingehalt des Silbers dadurch aus, daß man angibt, wie viel Loth à 18 Gran reines Silber in einer Mark enthalten sind. Darnach ist z. B. 10 löthiges Silber solches, das in der Mark 10 Loth reines Silber und 6 Loth Zusatz enthält. — Den Feingehalt des Goldes drückt man dadurch aus, daß man angibt, wie viel Karat reines Gold in einer Mark zu 24 Karat enthalten sind. Darnach ist 23 karatiges Gold solches, das in der Mark 23 Karat reines Gold und 1 Karat Zusatz enthält. — Der Werth einer Münze wird durch ihren Gehalt an reinem Metalle bestimmt. Das Gewicht einer Münze wird das Schrot, und der Gehalt an reinem Metalle das Korn genannt.

Verlangt man umgekehrt die Quantität der Mischung bei einer gegebenen Qualität derselben, so sucht man die Quantitäten x und y der einzelnen Theile mittelst der bekannten Preise, p, q und z. Die Gleichung (F) enthält dann zwei Unbekannte, das Problem ist demnach unbestimmt. Man hat $x = \left(\frac{z-q}{p-z}\right)y$; die Werthe $x = z - q$, und $y = p - z$ erfüllen die Aufgabe; z liegt übrigens zwischen p und q.

Man kann ausser diesen Werthen unzählig viele andere finden, wenn man die erstern mit einer und derselben beliebigen Zahl multiplicirt.

Ein Bäcker z. B. will Brod zu 8 Kreuzer das Pfund liefern; wie viel Waizenmehl zu 10 Kreuzer, und wie viel Kornmehl zu 7 Kreuzer das Pfund muß er dazu nehmen?

Man schreibt diese drei Zahlen in der hier angegebenen Darstellung; setzt 8—7 oder 1 neben 10, dann 10—8 oder 2 neben 7: der Aufgabe entsprechen so 2 ℔ Kornmehl und 1 ℔ Waizenmehl; desgleichen 4 und 2, 6 und 3, u. s. w.

Mittlerer Preis 8 { 10.... 1 Waizenmehl. / 7.... 2 Kornmehl.

Hat man zur Bestimmung des Problems eine zweite Bedingung, so wird solche in die algebraische Sprache übertragen, darauf zwischen der Gleichung (F) und der neuen die Elimination verrichtet. Wäre z. B. die Quantität $x+y$ der Mischung gegeben und gleich m, so hätte man

$$x+y=m, \text{ und } px+qy=zm;$$

$$\text{woraus } x=\frac{m}{p-q}(z-q),\ y=\frac{m}{p-q}(p-z).$$

Die oben erhaltenen Werthe von x und y werden folglich mit $\frac{m}{p-q}$ multiplicirt. Soll in unserm vorigen Beispiele die Quantität Mehl 21 ℔ betragen, so multiplicirt man die daselbst gefundenen Resultate 1 und 2 mit $\frac{21}{10-7}=7$. 7 ℔ Waizenmehl zu 10 Kreuzer mit 14 ℔ Kornmehl zu 7 Kreuzer das Pfund vermischt, geben hiernach 21 ℔ Mehl zu 8 Kreuzer.

Will man ebenso 7,54 Kilogr. 0,9 feinhaltigen Silbers aus 0,97 und 0,84 feinhaltigem Silber erhalten, so zeigt die Rechnung, daß man 3,48 Kilogr. von der ersten und 4,06 Kilogr. von der zweiten Sorte dazu braucht.

$$0{,}9 \left\{ \begin{array}{l} 09{,}7 \ldots 0{,}06 \times \frac{7{,}54}{0{,}13} = 3{,}48 \\ 0{,}84 \ldots 0{,}07 \times \frac{7{,}54}{0{,}13} = 4{,}06 \end{array} \right.$$

Leicht läßt sich diese Lehre auf den Fall ausdehnen, wo man mehrere Substanzen mit einander vermischen will.

Zweiter Fall. Hat man mehr Gleichungen als Unbekannte, so ist das Problem mehr als bestimmt; d. h. eliminirt man alle Unbe-

kannte, so bleibt unter nur bekannten Größen eine gewisse Anzahl von Gleichungen übrig, welche diese Bekannten erfüllen müssen und die deshalb Bedingungsgleichungen heißen. Werden diese Gleichungen nicht erfüllt, so ist die Aufgabe unmöglich; werden sie aber befriedigt, so fallen einige der gegebenen Bedingungen mit einander zusammen; die Bedingungen sind in gleicher Anzahl mit den Unbekannten vorhanden und werden durch ebenso viele besondere Gleichungen ausgedrückt, auf welche sich die vorgelegten reduciren.

Zwei Zahlen x und y zu finden, deren Summe s, Differenz d und Produkt p sei; man hat also $x+y=s$, $x-y=d$, und $xy=p$. Die zwei ersten Gleichungen geben $x=\frac{1}{2}(s+d)$, $y=\frac{1}{2}(s-d)$. Werden diese Werthe in die dritte Gleichung substituirt, so findet man $4p=s^2-d^2$. Leisten die gegebenen Größen s, d und p dieser Relation kein Genüge, so ist das Problem unmöglich; existirt aber eine solche Relation, so ist eine der gegebenen Gleichungen unnöthig, da sie eine Bedingung ausdrückt, die von selbst statt findet und in den beiden andern enthalten ist.

Welcher Bruch ist es, der so beschaffen ist, daß er sich, wenn zum Zähler m addirt wird, in $\frac{a}{b}$, und wenn m' zum Nenner addirt wird, in $\frac{a'}{b'}$, verwandelt? Sind x und y die beiden Glieder des gesuchten Bruches, so hat man

$$\frac{x+m}{y}=\frac{a}{b} \text{ und } \frac{x}{y+m'}=\frac{a'}{b'}.$$

Die Elimination gibt

$$(ab'-a'b)\ x=a'\ (bm+am'),\ (ab'-a'b)\ y=b\ (b'm+a'm').$$

Da x und y ganze Zahlen sind, so ist $ab'-a'b=\pm 1$, oder dieses Binom ein Theiler der zweiten Glieder. Man hat folglich eine Bedingung zu erfüllen, ohne welche die Aufgabe unmöglich ist, obschon man ebenso viele Gleichungen als Unbekannte hat.

§. 28. Wir wollen sämmtliche ganzzahlige Werthe von x und y finden, die der unbestimmten Gleichung $ax+by=A$.... (1) entsprechen, wo a, b, A gegebene ganze positive oder negative Zahlen bezeichnen. Diese müssen so beschaffen sein, daß die beiden ersten a und b Primzahlen unter sich sind; denn hätten sie einen gemeinschaftlichen Factor d, so würde, indem man Alles durch d dividirte, hieraus

erfolgen, $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{A}{d}$. Da das erste Glied eine ganze Zahl sein soll, so muß eine solche auch das zweite sein, das Problem wäre folglich unmöglich, wenn A nicht durch d theilbar wäre; findet letzteres aber statt, so kann man den gemeinschaftlichen Factor der Gleichung weglassen.

Es sei $x = \alpha$ und $y = \beta$ eine Auflösung der Gleichheit, oder $a\alpha + b\beta = A$; zieht man diese Gleichung von der vorgelegten $ax + by = A$ ab, so kommt $a(x-\alpha) = -b(y-\beta)$; da aber a und b Primzahlen unter sich sind, so muß $y-\beta$ ein Vielfaches von a (Arithmetik §. 25), oder $y-\beta = at$ sein. Durch dieses Mittel haben wir zur Bestimmung von x und y folgende zwei Gleichungen:

$$x = \alpha - bt,\ y = \beta + at \quad \ldots\ldots (2).$$

Werden diese Werthe in die Gleichung (1) eingeführt, so sieht man, daß sie derselben entsprechen, welchen positiven oder negativen Werth die ganze Zahl t auch haben mag. Jene Ausdrücke sind ferner die einzigen, welche eine solche Eigenschaft besitzen; denn sei $x = \alpha'$, $y = \beta'$ eine andere Auflösung, oder $a\alpha' + b\beta' = A$; wird sie von $a\alpha + b\beta = A$ abgezogen, so kommt $a(\alpha' - \alpha) = -b(\beta' - \beta)$; folglich $\beta' - \beta$ ein Vielfaches at von a, woraus $\beta' = \beta + at$, $\alpha' = \alpha - bt$, Werthe, die in der Formel (2) enthalten sind.

Hieraus folgt, daß man aus einer gefundenen Auflösung (α und β) alle übrigen ableiten kann, indem man $t = 0, 1, 2\ldots.$ setzt. Die Werthe von y und die von x bilden also, wie man sieht, zwei arithmetische Progressionen, deren Verhältnisse oder Differenzen die gegenseitigen Coefficienten b und a, der eine mit entgegengesetztem Zeichen genommen, sind. Beide Progressionen werden wachsende sein, wenn a und b verschiedene Zeichen haben, im andern Falle wird die eine eine wachsende, die andere eine abnehmende.

§. 29. Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, eine Auflösung $x = \alpha$ und $y = \beta$ zu finden. Wir wollen $a > b$ annehmen, die Gleichung in Bezug auf y dann auflösen, und die in den Brüchen enthaltenen Ganzen ausziehen; wir werden so haben

$$y = \frac{A - ax}{b} = k - lx + \frac{B - cx}{b},$$

wo k und l die Quotienten, B und c die Reste der Division von A und a durch b sind. Die Aufgabe läuft jetzt darauf hinaus, die Werthe

von x zu finden, die $B-cx$ durch b theilbar machen. Wäre nun $c=1$, so würde, wenn man $\frac{B-x}{b} = z$ setzt, wo z eine ganze Zahl ist, $x = B - bz$ sein, und jeder ganze Werth für z ebenfalls ganze Werthe für x und y geben; man hätte also das Problem gelöst. Wäre hingegen $c > 1$, so setzt man $\frac{B-cx}{b} = z$, wo z abermals eine ganze Zahl ist. Es handelt sich nun darum, die Gleichung $bz + cx = B$, wo $c < b$ durch ganze Zahlen aufzulösen. Man verfährt folglich wie oben, d. h. man löst die Gleichung in Bezug auf x auf, zieht die Ganzen heraus; es wird so kommen

$$x = \frac{B-bz}{c} = k' - l'z + \frac{C-dz}{c},$$

wo k' und l' die Quotienten, C und d die Reste bei der Division von B und b durch c sind. Der letzte Bruch muß eine ganze Zahl u sein; er gibt, wenn $d = 1$, $C-z = cu$, $z = C - cu$, und nimmt man für u nur ganze Zahlen, so wird man auch nur solche für z, x und y finden. Ist aber $d > 1$, so setzt man $\frac{C-dz}{c} = u$, $z = \frac{C-cu}{d}$, u. s. w. Die Coefficienten der successiven Unbekannten z, u, v.... sind offenbar die Reste, welche man bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Theilers von b und a erhält (Arith. §. 23). Da die letzten Größen b und a Primzahlen unter sich sind, so ist man überzeugt, im Endresultate zu einem Coefficienten $= 1$ zu gelangen, was eine Relation von der Form $v + gs = G$ zwischen den Ganzen v und s geben wird. Nimmt man für s ganze Zahlen, so wird man auch die Werthe von v, von u, z, x und y in ganzen Zahlen finden. Man hat also eine Auflösung des Problems gefunden; die Gleichungen (2) finden jetzt ihre Anwendung. Ein Beispiel wird dies erläutern. Die Gleichung $8x - 27y = 7$ gibt $x = \frac{7 + 27y}{8} = 3y + \frac{3y+7}{8}$; man setze $\frac{3y+7}{8} = z$, woraus $y = \frac{8z-7}{3} = 2z - 2 + \frac{2z-1}{3}$; man setze $\frac{2z-1}{3} = u$, woraus $z = \frac{3u+1}{2} = u + \frac{u+1}{2}$; endlich mache man $\frac{u+1}{2} = v$, woraus $u = 2v - 1$. Nimmt man z. B.

$v = 1$, so erhält man $u = 1$, $z = 2$, $y = 3$, $x = 11$: die Formeln (2) werden dann $x = 11 + 27t$, $y = 3 + 8t$. Hätte man für v irgend eine andere ganze Zahl genommen, so würde man zu denselben Werthen gelangen, obgleich sie dem Anschein nach von einander verschieden sind. Nimmt man $v = -3$, so findet man $u = -7$, $z = -10$, $y = -29$, $x = -97$, woraus $x = -97 + 27t$, $y = -29 + 8t$; setzt man aber $t + 4$ anstatt t, so kommt man auf die obigen Werthe wieder zurück. Nimmt man $t = \ldots -2$, $-1, 0, 1, 2\ldots$, so findet man wachsende, nach beiden Richtungen ins Unendliche fortlaufende Progressionen, deren Differenzen 27 und 8 sind, und deren je zwei sich entsprechende Glieder eben so viele Auflösungen der Aufgabe abgeben; andere Auflösungen läßt die Aufgabe nicht zu.

$$x = \ldots -43, -16, 11, 38, 65, 92 \ldots$$
$$y = \ldots -13, -5, 3, 11, 19, 27 \ldots$$

§. 30. Wir wollen sämmtliche Rechnungsoperationen mit Hinweglassung der Raisonnements, auf denen sie beruhen, hier kurz zusammenstellen. Wir erhielten die succesiven Brüche:

$$y = \frac{A - ax}{b}, \; x = \frac{B - bz}{c}, \; z = \frac{C - cu}{d}, \; u = \frac{D - dv}{e} \ldots (M),$$

die sich auf ganze Zahlen reduciren müssen; die Factoren $c, d, e\ldots$ sind, so wie die Größen $B, C, D\ldots$ Reste von Divisionen. Wir bringen diese Größen in nachstehende Darstellung, aus der wir eine leichte Methode zur Auffindung der Werthe von $y, x, z, u, v\ldots$ in ganzen Zahlen ableiten werden.

$$\left.\begin{array}{llllllll} a & b & c & d & e & f & g & \text{rc.} \ldots 1 \\ A & B & C & D & E & F & \text{rc.} \ldots\ldots & 0 \\ y & x & z & u & v & s & \text{rc.} \ldots\ldots & 0 \end{array}\right\} (N).$$

Die erste Linie, welche die Divisoren, Dividenden und Reste bei der Operation des größten gemeinschaftlichen Theilers von a und b (Arith. §. 23) enthält, führt nothwendigerweise auf ein letztes Glied $= 1$. Die zweite Linie wird gebildet wie folgt: setze das zweite Glied A der vorgelegten Gleichung unter a, dividire A durch b, schreibe den Rest B unter b; dividire darauf B durch c, setze C unter c; dividire C durch d u. s. w., dergestalt, daß die Divisoren succesive die nämlichen, als die in der ersten Linie sind. Die Quotienten werden nicht

weiter berücksichtigt, da man sie nicht braucht. — Was die dritte Linie anlangt, so besteht sie aus den Werthen von y, x, z.... in ganzen Zahlen, welche, auf der rechten Seite angefangen, nach den in den Gleichungen (M) enthaltenen Vorschriften gefunden werden. Um also z zu finden, muß man vorerst u berechnet haben, dann den ganzen Quotienten $\frac{C-cu}{d}$ suchen, welchen man unter C schreibt. Alle diese Brüche von einerlei Form reduciren sich auf ganze Zahlen, wenn man auf die Zeichen der Produkte, Differenzen und Reste gehörige Rücksicht nimmt. Man schreibt den Werth β für y unter den Coefficienten a von x, und den für x unter den Coefficienten b von y, und erhält so eine Auflösung der Gleichung (1); diese Werthe werden endlich den Gleichungen (2) gemäß durch die Vielfachen $-bt$ und at vervollständigt.

Man muß bemerken, daß, da der letzte Divisor der ersten Linie 1 ist, der ihm darunter entsprechende Rest Null ist, die zweite Linie sich also damit schließt; der vorhergehende Rest gibt sonach den Werth des letzten ganzen Quotienten. Es sei die Gleichung $328x + 229y = 1741$:

328	229	99	31	6	1
1741	138	39	8	2	0
105	−68	30	−9	2	0
y	x	z	u	v . . .	

Man sucht den gemeinschaftlichen Theiler zwischen den Coefficienten 328 und 229; die successiven Reste geben die Zahlen der ersten Linie. Man schreibt das zweite Glied 1741 unter 328, dividirt durch 229, schreibt den Rest 138 unter diesen Divisor; dividirt 138 durch 99, schreibt den Rest 39 unter 99; dividirt 39 durch 31, schreibt den Rest 8 unter den Divisor 31 u. s. w. Der Rest 2 ist der Werth der letzten Unbekannten; dann sagt man $2 \times 31 = 62$, was von 8 abgezogen -54 gibt; dividirt man -54 durch 6, so ist der Quotient -9 der Werth von u; $-9 \times 99 = -891$ von 39 abgezogen gibt den Rest $+930$; dividirt durch 31 erhält man den Quotienten 30, den Werth von z, u. s. w. zurück. Man findet so $y = 105$, $x = -68$, woraus $y = 105 - 328t$, $x = -68 + 229t$. Für die Gleichung $370x + 153y = 2001$ hat man:

370	153	64	25	14	11	3	2	1
2001	12	12	12	12	1	1	1	0
—103	+48	—20	+8	—4	+4	—1	+1	0
y	x	z	v	u	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. .

Folglich $y = -103 + 370t$, $x = 48 - 153t$.

Vorstehende Rechnungen setzen voraus, daß in der vorgelegten Gleichung sämmtliche Glieder positiv seien; findet solches nicht statt, so nimmt man mit entgegengesetzten Zeichen den Werth derjenigen Unbekannten, deren Coefficient das Zeichen — hat. Auf solche Art erhält man die Auflösung der Gleichung $ax - by = A$, oder $-ax + by = A$, wo A positiv ist. Die Gleichung $370x - 153y = 2001$ gibt hiernach $y = 103 + 370t$, $x = 48 + 153t$.

Wir wollen noch die Gleichung $29x - 47y = 112$ auflösen:

47	29	18	11	7	4	3	1
112	25	7	7	0	0	0	0
—1	+3	—1	+1	0	0	0	0
x	y	z	u	v			

Die letzte Unbekannte ist Null; dasselbe gilt auch von den vorhergehenden bis auf $v = \frac{7}{7} = 1$, u. s. w.; wird das Zeichen von y geändert (wegen $-47y$), so hat man

$$x = -1 + 47t,\ y = -3 + 29t.$$

§. 31. Die in Frage stehenden Gleichungen lassen sich zuweilen vereinfachen:

1) Haben a und A einen gemeinschaftlichen Factor m, so erhält man, wenn die Gleichung durch m dividirt wird, $\frac{ax}{m} + \frac{by}{m} = \frac{A}{m}$. Nun muß $\frac{by}{m}$ eine ganze Zahl sein, weil die andern Glieder solche sind; y ist also ein Vielfaches von m. Setzen wir $y = my'$, so werden wir eine einfachere, als die vorgelegte Gleichung erhalten, wenn wir durch m dividiren.

Es sei $1200x - 67y = 1000$. Man setze $y = 200y'$ und dividire dann die Gleichung durch 200; es kommt $6x - 67y' = 5$, woraus man herleitet $y' = -5$, $y = -1000$, $x = -55$; folglich

$$y = -1000 + 1200t,\ x = -55 + 67t.$$

In der Gleichung $44x - 35y = 165$, da 44 und 165 den Factor 11, 35 und 165 den Factor 5 haben, setze man $y = 11y'$, $x = 5x'$,

was $4x' - 7y' = 3$ gibt. Man findet dann $y' = -1$, $x' = -1$; woraus $y = -11 + 44t$, $x = -5 + 35t$.

2) Man bemerke, daß in jeder Aequidifferenz A, $A + b$, $A + 2b$, sämmtliche Reste, die man bei der Division der a ersten Glieder durch a erhält, verschieden sein werden, wenn a und b Primzahlen unter sich sind. In der That, würden zwei Glieder einerlei Rest lassen, so müßte ihre Differenz durch a theilbar sein (Arith. §. 16), was ungereimt ist, da diese Differenz die Form kb hat, wo $k < a$. Die a verschiedenen Reste fallen daher nothwendig, aber in veränderter Ordnung, mit den Zahlen 0, 1, 2, 3 ... $(a-1)$ zusammen. Einer der Dividenden $A + lb$ gibt also Null als Rest, oder ist ein Vielfaches von a; $y = l$ bringt demnach $\frac{A + by}{a}$ auf eine ganze Zahl. Nun ereignet es sich öfters, daß man bei der Substitution von 0, 1, 2, 3 ... für y den Werth $l < a$, der solcher Bedingung entspricht, entdeckt. Um also $\frac{3y + 7}{8}$ (erstes Beispiel) auf eine ganze Zahl zu bringen, setzt man $y = 0, 1, 2, 3 \ldots$; die Reste von $3y + 7$ durch 8 dividirt sind 7, 2, 5, 0 ... Jedes Glied der letztern Reihe wird erhalten, indem man -3 dem vorhergehenden Reste hinzufügt und 8 in der Summe wegstreicht, wenn sie 8 übertrifft. Man sieht, daß $y = 3$ der gesuchte Werth ist. Uebrigens kann man dies nur als ein Probiren ansehen, das sich häufig weitläufiger als die allgemeine Methode herausstellt. Um $y = \frac{35 + 19x}{12} = 2 + x + \frac{11 + 7x}{12}$ in ganzen Zahlen zu finden, setzen wir $x = 0, 1, 2 \ldots$; der letzte Bruch führt zu den Resten 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5, 0 ..., indem man fortwährend 7 hinzufügt und 12 wegnimmt, wenn es angeht. Auf solche Art findet man, daß $x = 7$ einen ganzen Quotienten $y = 14$ gibt, hieraus $y = 14 + 19t$, $x = 7 + 12t$.

§. 32. Es ereignet sich zuweilen, daß die Aufgabe nur positive Resultate haben kann. In solchen Fällen darf man nicht mehr alle ganzen Zahlen für t, sondern nur diejenigen nehmen, welche $\alpha - bt > 0$, $\beta + at > 0$ geben (§. 16); diese Ungleichheiten bestimmen die Grenzen von t.

1) Finden dergleichen Grenzen in einem und demselben Sinne statt, so reduciren sie sich auf eine einzige, und der Gleichung kann

durch unendlich viele, fortwährend größere Werthe Genüge geleistet werden; in diesem Falle haben a und b verschiedene Zeichen, weil sonst $ax + by$ nicht immer gleich c bleiben könnte. Im ersten Beispiele des §. 29 hat man $t > -\frac{11}{17}$ und $> -\frac{3}{8}$; man kann also $t = 0, 1, 2 \ldots$ setzen, ihm aber keinen negativen Werth beilegen. — Im zweiten Beispiele des §. 30 hat man $t = 0$ oder > 0, nämlich $t = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots.$

2) Haben die Grenzen in verschiedenen Richtungen statt, so sucht man die dazwischen liegenden Werthe, welche t annehmen kann, und der Aufgabe genügt nur eine bestimmte Anzahl von Auflösungen; x wächst, wenn y abnimmt, was erfordert, daß a und b einerlei Zeichen haben. Es kann sich sogar ereignen, daß diese Grenzen sich gegenseitig ausschließen; es ist dann unmöglich, die Aufgabe in ganzen Zahlen zu erfüllen. Im ersten Beispiele des §. 30 hat man $t < \frac{105}{338}$ und $t > \frac{68}{337}$; eine Auflösung in positiven Zahlen ist also unmöglich.

Anmerkung: 1) Die Gleichung $ax + by = -c$, wo a, b und c positiv sind, kann durch kein Paar positive Zahlen erfüllt werden.

2) Der Gleichung $ax + by = c$, wo a, b und c positiv sind, und $a + b > c$ kann nicht durch ganze positive Zahlen Genüge geschehen, den Fall ausgenommen, wo c durch a oder durch b theilbar ist; alsdann wird die Gleichung durch Null und eine positive ganze Zahl erfüllt.

Nun einige Anwendungen von vorstehender Lehre:

I. Die Zahl 117 dergestalt in zwei Theile zu theilen, daß der eine durch 19 und der andere durch 7 theilbar sei. Man hat $19x + 7y = 117$; woraus $y = \frac{117 - 19x}{7}$; folglich $\frac{5 - 5x}{7}$, oder $\frac{5(1-x)}{7}$ eine ganze Zahl. Setzt man $x = 1$, so findet man $y = 14$; dieses gibt $x = 1 - 7t$ und $y = 14 + 19t$. Will man die negativen Zahlen ausschließen, so muß $1 - 7t > 0$ und $14 + 19t > 0$ sein; woraus $t < \frac{1}{7}$ und $> -\frac{14}{19}$. In diesem Falle kann man der Aufgabe nur auf eine einzige Art genügen: $t = 0$ gibt $x = 1$ und $y = 14$; 19 und 98 sind demnach die gesuchten Theile.

II. Man will 2000 fl. mit zweierlei Art von Gefäßen, die einen zu 9 fl., die andern zu 13 fl. das Stück, bezahlen. Man findet

$9x + 13y = 2000$; woraus $x = \frac{2000 - 13y}{9}$; $\frac{2 - 4y}{9}$, oder $\frac{1 - 2y}{9}$ muß eine ganze Zahl werden, dieses gibt $y = -4$, hieraus $x = 228$; endlich $x = 228 - 13t$, $y = -4 + 9t$. Die negativen Werthe von y zeigen an, wie viel Gefäße von der zweiten Sorte man gegen die zur Entrichtung der 2000 fl. hingegebenen der ersten Sorte in Empfang nimmt. Soll x und y positiv sein, so muß man $228 - 13t > 0$ und $-4 + 9t > 0$ setzen, woraus $t < 18$ und > 0. Setzt man $t = 1, 2, 3 \ldots 17$, so erhält man die 17 Auflösungen der Aufgabe, $x = 215, 202, 189 \ldots 7$; $y = 5, 14, 23 \ldots 149$. Man kann also 215 Gefäße zu 9 fl. und 5 Gefäße zu 13 fl. geben, rc.

III. Ein Kaufmann tauschte Rubel gegen Dukaten um und legte hierbei noch 15 Francs darauf. Wenn der Rubel zu 4 Francs und der Dukaten zu 9 Francs angenommen wird, so fragt sich, auf wie vielerlei Art ein solcher Tausch vor sich gehen könnte? Man hat $9y = 4x + 15$; es ergibt sich hieraus $x = \frac{9y - 15}{4}$; also $\frac{y - 3}{4} = t$; und $y = 4t + 3$, $x = 9t + 3$. Sollen x und y positiv sein, so fallen die Grenzen von t zusammen, und es ist $t > -1$. Nichts begrenzt hier die Werthe von x und die von y; setzt man successive $t = 0, 1, 2 \ldots$, so findet man $x = 3, 12, 21 \ldots$, $y = 3, 7, 11 \ldots$; man kann also 3 Rubel gegen 3 Dukaten, oder 12 Rubel gegen 7 Dukaten einwechseln, u. s. w.

IV. $6x - 12y = 7$ kann nicht in ganzen Zahlen aufgelöst werden, weil der gemeinschaftliche Theiler 6 von 6 und 12 kein Theiler von 7 ist.

Aehnliches findet bei der Gleichung $2x + 3y = -10$ statt, wenn x und y positiv sein sollen. Die Rechnung weißt dies übrigens nach, indem sie gibt $x = 3t - 5$ und $y = -2t$; die Grenzen $t > \frac{5}{3}$ und < 0 können nicht zusammen bestehen.

V. Der Bruch $\frac{n}{d}$, dessen Nenner $d = ab$ das Produkt zweier Primzahlen unter sich a und b ist, in zwei Theile zu theilen. Man setzt deshalb $\frac{n}{d} = \frac{x}{b} + \frac{y}{a}$, hat demnach die Gleichung ax

$+ by = n$ in ganzen Zahlen aufzulösen. — Für den Bruch $\frac{58}{77}$ hat man $11x + 7y = 58$, da $77 = 11$ mal 7; daraus ergibt sich $x = 7t - 3$, $y = 13 - 11t$. Soll $\frac{58}{77}$ die Differenz der beiden gesuchten Brüche sein, so ist die Zahl der Auflösungen unbegrenzt. Soll $\frac{58}{77}$ aber die Summe zweier Brüche sein, so ist nur eine einzige Auflösung zulässig, die dem Werthe $t = 1$ entspricht; dieses gibt $\frac{58}{77} = \frac{4}{7} + \frac{2}{11}$.

VI. Die Summe von 50 fl. in Zweiguldenstücken und Dreihalbguldenstücken zu bezahlen. Man hat die Gleichung $2x + \frac{3}{2}y = 50$, oder $4x + 3y = 100$; es ergibt sich daraus $x = 1 - 3t$, $y = 32 + 4t$. Setzt man $t = 0, -1, -2, \ldots$ bis -8, so findet man $x = 1, 4, 7 \ldots$, $y = 32, 28, 24 \ldots$. Nimmt man auch die negativen Werthe von x oder die von y, so sind die Zweiguldenstücke als gegen die Dreihalbguldenstücke zurückgegeben zu betrachten, wodurch eine Differenz von 50 fl. entsteht.

§. 33. Die auseinandergesetzte Methode läßt sich immer anwenden, wenn man 3, 4 ... Unbekannte und eben so viele Gleichungen weniger eine hat. Hierüber einige Beispiele:

VII. Eine Zahl N zu finden, welche durch 5 dividirt zum Rest 4, durch 7 dividirt zum Rest 2 lasse, d. h. die Zahl, welche die Ausdrücke $\frac{N-4}{5}$ und $\frac{N-2}{7}$ zu ganzen Zahlen macht. Bezeichnen wir die respektiven Quotienten durch x und y, so haben wir $N = 5x + 4$, $N = 7y + 2$; woraus $7y - 5x = 2$. Löst man diese Gleichung mittelst des angegebenen Verfahrens auf, so findet man $x = 7t + 1$, $y = 5t + 1$, was $N = 35t + 9$ gibt. Die gesuchte Zahl ist also eine aus der Reihe: 9, 44, 79 .... Man würde leicht zum Endresultate gelangt sein, wenn man bedenkt, daß $N = 4$ den ersten Bruch in eine ganze Zahl umwandelt, und daß sämmtliche Zahlen, welche diesen Bedingungen genügen, von der Form $N = 4 + 5v$ sind. Für v kann man aber nur diejenigen Werthe nehmen, welche die Größen $\frac{N-2}{7}$ oder $\frac{5v+2}{7}$ zu einer ganzen Zahl machen. Man sieht auf der Stelle, daß $v = 1$, überhaupt $v = 1 + 7t$ ist, folglich durch Substitution $N = 9 + 35t$.

VIII. Man zählt die Blätter eines Buches dreimal hinter einander, das erste Mal je sieben, wo 1 übrig bleibt, das zweite Mal je 10, wo 6 übrig bleiben, das dritte Mal je 3, wo nichts übrig bleibt.

Wie viel Blätter hatte das Buch? Man nimmt an, daß die Anzahl derselben zwischen 100 und 300 liegt.

Es handelt sich also darum, eine Zahl N zu finden, welche die Größen $\frac{N-1}{7}$, $\frac{N-6}{10}$ und $\frac{N}{3}$ zu ganzen Zahlen macht. Der letzte Bruch gibt $N = 3s$, die zwei andern werden dadurch $\frac{3s-1}{7}$, $\frac{3s-6}{10}$; der letzte gibt $s = 2 + 10v$; der andere wird dadurch $\frac{5+30v}{7}$ oder $4v + \frac{5+2v}{7}$; folglich $v = 1 + 7t$, woraus $s = 12 + 70t$; endlich $N = 36 + 210t$. Setzt man $t = 0, 1, 2, \ldots$, so findet man $N = 36, 246, 456 \ldots$ das Buch hat also 246 Blätter.

IX. Welche Zahlen lassen durch 2, 3 und 5 dividirt nach der Reihe die Reste 1, 2 und 3? Man findet $N = 30t + 23$; also $N = 23, 53, 83, 113 \ldots$

X. Die drei Größen $\frac{121x-41}{504}$, $\frac{9x+1}{35}$ und $\frac{27x-11}{16}$ in ganzen Zahlen aufzulösen. Man kann die Rechnung, wie folgt, vereinfachen: Da $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $35 = 7 \cdot 5$, $16 = 2^4$, so zerlegt man die drei Brüche in

$$\frac{121x-41}{2^3},\ \frac{121x-41}{3^2},\ \frac{121x-41}{7},\ \frac{9x+1}{7},\ \frac{9x+1}{5},\ \frac{11(x-1)}{16},$$

$$\text{oder}\ \frac{x-1}{8},\ \frac{4x-5}{9},\ \frac{2x+1}{7},\ \frac{2x+1}{7},\ \frac{4x+1}{5},\ \frac{x-1}{2^4},$$

wenn die Ganzen herausgezogen werden. Man läßt den dritten Bruch, der mit dem vierten einerlei ist, weg, desgleichen den ersten, der in dem letzten enthalten ist; denn $x-1$ kann nicht durch 16 theilbar sein, ohne es auch durch 8 zu werden. Es bleibt also noch übrig, die Größen $\frac{4x-5}{9}$, $\frac{2x+1}{7}$, $\frac{4x+1}{5}$, $\frac{x-1}{16}$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Der erste Bruch gibt $x = -1 + 9t$, dadurch wird der zweite in $\frac{18t-1}{7}$ oder $\frac{4t-1}{7}$ umgeändert; also $t = 2 + 7t'$, und $x = 17 + 63t'$. Der dritte Bruch wird dadurch $\frac{2(2+t')}{5}$, woraus $t' = -2 + 5t''$, und $x = -109 + 315t''$. Der vierte Bruch gibt end-

lich $\frac{2+11t''}{16}$, woraus $t'' = 10 + 16z$; und endlich $x = 3041 + 5040z$ für jeden beliebigen ganzen Werth von z.

Hat man nur eine Gleichung und drei Unbekannte, so operirt man wie folgt: Es sei $5x + 8y + 7z = 50$. Setzt man $50 - 7z = u$, so hat man $5x + 8y = u$, woraus man, indem u als gegeben betrachtet wird, $x = 8t - 3u$ und $y = 2u - 5t$ ableitet; wird für u sein Werth $50 - 7z$ eingeführt, so kommt $x = 21z + 8t - 150$, $y = 100 - 14z - 5t$, in welchen Ausdrücken z und x beliebige ganze Zahlen sind.

Es sei noch die Gleichung $7x + 5y - 3z = 209$; hieraus $z = 2x + 2y - 69 + \frac{x-y-z}{3}$; $\frac{x-y-z}{3} = t$; dann $y = x - 3t - 2$, $z = 4x - 5t - 73$, wo t und x willkührliche ganze Zahlen sind.

Drittes Kapitel.

Von den Potenzen, den Wurzeln und den Gleichungen des zweiten Grades.

Potenzen und Wurzeln der Monome.

§. 34. Mittelst der im §. 60 der Arithmetik gegebenen Regel wird die Erhebung auf Potenzen dadurch vereinfacht, daß man die wiederholte Multiplication vermeidet. Denn soll a auf die Potenz $m = n + p$ erhoben werden, so hat man $a^m = a^n \times a^p$; bildet man also die Potenzen a^n und a^p, so gibt ihr Produkt a^m. Eben so kann man m in 3 Theile $n + p + q$ zerlegen, woraus $a^m = a^n \times a^p \times a^q$, u. s. w.

§. 35. Aus den Regeln der Multiplication (§. 5) folgt: daß die Potenz eines Monoms gebildet wird, wenn man den

Exponenten jedes Buchstaben mit dem Grad dieser Potenz multiplicirt. Hiernach

$$(2ab^2)^2 = 4a^2b^4;\ \left(\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^5 = \frac{3^5a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}.$$

Man zieht hieraus ein leichtes Mittel, gewisse Potenzen von Zahlen zu bilden; denn a^m kommt auf $a^{np} = (a^n)^p$ zurück, wenn $m = np$ ist. Hat man $m = npq \ldots$, so bildet man die $n$te Potenz von a, die $p$te Potenz von a^n, die $q$te Potenz von $a^{np} \ldots$ Aehnlicherweise verfährt man bei der Wurzelausziehung; so z. B. findet man $\sqrt[12]{531441}$, weil $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ dadurch, daß man vorerst die Quadratwurzel auszieht, was 729 gibt, dann von 729 die Quadratwurzel nimmt, welche 27 ist; endlich aus 27 die Cubikwurzel zieht, was $3 = \sqrt[12]{531441}$ gibt.

Um umgekehrt die $m$te Wurzel aus einem Monom zu ziehen, darf man nur diese Wurzel aus jedem Factor besonders ziehen; eine solche Wurzel findet man, indem man jeden Exponenten durch m dividirt. In der That, damit a^2b^3 die Cubikwurzel von a^6b^9 sei, ist es erforderlich, daß a^2b^3 auf den Cubus erhoben, a^6b^9 wieder hervorbringe; dies findet aber nach der vorhergegangenen Regel statt, wenn die Exponenten durch 3 dividirt wurden.

$$\sqrt{(4a^2b^4)} = 2ab^2;\ \sqrt[5]{\left(\frac{243a^{10}b^5}{c^5d^{10}}\right)} = \frac{3a^2b}{cd^2}.$$

Sobald der Grad der Wurzel gerade ist, so kann diese Wurzel sowohl mit dem Zeichen +, als mit dem Zeichen — behaftet sein; $\sqrt{9} = \pm 3$. Es kommt dies daher, weil, insofern eine Zahl m die Wurzel von 9 sein soll, es, algebraisch gesprochen, hinreicht, wenn $m^2 = 9$, was statt findet, welches von beiden Zeichen m auch haben mag. Ist hingegen der Grad der Wurzel ungerade, so haben Potenz und Wurzel ein und dasselbe Zeichen.

$$\sqrt[3]{-27} = -3,\ \sqrt[5]{+243} = +3.$$

Anmerkung. Die Richtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung erhellt aus Folgendem:

Man hat $(\pm a)^{2n} = ((\pm a)^2)^n = (a^2)^n = a^{2n}$.

Ferner $(\pm a)^{2n+1} = (\pm a)^{2n} \cdot (\pm a) = a^{2n} \cdot (\pm a) = \pm a^{2n+1}$.

Hieraus nun $\sqrt[2n]{a} = \pm w;\ \sqrt[2n+1]{a} = +w;$

und $\sqrt[2n+1]{-a} = -w$.

§. 36. Mit den Wurzelausdrücken lassen sich öfters Vereinfachungen vornehmen.

Beispiele. $\sqrt[3]{432} = 2\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{16} = 6\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{Nq^2} = q\sqrt{N}$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{c^6d^8}{a^5}\right)} = \frac{cd}{a}\sqrt[5]{cd^3};\ \sqrt{(3a^2-6ab+3b^2)} = (a-b)\sqrt{3};$$

$$\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b} = 3\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b};\ \sqrt{75}-4\sqrt{3} = \sqrt{3};$$

$$\sqrt[4]{x^2y}-a\sqrt[4]{x^2y}+b\sqrt[4]{x^2y} = (1-a+b)\sqrt[4]{x^2y};\ \sqrt{75a^3b^2}-4\sqrt{3a^3b^2}$$
$$= ab\sqrt{3a};\ \sqrt{27a^3b}-\sqrt{3a^3b^5} = a(3-b^2)\sqrt{3ab};$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}+\frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{ag+bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}.$$

§. 37. Um die Wurzel aus einem Produkte zu erhalten, muß man, nachdem was wir hier oben gesehen haben, die Wurzel desselben Grades aus jedem seiner Factoren ziehen. Es ist dies auch noch wahr, wenn die Wurzeln sich nicht mehr genau ausziehen lassen. Z. B. $\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{b}$, weil der Cubus der letztern Größe offenbar erhalten wird, wenn man jeden Factor auf jene Potenz erhebt, was a^2b gibt. Ueberhaupt ist $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$, da die Wurzel einer Größe aus dem Produkte der Wurzeln von ihren Factoren gebildet wird (§. 5). *Um folglich zwei Wurzelausdrücke von einerlei Grad (gleichnamige Radicalgrößen) mit einander zu multipliciren oder dividiren, muß man das Produkt oder den Quotienten, der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen bilden und jenem ein Wurzelzeichen des nämlichen Grades geben.* Vermittelst dieser Regel findet man:

$$\sqrt{6}\times\sqrt{8} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

$$\sqrt[n]{5x^2y^4}\times\sqrt[n]{20ax} = \sqrt[n]{100ax^3y^4};\ \frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}} = \frac{1}{4\sqrt{3}};$$

$$\sqrt[n]{p}\times\sqrt[n]{-q} = \sqrt[n]{-pq};\ \frac{\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{bxy}} = \sqrt[n]{\frac{a}{by}};$$

$$a\sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^4b};\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab};$$

$(a+\sqrt{b})^3 = a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}$; $(\sqrt{a^nb^m})^2 = a^nb^m$, indem man das Wurzelzeichen wegläßt.

§. 38. Da es keine Größe gibt, die mit sich selbst multiplicirt, ein negatives Resultat hervorbringt, so stellt $\sqrt{-m}$ eine unmögliche Operation dar; man nennt deshalb einen solchen Ausdruck einen imaginären Ausdruck, während $\sqrt{m}$ ein reeller Ausdruck heißt.

Wir werden in der Folge Gelegenheit haben zu bemerken, daß dergleichen Symbole, die eigentlich keinen Sinn haben, nichts destoweniger zu sehr wichtigen Betrachtungen Anlaß geben. Solche Symbole addiren, subtrahiren.... sind Operationen, von denen es schwer hält, gehörige Rechenschaft abzulegen; man ist jedoch übereingekommen, jene Rechnungen mit derlei imaginären Ausdrücken vorzunehmen, als ob sie wirkliche Größen wären, indem man sie denselben Regeln wie letztere unterwirft; wir werden späterhin den Nutzen von solchen Operationen einsehen.

Anmerkung. Ueberhaupt ist jede gerade Wurzel aus einer negativen Größe ein imaginärer Ausdruck, weil keine positive oder negative Größe denkbar ist, welche auf eine gerade Potenz erhoben, ein negatives Resultat gibt (§. 35). Also $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a} \times \sqrt[2n]{-1}$ ein imaginärer Ausdruck.

$-a^2$ ist eigentlich kein Quadrat, sondern ein bloßes Produkt, weil $-a^2 = +a \times (-a)$; ebenso ist $-a^{2n}$ ein bloßes Produkt.

Die Regel des vorigen §. unterliegt hier einigen Modificationen. So ist $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ nicht anders als das Quadrat von $\sqrt{-a}$, sichtbar demnach $-a$; dagegen gibt die obige Regel unmittelbar angewendet als Produkt $\sqrt{(-a \times -a)} = \sqrt{a^2}$ oder a. Um diese Schwierigkeit zu heben, bemerken wir, daß die Zweideutigkeit des Zeichens im Allgemeinen nur dann statt hat, wenn man nicht weiß, ob a^2 von dem Quadrate von $+a$, oder von dem von $-a$ herkomme; hier ist dies aber nicht mehr der Fall, das Produkt ist $-a$ und keineswegs $+a$.

Hieraus folgern wir, daß $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$.

Ebenso ist $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ mit $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$, oder $-\sqrt{ab}$ gleichgeltend.

Die erste, zweite, dritte, vierte... Potenz von $\sqrt{-a}$ wird hiernach bezüglich sein, $\sqrt{-a}$, $-a$, $-a\sqrt{-a}$, $+a^2$, $+a^2\sqrt{-a}$, $-a^3$ u. s. w. Die von $-\sqrt{-a}$ sind respective $-\sqrt{-a}$, $-a$, $+a\sqrt{-a}$, a^2, $-a^2\sqrt{-a}$....

Das Quadrat von $1+\sqrt{-1}$ reducirt sich auf $2\sqrt{-1}$. Der Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ ist 8; $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}.\sqrt{-1}}{\sqrt{b}.\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.
Das Produkt $(x+a+b\sqrt{-1})\times(x+a-b\sqrt{-1})$ ist $=(x+a)^2+b^2$.

Anmerkung. Diese Beispiele zeigen, daß sowohl das Produkt als der Quotient aus zwei imaginären Ausdrücken eine reelle Größe werden könne, aber nicht müsse.

§. 39. Aus der im §. 37 gegebenen Regel folgt, daß um ein mit einem Wurzelzeichen behaftetes Monom zu irgend einer Potenz zu erheben, man jeden Factor unter dem Wurzelzeichen auf diese Potenz erheben muß. Der Cubus von $\sqrt{3a^2b}$ ist $\sqrt{27a^6b^3}$; der von $\sqrt{2}$ ist $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Man sieht hieraus, daß die Wurzelausziehung aus dem mit schon einem Wurzelzeichen behafteten Monom im Allgemeinen geschieht, wenn man den Grad des Wurzelzeichens mit dem Grade der Wurzel, die man ausziehen will, multiplicirt, oder, wenn es angeht, solche aus der Wurzelgröße zieht. Man findet hiernach $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a^5})}=\sqrt[9]{a^5}$; $\sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})}=\sqrt[mp]{a^n}$; $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2b^4})}=\sqrt[3]{ab^2}$; $\sqrt[4]{(\sqrt[5]{a^4b^8})}=\sqrt[5]{ab^2}$.

§. 40. Man kann also, ohne den Werth einer Wurzelgröße zu ändern, die Exponenten und den Grad der Wurzel mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren; denn einerseits wird dadurch die Größe auf eine Potenz erhoben, anderseits aus dem Resultate die Wurzel von gleichem Grade mit der gebildeten Potenz gezogen, was die Größe wieder auf ihren ersten Zustand zurückbringt.

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2};\ \sqrt{a^3}=\sqrt[6]{a^9};\ \sqrt{(3a^2b^3)}=\sqrt[4]{(9a^4b^6)};\ \sqrt[4]{a^7}=\sqrt[12]{a^{21}}.$$

Mittelst dieser Operation ist es leicht ungleichnamige Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren oder zu dividiren. Man braucht sie deshalb nur auf einerlei Grad zu bringen, was dadurch geschieht, daß man die Exponenten und zugleich den Wurzelgrad mit einer und derselben gehörig gewählten Zahl multiplicirt, geradeso wie man bei der Reduction der Brüche auf einerlei Nenner verfährt. Vermittelst dieser Regel hat man:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2};\ \sqrt[m]{a^p}\cdot\sqrt[n]{b^q}=\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qm}};$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}};\ \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}}:\frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{y}{z}}=\frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^n z^m}{t^n y^m}}.$$

Anmerkung. Der Satz, daß eine Wurzelgröße nicht geändert wird, wenn man den Wurzelgrad und den Potenzexponenten mit einer und derselben Zahl dividirt, bietet ein Mittel dar, Radicalgrößen in ihrer einfachsten Gestalt darzustellen. Beispiele:

$$\sqrt[25]{a^{20}b^{15}}=\sqrt[5]{a^4b^3};\ 2\sqrt[4]{a^6b^4}=2ba\sqrt{a}.$$

$$\sqrt[12]{a^6b^{18}}=b\sqrt{ab};\ \frac{2a^2b^2c^2}{4\sqrt[3]{a^3b^6dc^5}}=\frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{c}{d}}.$$

Negative und gebrochene Exponenten.

§. 41. Wir haben dargethan, daß, unter Voraussetzung $m > n$, a^{m-n} der Quotient von $\frac{a^m}{a^n}$ ist. Wenn aber der Exponent n den Exponenten m übertrifft, so wird $m-n$ eine negative Zahl $-p$ sein. Da man nun nicht weiß, welcher Begriff mit dem Ausdrucke a^{-p} zu verbinden ist, so wird man eigentlich a^{-p} mit a^n nicht multipliciren können; es ist also vor der Hand nicht erlaubt zu sagen, daß a^n mit a^{m-n} multiplicirt a^m hervorbringen soll. Wir bemerken aber, daß der Ausdruck a^{-p} an und für sich keinen Sinn hat, da er den Wortbegriffen Exponent und Potenz keineswegs entspricht. Es steht uns also frei, die Ausdrücke $\frac{1}{a^p}$ und a^{-p} als gleichbedeutende Dinge anzusehen, was wir in der Folge immer thun wollen. Nach dieser Uebereinkunft können wir in allen Fällen sagen, daß $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; denn für den Fall, wo $m > n$, ist die Sache erwiesen, und aus unserer Annahme ergibt sie sich für den Fall, wo $m < n$, weil durch Division der beiden Glieder mit a^m man erhält:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{-p}.$$

Die Algebra lehrt Formeln finden, die wegen ihrer Allgemeinheit auf alle numerische, den Buchstaben beizulegende Werthe passen.

Wenn man daher nicht nöthig hat, in einem algebraischen Ausdrucke, wo Größen von der Form $\frac{a^m}{a^n}$ vorkommen, die verschiedenen, möglicherweise aus den Annahmen von $m >$ oder $< n$ hervorgehenden Fälle von einander zu unterscheiden: so kann solches nur als ein großer Vorzug betrachtet werden; man setzt a^{m-n} anstatt $\frac{a^m}{a^n}$, und die Formel wird für alle Hypothesen ihre Gültigkeit haben (wie im §. 17).

Auch auf den Fall, wo $m = n$, ist Rücksicht zu nehmen; a^{m-n} wird alsdann a^0, ein Symbol, das an und für sich ebenso wenig Bedeutung wie a^{-p} hat. Wir werden demnach übereinkommen $a^0 = 1$ zu setzen, weil dann $\frac{a^m}{a^n} = 1$. **Der Ausdruck a^0 ist ein der Einheit gleichgeltendes Symbol.**

Stoßen wir folglich in einer Formel auf die Ausdrücke a^0 und und a^{-p}, so werden solche leicht zu erklären sein, wenn wir auf ihre Entstehung zurückgehen und bedenken, daß a^0 und a^{-p} nur von einer Division, bei der $m = n$ im ersten und $n = m + p$ im zweiten Falle war, herrühren konnten. **Nach dieser Uebereinkunft kann man einen Factor des Nenners in den Zähler setzen, wenn man seinem Exponenten das negative Zeichen gibt.** Hiernach

$$a^0 = b^0 = (p + q)^0 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1;$$

$$(bc)^{-p} = \frac{1}{(bc)^p};\ \frac{1}{a} = a^{-1};\ \frac{c}{f} = cf^{-1} = \frac{f^{-1}}{c^{-1}};$$

$$\frac{a^m b^n}{c^p d^q} = a^m b^n c^{-p} d^{-q};\ \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = (a^3 + b^3)\,(a^2 + b^2)^{-1}.$$

Wir haben also Potenzen, deren Exponenten Null und negative Größen sind, in die Rechnung eingeführt; die Principien, auf denen diese Einführung beruht, bieten weiter keine Schwierigkeit dar. Wir kommen jetzt zu den Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

§. 42. Die für die Wurzelausziehung aus Monomen gegebene Regel zeigt, daß $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$; n muß aber dann ein Vielfaches von m sein, widrigenfalls man auf einen Bruchexponenten kommen würde. Da man die Natur eines solchen noch nicht kennt, so kann man auch

nicht sagen, daß $a^{\frac{n}{m}}$ m mal als Factor genommen, das Produkt a^n gäbe. Wir finden uns also hier in demselben Falle, wie bei den negativen Exponenten, können mithin das Zeichen $a^{\frac{n}{m}}$, das für sich keinen bestimmten Sinn darstellt, als Bild eines klaren Ausdrucks $\sqrt[m]{a^n}$ gebrauchen. Hierdurch sind die Formeln auf alle Fälle angepaßt, n mag ein Vielfaches von m sein oder nicht, was ganz in dem Wesen der Algebra liegt.

Kommen wir also in einer Formel auf den Ausdruck $a^{\frac{n}{m}}$, so ist es leicht davon einen klaren Begriff zu erhalten, wenn man bemerkt, daß ein solcher Ausdruck nur dadurch entstanden ist, insofern die $m$te Wurzel aus a^n verlangt wurde. Die für die Wurzelausziehung gegebene Regel ist folglich in allen Fällen gültig. Also

$$\sqrt{3a} = (3a)^{\frac{1}{2}};\ \sqrt{x^2 - y^2} = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}};\ b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{b^3};$$

$$b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b};\ c^{\frac{1}{5}}p^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{cp};\ \sqrt[r]{\frac{a^m b^n}{c^p}} = \frac{a^{\frac{m}{r}}\, b^{\frac{n}{r}}}{c^{\frac{p}{r}}};\ \sqrt[m]{\frac{b^r}{c^n}} = b^{\frac{r}{m}} \times c^{-\frac{n}{m}}.$$

§. 43. a^0, a^{-p}, $a^{\frac{m}{n}}$ sind also der Uebereinkunft gemäß nichts anderes, als Bilder der Werthe 1, $\frac{1}{a^p}$ und $\sqrt[m]{a^n}$. Jedoch sind die Größen o, $-p$ und $\frac{n}{m}$ als keine wirkliche Exponenten in dem diesem Worte entsprechenden Begriffe zu betrachten, obschon sie die den Exponenten zukommende Stelle einnehmen. Wir sind also ohne weitere Gründe nicht berechtigt $a^m \times a^n = a^{m+n}$ zu setzen, wenn m und n nicht beide ganze und positive Zahlen darstellen. Dasselbe gilt von der Division, Potenzirung und Wurzelausziehung. Wir müssen folglich beweisen, daß diese Symbole den nämlichen Regeln, wie die wahren ganzen und positiven Exponenten unterworfen sind, oder daß, was auch m und n sein mögen,

$$a^m : a^n = a^{m-n},\ (a^m)^p = a^{mp},\ \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{p}}.$$

I. Wenn die Exponenten negativ sind: so hat man (m, n und p positiv angenommen)

1) $a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Ebenso findet man, daß $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$.

2) $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \times a^n = a^{m+n}$. Ebenso findet man, daß $\frac{a^{-m}}{a^n} = a^{-m-n}$ und $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m}$.

3) $(a^{-n})^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np}$.

4) $\sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$.

II. Wenn die Exponenten Brüche sind, so kann man die beiden Glieder derselben mit einer und derselben Zahl multipliciren; denn (§. 40) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = a^{\frac{np}{mp}}$. Man kann also die Bruch-Exponenten der Größen, welche mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, auf einerlei Nenner bringen.

1) $a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n+p}} = a^{\frac{n+p}{m}}$.

2) $a^{\frac{n}{m}} : a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^n} : \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{n-p}} = a^{\frac{n-p}{m}}$.

3) $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^p = (\sqrt[m]{a^n})^p = \sqrt[m]{a^{np}} = a^{\frac{np}{m}}$.

4) $\sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}} = \sqrt[p]{(\sqrt[m]{a^n})} = \sqrt[mp]{a^n} = a^{\frac{n}{mp}}$.

Ausserdem bemerken wir, daß diese auf Bruchexponenten Bezug habenden Rechnungen auch gestatten, solche negativ anzunehmen.

III. Betrachten wir jetzt den Fall, wo die Exponenten irrational sind. Es sei z. B. $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}}$; bezeichnen wir durch z und z' die Näherungswerthe dieser Exponenten, so daß $z = \sqrt{2} + h$, $z' = \sqrt{3} + h'$, wo h und h' die Fehler sind, welche durch hinlänglich fortgesetzte Annäherung auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit gebracht werden können. Begnügt man sich nun mit den Annäherungswerthen z und z', so ist das Produkt auch nur annähernd richtig. Stellt α den dadurch entstandenen Fehler, der so klein, als man nur will, gemacht werden kann, dar, so hat man genau $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}} +$

$\alpha = a^{z+z'} = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}+h+h'} = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times a^{h+h'}$; je kleiner aber h und h' sind, desto mehr nähert sich $a^{h+h'}$ dem 1; man kann also dem zweiten Gliede der obigen Gleichung die Form $a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \beta$ geben, wo β mit α, h und h' fortwährend abnimmt. Werden die constanten Glieder einander gleichgesetzt (§. 22), so erhält man $a^{\sqrt{2}} \times a^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Aehnlicherweise zeigt man, daß die irrationalen Exponenten bei der Division und der Wurzelausziehung denselben Regeln, wie die ganzen unterworfen sind; übrigens ergibt sich dies schon aus dem eben Erwiesenen.

IV. Was die imaginären Exponenten anlangt, so finden der Definition zufolge (§. 38) die für die reellen Größen gegebenen Regeln auch bei den imaginären Ausdrücken ihre Anwendung, insofern man solche Symbole der Rechnung unterwerfen will, obschon sie nicht wirklich, sondern blos in der Einbildung existiren; eine eigentliche Beweisführung hat folglich hier nicht statt.

Vermittelst dieser Regeln werden die Rechnungen öfters vereinfacht. Will man z. B. $\sqrt[5]{a^3b^4}$ mit $\sqrt[7]{a^2b^3}$ dividiren, so schreibt man $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}} : a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$, reducirt die Exponenten auf einerlei Nenner, wodurch man erhält: $a^{\frac{21}{35}}b^{\frac{28}{35}} : a^{\frac{10}{35}}b^{\frac{15}{35}} = a^{\frac{11}{35}}b^{\frac{13}{35}} = \sqrt[35]{a^{11}b^{13}}$. Eben so hat man $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[8]{a^2} = a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{8}} = a^{\frac{8}{8}} = a$.

Anmerkung. Durch den Gebrauch der Bruchexponenten wird also die Wurzelausziehung auf eine bloße Potenzrechnung reducirt. Descartes war der erste, welcher diese glücklich gewählte Bezeichnung einführte.

Auf die Polynome, welche negative oder gebrochene Exponenten enthalten, finden jetzt die gewöhnlichen Regeln ihre Anwendung; es ist gut in dergleichen Operationen sich einige Uebung zu erwerben. Nachstehende zwei Divisions-Beispiele zeigen den Gang, den man hier zu befolgen hat:

$$
\begin{array}{l|l}
5a^{\frac{25}{12}} - 41a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2 & a^{\frac{1}{3}} - 7ba^{-\frac{2}{3}} \\
\underline{-5a^{\frac{25}{12}} + 35a^{\frac{13}{12}}b} & \overline{5a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b} \\
\text{Erster Rest} \ldots - 6a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2 & \\
\underline{+ 6a^{\frac{13}{12}}b - 42a^{\frac{1}{12}}b^2} & \\
\text{Zweiter Rest} \ldots \quad 0 &
\end{array}
$$

$6a^4-23a^2\sqrt{-1}-13ab-20+22a^{-1}b\sqrt{-1}+6a^{-2}b^2$	$2a^2-5\sqrt{-1}-3a^{-1}b$
$-6a^4+15a^2\sqrt{-1}+9ab$	$3a^2-4\sqrt{-1}-2a^{-1}b$
1r Rest $-8a^2\sqrt{-1}-4ab-20+22a^{-1}b\sqrt{-1}+6a^{-2}b^2$	
$+8a^2\sqrt{-1}\quad +20-12a^{-1}b\sqrt{-1}$	
2r Rest $-4ab+10a^{-1}b\sqrt{-1}+6a^{-2}b^2$	
$4ab-10a^{-1}b\sqrt{-1}-6a^{-2}b^2$	
3r Rest 0	

Wir bemerken noch, daß der Quotient negative Exponenten für a zulassen und dennoch sich endigen könne. Geht aber die Division auf, so ist klar, daß die Summe der geringsten Exponenten von a in dem Quotienten und Divisor den geringsten dieses Buchstaben im Dividend hervorbringe. Zieht man hiernach die kleinsten Exponenten von a in den beiden erstern Polynomen von einander ab, so hat man den kleinsten Exponenten von a in dem gesuchten Quotienten, wenn die Division aufgeht. Man ist also überzeugt, einen solchen Fall nicht vor sich zu haben, sobald im Quotienten ein Glied gefunden wird, in dem der Exponent geringer als die eben erwähnte Differenz ist.

Von den Quadrat- und Cubik-Wurzeln der Polynome.

§. 44. 1) Kein Binom ist ein Quadrat, weil jedes Monom zum Quadrat erhoben, ein Monom gibt, und das Quadrat eines Binoms ein Trinom ist. Man würde also einen groben Fehler begehen, wenn man $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ setzte.

2) Es seien a und $a+1$ zwei auf einander folgende ganze Zahlen; ihre Quadrate a^2 und a^2+2a+1 sind um $2a+1$ von einander verschieden, was mit dem im §. 66 der Arithmetik Gesagten übereinstimmt.

Da $2a+1$ alle ungeraden Zahlen darstellen kann, so sieht man, daß jede ungerade Zahl die Differenz der Quadrate ihrer zwei ungleichen und ganzen Hälften ist: $77=39^2-38^2$, $37=19^2-18^2$ ꝛc. Wir werden übrigens bei der Behandlung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades (siehe höhere Algebra) zeigen, daß es mehrere Arten gibt, eine solche Zerlegung zu bewerkstelligen, sobald eine ungerade Zahl keine Primzahl ist: $27=14^2-13^2=6^2-3^2$; $105=53^2-52^2=19^2-16^2=13^2-8^2=11^2-4^2$.

3) Ist k^2 das größte in N enthaltene Quadrat, so sind k und $k+1$ bis auf 1 nahe genaue Werthe von $\sqrt{N}$. Man hat $(k+\frac{1}{2})^2 = k^2+k+\frac{1}{4}$, und $N=k^2+r$, wenn r den ganzzahligen Rest, welchen k gibt, bezeichnet. Werden diese Gleichungen von einander abgezogen, so erhält man $N-(k+\frac{1}{2})^2 = r-k-\frac{1}{4}$; ist nun $r>k$, so hat man $\sqrt{N}>k+\frac{1}{2}$, und $k+1$ liegt dem Werthe von $\sqrt{N}$ näher als k; das Gegentheil findet statt, wenn $r<k$. Je nachdem also der Rest $r >$ oder $<$ als die ganzzahlige Wurzel k ist, nimmt man $k+1$ oder k als erste Annäherung der Quadratwurzel von N.

4) Hat man die Rechnung des Wurzelausziehens so weit getrieben, daß man mehr als die Hälfte der Ziffern, welche man für die Wurzel erhalten will, kennt, so kann man die übrigen durch eine bloße Division finden, was die Annäherungsoperation bedeutend abkürzt.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens einzusehen, sei N die vorgelegte Zahl, deren Wurzel $a+x$ gesucht wird, a bezeichnet den nach der gewöhnlichen Methode gefundenen und x den noch fehlenden Theil, so daß $\sqrt{N}=a+x$. Es ist hierbei zu erinnern, daß um den Ziffern von a ihren gehörigen Werth zu verschaffen, man ihm zur Rechten n Nullen anhängen muß, d. h. so viel als x Ziffern hat, oder so viel, als in N noch Klassen neben die successiven Reste herunterzusetzen übrig bleiben. Unserer Bezeichnung zufolge haben wir $N=a^2+2a\,x+x^2$, woraus folgt: $\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a} = \frac{R}{2a}$, wo R den Rest $N-a^2$ darstellt, neben welchen sämmtliche noch nicht angewendeten Klassen mit je zwei Ziffern gesetzt sind. Da nun x aus n Ziffern besteht, so wird x^2 im höchsten Falle deren $2n$ haben, während laut der Annahme a wenigstens deren $n+1$ hat, auf welche n Nullen folgen. Dies gibt uns zu erkennen, daß $a>x^2$, folglich $\frac{x^2}{2a}<\frac{1}{2}$ ist. Man hat demnach $x=\frac{N-a^2}{2a}$, sobald nur der Theil in ganzen Zahlen von $\sqrt{N}$ verlangt wird, was immer statt findet, weil bei den Annäherungen selbst für die Wurzeln der Brüche immer eine solche Umformung mit den Zahlen vor sich geht, wodurch eine Wurzelausziehung mit nur ganzen Theilen vorzunehmen ist. (Arithm. §. 66).

Man dividire daher $N-a^2$ oder den Rest der Operation, vermittelst der man a gefunden hat, durch das Doppelte der Wurzel a; betrachte deshalb den bekannten Theil a der gesuchten Wurzel als einfache Einheiten (indem man die ihm zur Rechten anhängenden n Nullen unterdrückt), und lasse gleichfalls n Ziffern auf der Rechten von N weg.

Für $\sqrt{337679817}$ geben die drei ersten Klassen vorerst 183 als Wurzel, und 278 als Rest; dividirt man also 27898 durch zweimal 183 oder 366, so erhält man 76 für die beiden übrigen Ziffern der Wurzel, welche 18376 ist.

Ebenso erhält man $\sqrt{2} = 1{,}4142$, wenn man die Annäherung bis $\frac{1}{10000}$ treibt; um die vier folgenden Decimalziffern zu finden, dividirt man 38360000 durch 2×14142 oder 28284; der Quotient ist 1356, rc. Man findet sonach $\sqrt{2} = 1{,}4142135623732$, $\sqrt{3} = 1{,}7320508076$.

Anmerkung. Die Gleichung $\frac{N-a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}$ gibt, wenn a die Wurzel des größten in N enthaltenen Quadrats ist, also x nothwendigerweise einen Bruch darstellt, mithin $\frac{x^2}{2a}$ kleiner als x sein muß, auch zu nachstehender Methode, sich der Quadratwurzel einer Zahl nämlich durch gewöhnliche Brüche zu nähern, Anlaß. Man verlangt die Quadratwurzel aus 2. Da 1 das größte in 2 enthaltene Quadrat ist, so bleibt, wenn man es davon abzieht, 1 übrig. Der Rest durch das Doppelte der Wurzel a dividirt, gibt $\frac{1}{2}$ als Näherungswerth für x, mithin für erste Annäherung der Wurzel $\frac{3}{2}$. Man erhebt diese Zahl aufs Quadrat und zieht solches von 2 ab, man erhält den Rest $-\frac{1}{4}$. Die Formel $\frac{N-a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}$ wird hiernach $-\frac{1}{12} = x + \frac{x^2}{2a}$, da $a = \frac{3}{2}$. Setzt man $-\frac{1}{12}$ für x, so finden wir als zweite Annäherung der Wurzel $\frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$.

Diese Operation setzt man so weit fort, als man für nöthig erachtet.

5) Die Differenz der Cuben der auf einander folgenden ganzen Zahlen a und $a+1$ ist $3a^2+3a+1$, woraus folgt, daß so lange der Rest bei der Cubikwurzelausziehung kleiner ist, als das dreifache

Quadrat der Wurzel nebst den dreifachen der Wurzel plus der Einheit, die gesuchte Wurzel nicht zu klein genommen sei, was dem im §. 68 der Arithmetik Gesagten conform ist.

6) Hat man von der Cubikwurzel einer ganzen Zahl schon mehr Ziffern gefunden, als deren noch verlangt werden, so kann man die übrigen durch bloße Division hinlänglich genau finden. Denn bezeichnet hier a, x und N das Nämliche wie in 4, so hat man $\frac{N-a}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}$. Da $\frac{x^2}{a} < 1$ und $\frac{x^3}{3a^2} < 1$, weil $a > 10^{2n}$ und $x < 10^n$, so ist der Fehler, wenn man $\frac{N-a^3}{3a^2} = x$ setzt, weniger als zwei Einheiten in den letzten Ziffern von a.

§. 45. Man soll die Quadratwurzel aus

$$9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$$

ziehen; wir stellen dieses Polynom durch X dar und nennen, der Kürze halber, dasjenige Glied, wo der Buchstabe den höchsten Exponenten enthält, das größte Glied. Es sei x das größte Glied der gesuchten Wurzel, y die Summe der übrigen Glieder derselben. Hieraus folgt $X = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (§. 6); x^2 ist sichtbar das größte Glied des Quadrats X, also $x^2 = 9a^4$, oder $x = 3a^2$ als erstes Glied der Wurzel, und $X = 9a^4 + 6a^2y + y^2$. Zieht man $9a^4$ auf beiden Seiten ab, so kommt

$$-12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4 = 6a^2y + y^2,$$

y ist im Allgemeinen eben so gut wie $6a^2y$ ein Polynom; da nun y nur Glieder, in denen der Exponent von a geringer als 2 ist, enthalten kann, so ist klar, daß das größte Glied in $(6a^2 + y)\, y$ das Produkt aus $6a^2$ mit dem größten Gliede von y ausmacht; dieses letztere wird demnach der Quotient von $-12a^3b$ dividirt durch $6a^2$, das Doppelte der schon gefundenen Wurzel, sein. Hiernach ist $-2ab$ das zweite Wurzelglied.

Um die Rechnung zu beendigen, setzen wir $3a^2 - 2ab$, oder $x - 2ab = x'$, und stellen durch y' die übrigen Theile der gesuchten Wurzel dar. Wir haben sonach $X = x'^2 + 2x'y' + y'^2$, wo wir x'^2 auf beiden Seiten abziehen; x'^2 besteht aber aus x^2, was schon hinweggenommen ist, dann aus $-2x \times 2ab + (2ab)^2$, oder $-2ab\,(2x - 2ab)$. Wir schreiben folglich das zweite Wurzelglied $-2ab$

neben $6a^2$, das Doppelte des ersten Wurzelgliedes, multipliciren das Ganze mit $-2ab$ und ziehen das Resultat von dem obigen Reste ab. Auf diese Art haben wir

$$30a^2b^2 - 20ab^2 + 25b^4 = 2x'y' + y'^2.$$

Ist y' ein Polynom, so sieht man bald, daß das größte Glied $30a^2b^2$ das von $2x'y'$ ist, d. h. das Produkt des größten Gliedes von $2x'$ mit dem von y'. Wir dividiren also $30a^2b^2$ durch $6a^2$, der Quotient $5b^2$ wird das dritte Wurzelglied sein.

Wir setzen jetzt $3a^2 - 2ab + 5b^2$, oder $x' + 5b^2 = x''$, und bezeichnen die Summe der übrigen Glieder der Wurzel durch y''; wir haben alsdann $X - x''^2 = 2x''y'' + y''^2$. Um x''^2 abzuziehen, bemerken wir, daß, da schon x'^2 abgezogen wurde, vom letzten Reste $30a^2b^2 - 20ab^2 + 25b^4$ nur noch $2x' \cdot 5b^2 + (5b^2)^2$, oder $5b^2(2x' + 5b^2)$ abzuziehen bleibt. Wir schreiben daher $5b^2$ neben das doppelte Produkt $6a^2 - 4ab$ der beiden ersten gefundenen Wurzelglieder und multipliciren das Ganze mit dem dritten Gliede $5b^2$, und ziehen das Produkt vom zweiten Reste ab. Da man keinen Rest findet, so ist $X - x''^2 = 0$, woraus $y'' = 0$ und $x'' = \sqrt{X}$. Die verlangte Wurzel ist daher $3a^2 - 2ab + 5b^2$.

Nach diesen Betrachtungen wird nun die Operation folgendermaßen angeordnet:

	$9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$	$3a^2 - 2ab + 5b^2$
	$-9a^4$	
1r Rest	$-12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$	$(6a^2 - 2ab) \times -2ab$
	$+12a^3b - 4a^2b^2$	
2r Rest	$30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$	$6a^2 - 4ab + 5b^2$
3r Rest	0	$\times 5b^2$

Man ordnet also das Polynom, zieht die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede, und setzt die Operation, wie bei dem numerischen Wurzelausziehen, weiter fort.

Nachstehende Beispiele zeigen, daß dasselbe Verfahren bei der Wurzelausziehung von Größen, in denen negative oder gebrochene Exponenten, selbst imaginäre Ausdrücke, vorkommen, seine Anwendung findet.

I.

	$9a^4-12a^3\sqrt{-1}-2a^2(2-3\sqrt{-2})+4a\sqrt{2}-2$	$3a^2-2a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$
	$-9a^4$	
1r Rest	$-12a^3\sqrt{-1}-2a^2(2-3\sqrt{-2})+4a\sqrt{2}-2$	$(6a^2-2a\sqrt{-1})\times-2a\sqrt{-1}$
	$+12a^3\sqrt{-1}+4a^2$	
2r Rest	$6a^2\sqrt{-2}+4a\sqrt{2}-2$	$6a^2-4a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$
3r Rest	0	$\times+\sqrt{2}$

II.

	$4a^2-12ab^{\frac{1}{2}}+9b+12-18a^{-1}b^{\frac{1}{2}}+9a^{-2}$	$2a-3b^{\frac{1}{2}}+3a^{-1}$
	$-4a^2$	
1r Rest	$-12ab^{\frac{1}{2}}+9b+12-18a^{-1}b^{\frac{1}{2}}+9a^{-2}$	$(4a-3b^{\frac{1}{2}})\times-3b^{\frac{1}{2}}$
	$+12ab^{\frac{1}{2}}-9b$	$4a-6b^{\frac{1}{2}}+3a^{-1}$
2r Rest	$12-18a^{-1}b^{\frac{1}{2}}+9a^{-2}$	$\times+3a^{-1}$
3r Rest	0	

III.

	x^2-a^2	$x^2-\frac{1}{2}a^2x^{-1}-\frac{1}{8}a^4x^{-3}-\ldots\ldots$
	$-x^2$	
1r Rest	$-a^2$	$(2x-\frac{1}{2}a^2x^{-1})\times-\frac{1}{2}a^2x^{-1}$
	$+a^2-\frac{1}{4}a^4x^{-2}$	$2x-a^2x^{-1}-\frac{1}{8}a^4x^{-3}$
2r Rest	$-\frac{1}{4}a^4x^{-2}$	$\times-\frac{1}{8}a^4x^{-3}$
	$+\frac{1}{4}a^4x^{-2}-\frac{1}{8}a^6x^{-4}-\frac{1}{64}a^8x^{-6}$	
3r Rest	$-\frac{1}{8}a^6x^{-4}$ rc.	

Dies Beispiel zeigt, wie man sich zu verhalten hat, wenn die Wurzel sich nicht genau ausziehen läßt, was man daran erkennt, wenn man ein Wurzelglied findet, wo a einen niedrigern Exponenten als die Hälfte des kleinsten Exponenten im Quadrate hat. Man hat hier

$$\sqrt{x^2-a^2}=x-\frac{a^2}{2x}-\frac{a^4}{ax^3}-\text{rc.}$$

IV. Ebenso erhält man $\sqrt{a^2+x}=a+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^3}+\frac{x^4}{16a^5}-$ rc.

Anmerkung. Die beiden letzten Formeln können zur annähernden Ausziehung der Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl angewendet werden, man braucht deshalb nur diese Zahl in zwei Theile zu zerlegen, so daß der eine ein vollkommenes Qua-

drat ist; diesen würde man für a^2 nehmen, und der andere würde x sein. Es sei z. B. die Zahl 160; man würde sie in $144 + 6$ zerlegen, weil $144 = 12^2$. Hiernach $a^2 = 144$ und $x = 6$. Hieraus ergibt sich mittelst der Formel IV $\sqrt{150} = 12 + \frac{1}{4} - \frac{1}{384} + $ ꝛc. $= 12{,}2474$ bis auf die vierte Decimalstelle genau.

§. 46. Der Cubus von $x + y$ ist $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ (§. 6); es wird jetzt nicht schwer sein, hiernach die vorhergehenden Prinzipien auf die Bestimmung der Cubikwurzel aus einem Polynom in Anwendung zu bringen. Folgende zwei Beispiele werden ausreichen, um zu zeigen, wie man zu verfahren hat:

I.

	$8a^6 - 36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6$	$2a^2 - 3b^2$ Wurzel.
	$-8a^6$	$12a^4 - 18a^2b^2 + 9b^4$
1r Rest	$-36a^4b^2 + 54a^2b^4 - 27b^6$	$\times - 3b^2$
2r Rest	0	

Zu diesem Zweck ordne man das Polynom, suche die dritte Wurzel vom ersten Gliede $8a^6$, solche ist $2a^2$; ziehe dann $8a^6$ vom vorgelegten Polynom ab. Das erste Glied $-36a^4b^2$ des erlangten Restes dividire durch $12a^4$, das Dreifache des Quadrats von $2a^2$; der Quotient $-3b^2$ ist das zweite Wurzelglied. Neben $12a^4$ setze $-18a^2b^2 + 9b^4$, oder das Dreifache des Produktes aus $-3b^2$ mit dem ersten Wurzelgliede $2a^2$, und das Quadrat von $-3b^2$; dieses Trinom wird mit $-3b^2$ multiplicirt, und das Resultat vom ersten Reste abgezogen. Da der Rest Null wird, so ist $2a^2 - 3b^2$ die genaue Cubikwurzel des vorgelegten Polynoms. Hätte man einen zweiten Rest erhalten, so würde man mit demselben wie oben verfahren.

II.

	$a^3 + x$	$a + \frac{x}{3a^2} - \frac{x^2}{9a^5} + \frac{5x^3}{81a^8} -$ ꝛc.
	$-a^3$	
1r Rest	x	
	$x + \frac{x^2}{3a^3} + \frac{x^3}{27a^6}$	
2r Rest	$-\frac{x^2}{3a^3} - \frac{x^3}{27a^6}$ ꝛc.	

Anmerkung. Um diese Formel zur annähernden Ausziehung der dritten Wurzel aus einer gegebenen Zahl anzuwenden, würde man diese wie in IV des vorigen Paragraphs in zwei Theile theilen, so daß der eine ein vollkommener Cubus ist. Für die Cubikwurzel aus 2 gäbe die Formel die Reihe

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{5}{81} \text{ ic.}$$

Die Ausziehung der vierten, fünften und höhern Wurzeln wollen wir hier übergehen.

Von den Gleichungen des zweiten Grades.

§. 47. Wenn man alle Glieder auf eine Seite schafft, diejenigen Glieder, welche x^2 enthalten, in eins vereiniget, das Nämliche mit den Gliedern, worin x Factor ist, und mit den bekannten Gliedern vornimmt; so wird die Gleichung vom zweiten Grade die Form $Ax^2 + Bx + C = 0$ haben. Setzt man $\frac{B}{A} = p$ und $\frac{C}{A} = q$, so hat man $x^2 + px + q = 0 \ldots (1)$, eine Gleichung, welche alle Gleichungen vom zweiten Grade mit einer Unbekannten darstellen kann, wo p und q bekannte positive oder negative Größen bezeichnen.

Anmerkung. Sind nur Glieder mit x^2 und bekannte Glieder vorhanden, so heißt die Gleichung eine rein quadratische. Sie heißt aber eine unreine, gemischte, wenn ausser den Gliedern mit x^2 und den bekannten auch noch Glieder mit x in der Gleichung vorkommen.

Dividiren wir $x^2 + px + q$ durch $x - a$, wo a irgend eine Zahl vorstellt, so kommt $x + a + p$ als Quotient, und $a^2 + pa + q$ als Rest. Dieser Rest ist Null oder er ist es nicht, je nachdem a eine Wurzel oder keine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist. (Weil man auch durch Wurzelausziehung die der Gleichung entsprechenden Werthe findet, so nennt man solche die Wurzeln der Gleichung.) Jede Größe, die Wurzel einer Gleichung vom zweiten Grad ist, gibt folglich einen Binomialfactor $(x - a)$ des ersten Theils dieser Gleichung, die hiernach die Form $(x - a)(x + a + p) = 0$ annimmt.

Nun ist es einleuchtend, daß ein Produkt gleich Null ist, wenn irgend einer seiner Factoren Null ist; man hat also $(x - a)$

$(x + a + p) = 0$, nicht allein wenn $x - a = 0$, was $x = a$ gibt, sondern auch noch, wann $x + a + p = 0$, was $x = -a - p$ gibt. Folglich läßt

1) Jede Gleichung vom zweiten Grade, die eine Wurzel a hat, auch noch eine zweite $= -(a + p)$ zu.

2) Eine solche Gleichung kann nur zwei Wurzeln haben; dieser Satz wird später erwiesen werden.

3) Die Summe der beiden Wurzeln $+a$ und $-(a+p)$ ist $-p$, und ihr Produkt ist $-(a^2 + ap) = q$, weil $a^2 + pa + q = 0$. Folglich ist der Coefficient von x gleich dem Entgegengesetzten der Summe der Wurzeln, und das dritte Glied gleich dem Produkte der Wurzeln. So ist $x = 5$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$, wie man aus der Substitution ersieht. Das erste Glied der Gleichung findet man durch $x - 5$ theilbar; der Quotient ist $x - 3$; die beiden Wurzeln sind 3 und 5, deren Summe 8 und Produkt 15 beträgt.

Anmerkung. Die Werthe $x = a$ und $x = -(a + p)$ finden nicht gleichzeitig statt, sondern einer nach dem andern; x stellt eine unbekannte Größe dar, kann daher unter Umständen verschiedene Werthe bezeichnen. Und dies ist hier der Fall; die obigen Werthe genügen, obgleich sie verschieden sind, beide der Aufgabe. Will man z. B. eine Zahl finden, deren Quadrat um 15 vermehrt gleich dem Achtfachen der gesuchten Zahl sei, so hat man die vorige Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$. Die zwei verschiedenen Zahlen 5 und 3 besitzen also die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

4) Es ist leicht, eine Gleichung vom zweiten Grade, deren Wurzeln k und l gegeben sind, anzuschreiben; man setze ihre Summe $= k + l$ und ihr Produkt $= kl$, wodurch man erhält $x^2 - (k + l)x + kl = 0$. Man kann auch das Produkt $(x - k)(x - l)$ bilden. Sollen z. B. 5 und -7 die Wurzeln sein, so multiplicirt man $x - 5$ mit $x + 7$; oder man nimmt $5 - 7 = -2$, fünfmal $-7 = -35$, ändert das Zeichen der Summe, wodurch man $x^2 + 2x - 35 = 0$ als gesuchte Gleichung erhält.

5) Die Gleichung (1) auflösen, kommt also darauf zurück, zwei Zahlen zu suchen, deren Summe $-p$ und Produkt $+q$ sei.

6) Es kann sich ereignen, daß die Wurzeln k und l gleich sind;

alsdann sind die Factoren $x - k$ und $x - l$ gleich, und $x^2 + px + q$ ist das Quadrat von einem dieser Factoren.

§. 48. Um zur Auflösung der Gleichung (1) zu gelangen, bemerken wir, daß im Falle $x^2 + px + q$ ein Quadrat wäre, man durch Ausziehung der Quadratwurzel nur noch eine Gleichung vom ersten Grad haben würde. Vergleichen wir dieses Trinom mit $(x+n)^2$ oder $x^2 + 2xn + n^2$, wo n willkührlich ist, so werden die beiden ersten Glieder dieser Trinome gleich sein, wenn wir $n = \frac{1}{2}p$ setzen. Findet sich hernach n^2 oder $\frac{1}{4}p^2 = q$, so ist $x^2 + px + q$ das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$; das letzte Trinom ist nur dann ein vollständiges Quadrat, wenn $\frac{1}{4}p^2 = q$. Führt man anstatt p und q ihre Werthe $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ ein, so erhält man zwischen den Coefficienten die Relation $B^2 - 4AC = 0$, damit $Ax^2 + Bx + C$ ein vollkommenes Quadrat sei.

In dem Falle, daß $\frac{1}{4}p^2 = q$, geht die vorgelegte Gleichung in $(x + \frac{1}{2}p)^2 = 0$ über, und die beiden Wurzeln sind $-\frac{1}{2}p$. Findet diese Bedingung nicht statt, so kommt, wenn wir $\frac{1}{4}p^2 - q$ auf beiden Seiten der Gleichung hinzufügen, $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$; zieht man aus beiden Theilen die Wurzel, so ist $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, woraus $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ . . . . (2)

Den Grund für das doppelte Zeichen $\pm$ haben wir in §. 35 angegeben. Der Werth von x ist also gleich dem Entgegengesetzten des halben Coefficienten des zweiten Gliedes plus oder minus der Quadratwurzel aus der Summe der auf die zweite Seite gebrachten bekannten Größe, und des Quadrats des genannten halben Coefficienten. Man wird demnach von jeder Gleichung zur Stelle die Wurzel finden können, ohne gerade nöthig zu haben, in ihr die vorigen Operationen von Neuem wieder zu verrichten.

Für $x^2 - 8x + 15 = 0$ findet man

$$x = 4 \pm \sqrt{(16 - 15)} = 4 \pm 1, \text{ d. h. } x = 5 \text{ und } = 3.$$

Ebenso gibt $x^2 + 2x = 35$

$$x = -1 \pm \sqrt{(35 + 1)} = -1 \pm 6, \text{ oder } x = 5 \text{ und } = -7.$$

§. 49. Das Resultat (2) bietet verschiedene Fälle dar. Wir setzen der Kürze halber $\frac{1}{4}p^2 - q = m$, woraus $q = \frac{1}{4}p^2 - m$; dadurch wird $x^2 + px + q$ in $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 - m$, oder $(x + \frac{1}{2}p)^2 - m$ umgeändert; diese Größe soll nun durch gewisse Werthe von x auf Null gebracht werden.

1) m sei negativ; da $\frac{1}{4}p^2$ immer positiv ist, so hat dieser Fall nur statt, wenn q auf der ersten Seite der vorgelegten Gleichung positiv und $> \frac{1}{4}p^2$ ist. Alsdann wird aber diese Gleichung $(x + \frac{1}{2}p)^2 + m = 0$; man soll also die Summe zweier positiven Größen Null machen, ein offenbar ungereimtes Problem. Da man hier $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$ findet, so kann das Symbol $\sqrt{-m}$, das an und für sich absurd ist, dazu dienen, diesen Fall zu bezeichnen. Das Problem ist folglich ungereimt, sobald die Wurzeln imaginär sind, d. h. wann q positiv auf der ersten Seite der Gleichung (1) ist, und das Quadrat des halben Coefficienten p des zweiten Gliedes übertrifft.

Wir sagen aber in einem solchen Falle dennoch, die Gleichung habe zwei Wurzeln, weil diese Werthe $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{-m}$, den nämlichen Rechnungen, als wenn sie reell wären, unterworfen, d. h. durch ihre Substitution anstatt x in die Gleichung, einer solchen genug thun; wir betrachten dies als eine reine algebraische Thatsache. Gerade so können die negativen Werthe, die eigentlich an und für sich keinen Sinn haben, als Auflösung einer Gleichung gelten, ohne deswegen der Aufgabe zu entsprechen, in so fern nicht irgend eine Modification in der Aussage derselben eingetreten ist.

Anmerkung. Es gibt Aufgaben, die Widersprüche enthalten, also keiner wirklichen Auflösung fähig sind. Die Algebra beweist durch ihre Antwort, daß das Gesuchte gar nicht vorhanden ist. Hierher gehört die Aufgabe: Eine Zahl zu finden, welche die Eigenschaft hat, daß ihr Quadrat um 20 kleiner ist, als das vierfache Produkt derselben. Man hat die Gleichung $x^2+20 = 4x$, oder $x^2-4x = -20$; woraus $x = 2 \pm \sqrt{-4}$. Es existirt also keine Zahl, die die verlangte Eigenschaft besitzt.

2) m sei Null; q muß deshalb gleich $\frac{1}{4}p^2$ und positiv auf der ersten Seite der Gleichung (1) sein; alsdann ist $x^2 + px + q$ das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$, und die Wurzeln sind gleich; es ist dies der Uebergang von den imaginären zu den reellen Wurzeln.

3) m sei positiv; q ist dann auf der ersten Seite der Gleichung negativ, es sei denn, daß q positiv und $< \frac{1}{4}p^2$ wäre. In diesem Falle ist (§. 6)

$$(x+\tfrac{1}{2}p)^2 - m = (x + \tfrac{1}{2}p + \sqrt{m}) \times (x + \tfrac{1}{2}p - \sqrt{m}).$$

Es sind dies die Factoren der ersten Seite der vorgelegten Gleichung (1);

die Wurzeln sind $-\frac{1}{2}p-\sqrt{m}$ und $-\frac{1}{2}p+\sqrt{m}$, deren Summe $-p$ und Produkt $\frac{1}{4}p^2-m$ oder q macht.

4) Ist m ein vollständiges Quadrat, so sind die beiden Wurzeln rational.

5) Sollen beide Wurzeln reell sein und einerlei Zeichen haben, so muß $\frac{1}{2}p$ die Radicalgröße, welche das Zeichen $\pm$ hat, übertreffen; also $\frac{1}{2}p>\sqrt{m}$, oder $\frac{1}{4}p^2>\frac{1}{4}p^2-q$, oder endlich $q>0$. Wenn q also negativ ist, so haben die Wurzeln verschiedene Zeichen; ist es aber positiv und $<\frac{1}{4}p^2$, so haben sie einerlei Zeichen, und zwar ist es dem von p entgegengesetzt. Siehe §. 6, was die Auslegung der negativen Wurzeln anlangt.

Anmerkung. Man soll z. B. eine Zahl finden, deren Quadrat um das Fünffache dieser Zahl, und noch um 5 vermehrt, eine Summe gibt, die gleich 1 ist. Man hat also die Gleichung $x^2+5x+5=1$, oder $x^2+5x=-4$; woraus $x=-1$ und -4. Die Zeichen $-$ deuten auf eine in der Aussage zu machende Modification hin. Man ändert hiernach die Aufgabe in folgende um: Eine Zahl zu finden, die die Eigenschaft hat, daß wenn man ihr fünffaches Produkt von ihrem Quadrat abzieht und zum Reste 1 addirt, das Resultat gleich 1 sei. Man erhält $x^2-5x+5=1$, oder $x^2-5x=-4$, was für x die positiven Werthe 4 und 1 gibt.

6) Ist $q=0$, so hat man, ohne zur Formel (2) seine Zuflucht zu nehmen, $x^2+px=x(x+p)=0$; woraus $x=0$ und $x=-p$.

7) Ist $p=0$, so hat man die reine quadratische Gleichung $x^2+q=0$, woraus $x=\pm\sqrt{-q}$, ein reeller oder imaginärer Ausdruck, je nachdem das Zeichen von q beschaffen ist.

Anmerkung. Man könnte glauben, das doppelte Zeichen $\pm$ auch vor x setzen zu müssen, was geben würde $\pm x=\pm\sqrt{q}$. In diesem Falle hätte man

$$+x=+\sqrt{q},\ +x=-\sqrt{q}$$
$$-x=-\sqrt{q},\ -x=+\sqrt{q};$$

es ist indessen leicht einzusehen, daß mit den beiden obern Gleichungen die beiden untern zusammenfallen, wenn man die letztern beiderseits mit -1 multiplicirt: $\pm x=\pm\sqrt{q}$ sagt also nichts mehr als $x=\pm\sqrt{q}$. Ueberdies ist x als Stellvertreter der Unbekannten mit dem Zeichen $+$ in den Calcul eingeführt worden, in diesem Zustande also sein Werth zu bestimmen.

8) Eine unreine quadratische Gleichung läßt sich auf eine reine quadratische zurückführen. Man setze nämlich $x = y - \frac{1}{2}p$. Dieser Werth für x in die Gleichung (1) substituirt, verwandelt sie in $y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$, woraus $y = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; also $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$.

9) Hat die vorgelegte Gleichung die Form $Ax^2 + Bx + C = 0$, so können wir nach dem Gesagten das erste Glied von seinem Coefficienten A befreien, indem wir alle Glieder mit diesem Coefficienten dividiren. Wir können aber auch dieses Glied zu einem vollständigen Quadrat machen, indem wir alle Glieder mit $4A$ multipliciren. Wir bekommen dann $4A^2x^2 + 4ABx + 4AC = 0$.

Vergleichen wir, wie oben, diese Gleichung mit dem Quadrate von $2Ax + n$, so sieht man, daß, um das Quadrat zu vollenden, man $n = B$ zu setzen und B^2 auf beiden Seiten hinzuzufügen hat. Wir haben folglich

$$(2Ax + B)^2 = B^2 - 4AC, \text{ und } x = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}.$$

Löst man auf diese Weise die Gleichung

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

in Bezug auf y auf, so findet man

$$y = \frac{-Bx - D \pm \sqrt{[(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF]}}{2A}.$$

10) Man hat $Ax^2 + Bx + C = A\,[(x + \frac{1}{2}p)^2 - m]$; die Wurzeln sind imaginär, gleich oder reell, je nachdem m negativ, Null oder positiv ist. In den beiden ersten Fällen hat das Produkt oder das Polynom $Ax^2 + Bx + C$, da der Multiplicator von A positiv ist, einerlei Zeichen mit A, welchen Werth man auch dem x beilegen mag. Ist aber m positiv, und sind a und b die reellen Wurzeln, so hat man $Ax^2 + Bx + C = A\,(x - a)\,(x - b)$. Hieraus ist ersichtlich, daß das Resultat einerlei Zeichen mit A hat, sobald man dem x größere oder kleinere Werthe als a und b gibt; ein verschiedenes Zeichen wird es aber erhalten, wenn x zwischen a und b liegt. Das Trinom, welches in den andern Fällen für alle möglichen Werthe von x dasselbe Zeichen beibehält, ändert folglich jetzt zweimal sein Zeichen, sobald man nämlich x von einem zwischen a und b gelegenen Zustande zu einem andern, der entweder $>$ oder $<$ als a und b ist, übergehen läßt.

Anmerkung. Hier schließt sich die Aufgabe an, für x nämlich einen Werth zu finden, der das Polynom $x^2 + px + q$ gewiß

positiv mache. Man sieht leicht, daß der ungünstigste Fall derjenige ist, wo p und q beide negativ sind. Ist m gleich der größern von den beiden Zahlen p und q, so wird die Größe, welche $x^2 > mx + m$ macht, offenbar auch $x^2 > px + q$ machen. Diese Ungleichheit wird nun durch die Gleichung $x^2 = mx + m + 1$ erfüllt. Durch Versetzung erhält man aus derselben $x^2 - 1 = m(x+1)$, oder $x - 1 = m$, woraus $x = m + 1$. Substituirt man also den größten der Coefficienten des Polynoms, vermehrt um 1 statt x, so erhält dasselbe einen positiven Werth.

Uebungsbeispiele:

Erster Fall:

$9x^2 - 12x + 8 = 0 \ldots x = \frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{-1}$,

zweiter Fall:

$9x^2 - 12x + 4 = 0 \ldots x = \frac{2}{3}$,

dritter und vierter Fall:

$9x^2 - 12x + 3 = 0 \ldots x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$, oder $x = 1$, und $x = \frac{1}{3}$,

$2x^2 + 3x + 1 = 0 \ldots x = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, oder $x = -\frac{1}{2}$, und $x = -1$,

$x^2 - x - 2 = 0 \ldots x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, oder $x = 2$, und $x = -1$,

fünfter Fall:

$x^2 - 5x = -6 \ldots x = 3$, und $x = 2$,

siebenter Fall:

$x^2 - 9 = 0 \ldots x = 3$, und $x = -3$,

$x^2 + 9 = 0 \ldots x = \pm 3\sqrt{-1}$.

§. 50. Beispiele zur Uebung im Anschreiben der Gleichungen und zur Auslegung der Werthe der Unbekannten:

I. Eine Zahl x zu finden, deren Quadrat um 2 verringert zum Reste 1 gibt? Man hat $x^2 - 2 = 1$, woraus $x = \pm\sqrt{3}$.

II. Eine Zahl a dergestalt in zwei Theile zu zerlegen, daß das $m$fache des ersten mit dem $n$fachen des zweiten multiplicirt das Produkt p gäbe? Man hat

$$mxn(a-x) = p, \text{ woraus } x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{p}{mn}\right)}.$$

Soll man a in zwei Theile theilen, deren Produkt gleich p sei, so muß man $m = n = 1$ setzen. Da die Wurzeln imaginär werden, sobald $p > \frac{1}{4}a^2$, so sieht man, daß das Produkt das Quadrat der

Hälfte von a nicht übersteigen kann, d. h. das Quadrat von $\frac{1}{2}a$ ist das größtmögliche Produkt, welches man aus den Theilen von a bilden kann. (§. 6.)

III. Aus dem Produkte p zweier Zahlen und ihrer Differenz d eine jede derselben zu finden? Man hat $xy = p$, $x - y = d$; woraus $x = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + p)}$, und $y = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + p)}$.

IV. Die Summe zweier Zahlen ist $= a$, und die ihrer Cuben $= b$. Welche Zahlen sind es?
Man hat $x + y = a$, $x^3 + y^3 = b$; hieraus ergibt sich $a^3 - 3a^2x + 3ax^2 = b$. Setzt man $b = af$, so findet man $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{3}f - \frac{1}{12}a^2)}$, und $y = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{3}f - \frac{1}{12}a^2)}$.

V. Welche Zahl ist es, deren $p$te Potenz $n$mal genommen, gleich dem $m$fachen ihrer $(p + 2)$ten Potenz sei? $x = \pm\sqrt{\frac{n}{m}}$.

VI. Mehrere Personen sollen die Unkosten eines Prozesses mit 800 fl. tragen. Drei sind aber unter ihnen unzahlfähig; aus diesem Grunde sind die übrigen genöthigt, ausser ihrem Antheile jede 60 fl. mehr zu geben. Wie viel Personen sind es? Man hat $\frac{800}{x+3} = \frac{300}{x} - 60$; woraus $x^2 + 3x = 40$ und $x = 5$. Die negative Wurzel $- 8$ auszulegen, ist leicht.

VII. $A \overset{D}{\text{———}} B$. In den Punkten A und B, deren Distanz a ist, befinden sich zwei Lichter von verschiedener Hellung; die Lichtstärke von A verhält sich zu der von $B = m : 1$. Den Punkt D in dieser Linie zu finden, wo beide Lichter gleiche Beleuchtung hervorbringen, wenn man weiß, daß die Erleuchtung von einem leuchtenden Punkte im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung vom leuchtenden Punkte abnimmt.

Es seien α und β die Erleuchtungsgrade der Lichtpunkte A und B in der Entfernung 1; $\frac{\alpha}{1}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{9}$ ... werden dann diejenigen darstellen, welche der Punkt in den Entfernungen 1, 2, 3 ... von A erhält, also $\frac{\alpha}{x^2}$ die des Punktes D, welcher der Entfernung $x = AD$ entspricht, da $BD = a - x$, so ist die von B ausgehende Beleuchtung in $D = \frac{\beta}{(a-x)^2}$. Der Aufgabe zufolge ist $\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{(a-x)^2}$,

woraus $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{x}{a-x}\right)^2$. Setzt man $\alpha = m\beta$, zieht dann die Wurzel aus, so findet man endlich $x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} \pm 1}$ oder $x = \frac{a}{m-1}(m \mp \sqrt{m})$.

Im Allgemeinen muß man die doppelte Irrationalität in den beiden Gliedern des Bruches, namentlich die im Nenner, vermeiden. (Arithmetik §. 65). Man hat deshalb hier oben und unten mit $\sqrt{m} \mp 1$ multiplicirt, was den Nenner auf $m - 1$, und den Zähler auf $a\sqrt{m}$ $(\sqrt{m} \pm 1)$ bringt. In ähnlichen Fällen wird man ein Gleiches thun.

VIII. Ein Bruch $\frac{a}{b}$ ist gegeben; welche Zahl ist es, die das eine Mal dem Zähler, das andere Mal dem Nenner hinzugefügt, das erste Resultat gleich $k$mal dem zweiten macht? Man hat die Gleichung $\frac{a+x}{b} = \frac{ka}{b+x}$, woraus

$x^2 + (a+b)x = ab(k-1)$; folglich $x = -\frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{[(a-b)^2 + 4abk.]}$

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnissen.

Von den Proportionen.

§. 51. 1) Die arithmetische Proportion $a \cdot b : c \cdot d$ ist gleichgeltend mit $a - b = c - d$, woraus $a + d = c + b$. In einer stetigen Aequidifferenz ist $\div a \cdot b \cdot d$, woraus $2b = a + d$. (Siehe Arith. §. 72.)

2) Es sei die geometrische Proportion $a : b = c : d$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; man hat $ad = bc$, woraus $d = \frac{bc}{a}$. In einer stetigen Proportion $\div\!\!\div a : b : d$ hat man $b = \sqrt{ad}$. (Siehe Arith. §. 72).

3) Die Gleichung $a^2 - b^2 = m - m^2$ oder $(a+b)(a-b) = m(1-m)$ gibt die Proportion $\frac{a+b}{m} = \frac{1-m}{a-b}$. — Eben so leitet man aus $1 - x^2 = a$ die Proportion $\frac{1+x}{1} = \frac{a}{1-x}$ ab.

4) Man kann zu beiden Theilen der Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eine und dieselbe Größe m hinzusetzen, oder davon wegnehmen, so daß man erhält

$$\frac{a \pm mb}{b} = \frac{c \pm md}{d}, \text{ woraus } \frac{a \pm mb}{c \pm md} = \frac{b}{d}.$$

Ist $m = 1$, so wird man blos haben $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$. (Siehe Arithmetik §. 73.)

5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots$ sei eine Reihe gleicher Verhältnisse, so daß $\frac{a}{b} = q$, oder $a = bq$, $c = dq$, $e = fq \ldots$. Fügt man alle diese Gleichungen Theil für Theil an einander, so kommt $a + c + e + \ldots\ldots = q(b + d + f + \ldots.)$; woraus $\frac{a+c+e+\ldots.}{b+d+f+\ldots.} = q = \frac{a}{b}$. (Arithmetik §. 73.)

6) Aus der Proportion $a : b = c : d$ schließt man

$$a^m : b^m = c^m : d^m, \text{ und } \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

Anmerkung. Wir sagen es wiederholt, die Lehre der Proportionen ist unnöthig; einfacher ist's, statt derselben die ihnen entsprechenden Gleichungen zu gebrauchen.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 52. Es sei $\div\, a \cdot b \cdot c \ldots\, i \cdot k \cdot l$ eine arithmetische Progression in der d das Verhältniß oder die Differenz bezeichnet. Man hat die $(n-1)$ Gleichungen $b = a + d$, $c = b + d, \ldots.\; l = k + d$; werden sie addirt, so kommt $l = a + d\,(n-1)$, wie in §. 85 der Arithmetik.

Man nennt diesen Ausdruck für das $n$te Glied der Reihe das allgemeine Glied derselben; es stellt, wenn man nach und nach $n = 1, 2, 3 \ldots$ setzt, sämmtliche Glieder dar.

Bezeichnet s das summatorische Glied oder Summenglied der Progression, d. h. die Summe ihrer n ersten Glieder, so wird man haben:

$$s = a + b + c + \ldots\ldots + i + k + l,$$

oder $s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots\ldots [a + (n-1)d]$.

Schreibt man die Glieder des zweiten Theils in umgekehrter Ordnung, so wird man ferner haben

$$s = l + (l-d) + \ldots\ldots + [l-(n-1)d].$$

Addirt man die beiden letztern Gleichungen, so ist, da jedes Paar correspondirender Glieder eine und dieselbe Summe hervorbringt, $2s$ offenbar $= (a+l)$, so oftmal genommen, als Einheiten in n enthalten sind, oder es ist $s = \frac{1}{2}n(a+l)$. Man kann überhaupt bemerken, daß die Summe der beiden äussersten Glieder gleich der Summe von je zwei andern ist, deren eins so weit vom ersten Glieder als das andere vom letzten absteht. Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so ist die Summe der beiden äussersten Glieder gleich dem doppelten mittlern Gliede.

§. 53. In den beiden Gleichungen $l = a + (n-1)d$ und $s = \frac{n(a+l)}{2}$ kommen fünf Größen vor. Sind also drei von ihnen gegeben, so können die zwei andern mit Hülfe dieser Gleichungen gefunden werden.

Anmerkung. Es entspringen hieraus eigentlich zwanzig verschiedene Aufgaben; die Aufstellung dieser verschiedenen Fälle ist leicht und eine gute Uebung.

Wir geben nun einige Beispiele zur Anwendung der Lehre von den arithmetischen Progressionen.

1. Man soll n finden, wenn a, d und s bekannt sind? Die Elimination von l gibt $s = an + \frac{1}{2}dn(n-1)$; woraus

$$n = \tfrac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} \pm [\tfrac{1}{2} - \tfrac{a}{d}]^2\right)}.$$

Ein freifallender Körper z. B. fällt in der ersten Sekunde einen Raum von 4,9 Meter, und in jeder folgenden Sekunde immer 9,8 Meter mehr als in der vorhergehenden. Wie viel Sekunden braucht der Körper zu einem Fallraum von 400 Meter? Man hat $s = 400$, $a = 4{,}9$, $d = 2a = 9{,}8$; woraus $n = \sqrt{\frac{s}{a}} = \sqrt{\frac{400}{4{,}9}} = 9'',03$ und $l = 83^{m}, 6$ ohngefähr.

II. Wie viel Schläge macht eine Uhr innerhalb zwölf Stunden? Schlägt sie nur die ganzen Stunden, so kommt $1+2+3+\ldots.+12$; woraus $s = 6 \times 13 = 78$. Zeigt sie auch die halben Stunden an, so kommt $2+3+4\ldots.+13$; woraus $s = 90$.

III. Es liegen eine Anzahl Kanonenkugeln in 18 Reihen über einander, so daß jede untere Reihe immer zwei Kugeln mehr als die vorhergehende enthält. Wie viel Kugeln liegen in der untersten Reihe und wie viel in allen diesen Reihen zusammen, wenn die oberste deren 3 enthält? Hier ist $a = 3$, $n = 18$, $d = 2$; man findet $l = 37$ und $s = 360$.

IV. Man soll zwischen zwei gegebenen Zahlen a und l eine Anzahl m mittlere arithmetische Proportionalen einschalten. Da $m+2 = n$, so ist $l = a + d(m+1)$, woraus $d = \frac{l-a}{m+1}$, wie in §. 85 der Arithmetik.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 54. Es sei $\div a : b : c : d \ldots. i : l$, eine geometrische Progression wo q das Verhältniß oder den Quotienten darstellt. Man hat die $(n-1)$ Gleichungen $b = aq$, $c = bq$, $d = cq \ldots.\ l = iq$; multiplicirt man diese Gleichungen Glied für Glied mit einander und unterdrückt die gemeinschaftlichen Factoren, so kommt $l = aq^{n-1}$, wie in §. 86 der Arithmetik, als Ausdruck für das allgemeine Glied. Man kann einer geometrischen Reihe immer folgende Gestalt $\div a : aq : aq^2 \ldots. : aq^{n-1}$ geben; die ganzen und successiven Potenzen einer und derselben Größe bilden also eine geometrische Progression. Dasselbe gilt bei jeder Reihe von Gliedern, deren Exponenten in arithmetischer Progression stehen; eine solche Reihe ist $bx^m + bx^{m+h} + bx^{m+2h} + \ldots.$, die auf die erste zurückkommt, wenn man $a = bx^m$ und $q = x^h$ setzt.

Addiren wir unsre $(n-1)$ ersten Gleichungen, so kommt

$$(b+c+d+\ldots.+l) = (a+b+c+\ldots.+i)\,q.$$

Bezeichnet man das summatorische Glied durch s, so wird man

$$b+c+d+\ldots.+l = s-a, \text{ und } a+b+c\ldots.+i = s-l$$

haben, woraus man schließt

$$s-a = (s-l)\,q, \text{ oder } s = \frac{lq-a}{q-1}.$$

Bei einer abnehmenden Reihe findet dies Alles ebenfalls statt, nur ist $q < 1$. In dem Maße aber als die Reihe fortgesetzt wird, nähert sich die Summe s der in Betracht gezogenen Glieder immer mehr und mehr der Summe S der ganzen Reihe. Es sei nun α die Differenz $S - s$, eine ins Unendliche abnehmende Größe; eben so kann l kleiner als jede angebliche noch so kleine Größe werden. Hiernach (§. 22) $S - \alpha = \frac{a}{1-q} - \beta$, wenn $\beta = \frac{lq}{1-q}$ gesetzt wird, woraus

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Wir haben folglich, wie in §. 8, die vollständige Summe einer ins Unendliche fortlaufenden geometrischen Reihe, deren erstes Glied a und Verhältniß q ist, wo $q < 1$. Wir würden den nämlichen Ausdruck für S gefunden haben, wenn wir in dem Werthe von s die Größe l, als eine unendlich kleine Größe, gleich Null gesetzt hätten.

Anmerkung. Die Größe $\frac{a}{1-q}$ ist also die Grenze, welcher sich die durch 1 ausgedrückten Partialsummen immer mehr und mehr nähern. Wenden wir dies auf die Progression $\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} \ldots$ an, so ist $S = 2$. Je mehr Glieder wir folglich in jener Progression nehmen, desto mehr wird sich ihre Summe der Zahl 2 nähern.

Ist $q = 1$, so ist $s = \frac{ql - a}{q-1} = a\,\frac{(q^n - 1)}{q-1} = \frac{0}{0}$. Die Progression ist aber in diesem Falle $a + a + a + a \ldots$, die Summe der n ersten Glieder, also $= na$. Der Grund der Unbestimmtheit liegt in der Gleichung selbst, aus der s abgeleitet wurde. Wir haben nämlich $S(q-1) = a(q^n - 1)$, welcher Ausdruck für $q = 1$ identisch wird. Die Gleichung $s\,(1-1) = 0$, sagt aber dann etwas aus, was nicht blos der fraglichen Größe s, sondern jeder andern Größe zukommt. Es darf also nicht befremden $s = \frac{0}{0}$ zu finden, obschon es nur einen Werth hat.

Ist $q > 1$, so wächst aq^n mit n bis ins Unendliche, und es wird für $n = \frac{1}{0}$ auch $S = \frac{1}{0}$.

Einige Anwendungsbeispiele:

1. Nach dem Berichte eines arabischen Schriftstellers wurde dem Erfinder des Schachspieles, Namens Sessa, die von ihm gewählte Beloh-

nung durch einen König in Indien bewilligt, die dieser als eine zu mäßige Forderung betrachtete; es war solche nichts anders als die Summe der Waizenkörner, die herauskommt, wenn 1 für das erste Feld des Schachbretts, 2 für das zweite, 4 für das dritte, und so fort für jedes der 64 Felder doppelt so viel als für das vorhergehende gerechnet werden. Welches ist diese Summe? Man hat $a=1$, $q=2$, $n=64$; woraus $l=2^{63}$ und $s=2^{64}-1$. Man findet für $s=$ 18446774073709551615. Nun enthält ein Kilogramm Waizen ohngefähr 26150 Körner; von einem Hectar werden etwa 1750 Kilogramme Getraide gewonnen, also ohngefähr 45762500 Körner. Wird die Summe s durch die letztere Zahl dividirt, so findet man, daß Sessa die Erndte von 403000 Millionen Hectare, d. h. von einer achtmal größern Fläche als die der ganzen Erdkugel, die Meere, Seen, Wüsten ꝛc. mit inbegriffen, gefordert hatte.

II. Jemand will sein Pferd unter folgenden Bedingungen verkaufen: Er verlangt 1 Heller für den ersten Nagel, 2 für den zweiten, 4 für den dritten, und so fort für jeden der 32 Nägeln doppelt so viel, als für den vorhergehenden. Wie hoch beläuft sich der Preis des Pferdes? Die Bezahlung wird in einer geometrischen Progression verlangt, wo $a=1$, $q=2$ und $n=32$. Man findet hiernach $s=2^{32}-1=4294967295$ Heller. Nun ist 1 fl. $=60.4$ Heller; also sind 4294967295 Heller gleich 17895697,0625 fl.

Mit Hülfe der beiden Gleichungen $l=aq^{n-1}$ und $s-a=(s-l)q$ kann man von den fünf Größen a, b, n, q und s jede beliebige zwei finden, wenn die drei andern gegeben sind. Uebrigens lassen sich die hierbei vorkommenden Rechnungen zuweilen nur nach den später auseinandergesetzten Methoden behandeln. Ist z. B. a, n und s gegeben, so kann man q nur durch Auflösung der Gleichung $aq^n-sq+s=a$, die vom $n$ten Grade ist, finden. Ist der Exponent n unbekannt, l, a und q aber gegeben, so muß man seine Zuflucht zur Lehre von den Logarithmen nehmen.

Anmerkung. Wenn q und n sich unter den gegebenen Größen befinden, so führen die Aufgaben dieser Art zu Gleichungen vom ersten Grade.

Von den Logarithmen.

§. 55. Wir wollen x in der Gleichung $y=a^x$ sich ändern lassen, und die entsprechenden Veränderungen von y näher betrachten.

1) Für $a > 1$ wird, wenn man $x = 0$ setzt, $y = 1$, und wenn $x = 1$, so ist $y = a$. In dem Maße als x von 0 bis 1 wächst, wird y von 1 bis a wachsen; nimmt x von 1 an weiter bis ins Unendliche zu, so wird y von a bis ins Unendliche zunehmen. Dergestalt wird, indem x durch alle möglichen Zwischenwerthe nach dem Gesetze der Stetigkeit fortschreitet, auch y, obgleich weit rascher, sich vermehren. Nimmt man hingegen x negativ, so verwandelt sich unsre Gleichung in $y = a^{-x}$, oder $y = \frac{1}{a^x}$, wo die Werthe von y immer kleiner und kleiner werden, in dem Maße als x wächst, so daß y von 1 bis 0 abnimmt, während x negativ größer wird; dem unendlichen x negativ genommen entspricht $y = 0$.

Anmerkung. Der Logarithme von Null ist dem negativen Unendlichen gleich, soll nichts anders heißen, als daß der Logarithme einer sehr kleinen Zahl eine sehr große negative Zahl ist.

2) Für $a < 1$ setzen wir $a = \frac{1}{b}$, folglich $b > 1$; alsdann $y = \frac{1}{b^x}$, oder $y = b^x$, je nachdem x positiv oder negativ genommen wird. Wir kommen also auf den ersten Fall zurück, mit dem Unterschiede, daß x positiv ist, wann $y < 1$, und negativ für $y > 1$.

3) Ist $a = 1$, so wird man immer $y = 1$ haben, welchen Werth man auch der Größe x geben möge.

In der Voraussetzung, daß a von der Einheit verschieden ist, können wir also immer für x einen Werth finden, wodurch a^x irgend einer gegebenen Zahl gleich wird. Der ausgebreitete Gebrauch, welchen man von diesen schönen Eigenschaften der Gleichung macht, erfordert, daß wir ihren Theilen, um Umschreibungen zu vermeiden, bestimmte Benennungen beilegen. Der Werth von x wird darin der Logarithme der Zahl y genannt; die willkührliche und unveränderliche Zahl heißt die Basis oder Grundzahl. Der Logarithme einer Zahl ist folglich nichts anders, als der Exponent der Potenz, auf welche man die Basis erheben muß, um dadurch jene Zahl zu erhalten.

Schreibt man $x = \text{Log.}\, y$, um anzuzeigen, daß x der Logarithme der Zahl y ist, oder daß $y = a^x$, so wird die Basis immer dabei gedacht, da solche, einmal gewählt, unveränderlich bleibt.

Aendert man dieselbe aber, so muß man die neue Basis angeben, d. h. anzeigen, welches **logarithmische** System in Betracht gezogen wird. So sagen die Gleichungen $10^3 = 1000$ und $2^5 = 32$, daß 3 der Logarithme von 1000, und 5 der von 32 ist; im ersten Falle dient 10 als Basis, im zweiten dagegen ist 2 dieselbe.

4) Eine negative Zahl läßt sich nicht als Basis eines logarithmischen Systems annehmen, weil alsdann für y bald positive, bald negative, bald reelle Größen, bald auch imaginäre Ausdrücke gefunden werden. Alle möglichen Zahlen durch Potenzen einer und derselben negativen Zahl darzustellen ist unmöglich.

§. 56. Aus dem Vorhergehenden ziehen wir jetzt mehrere Folgerungen:

1) In jedem logarithmischen System ist Null der Logarithme von 1, und der Logarithme der Basis ist die Einheit.

2) Für die Basis $a > 1$ sind die Logarithmen von den Zahlen > 1 positiv, während sie von den eigentlichen Brüchen negativ sind. Das Umgekehrte findet statt, wenn die Basis $a < 1$ ist.

3) Ist die Basis einmal fixirt, so hat jede Zahl nur einen einzigen reellen Logarithmen; ändert sich aber die Basis, so ändert sich auch der Logarithme jener Zahl; jede Zahl hat demnach eine unendliche Anzahl von reellen Logarithmen. Für $9^2 = 81$, $3^4 = 81$ z. B. sind 2 und 4 die Logarithmen der nämlichen Zahl 81, je nachdem 9 oder 3 die Basis ist.

4) Die negativen Zahlen haben keine reellen Logarithmen, weil man für y nur positive Werthe von 0 bis $\frac{1}{0}$ findet, welchen Werth von $-\frac{1}{0}$ bis $+\frac{1}{0}$ man auch der Veränderlichen x beilegen mag. Die Aufstellung einer Logarithmentafel besteht darin, alle Werthe von x, die, der Gleichung $y = a^x$ gemäß, den Zahlen $y = 1, 2, 3 \ldots$ entsprechen, zu bestimmen. Nimmt man $a^\alpha = m$, so erhält man

für $x = 0 \quad \alpha \quad 2\alpha \quad 3\alpha \quad 4\alpha \quad 5\alpha \ldots$ Logarithmen,

bezüglich $y = 1 \quad m^1 \quad m^2 \quad m^3 \quad m^4 \quad m^5 \ldots$ Zahlen.

Die Logarithmen gehen folglich in einer arithmetischen Reihe fort, während die Zahlen in einer geometrischen Reihe vorschreiten. 0 und 1 sind respektive die ersten Glieder dieser Reihen, deren Verhältnisse die willkührlichen Zahlen α und m sind. Man kann hiernach die der Gleichung $y = a^x$ entsprechenden Systeme der Werthe von x und y

als in zwei Progressionen zusammengeordnet betrachten, was die in der Arithmetik angeführte Definition von Logarithmen mit der hier gegebenen in Uebereinstimmung bringt. (Arith. §. 87 und Alg. §. 55).

Das Zeichen Log. soll in der Folge dazu dienen, den Logarithmen einer Zahl in einem unbestimmten Systeme zu bezeichnen, während unter dem Zeichen log. die Briggs'schen Logarithmen, wo 10 die Basis ist, verstanden werden.

Anmerkung. Man bedient sich bei dem Logarithmen auch folgender Schreibart: $\log.^a y = x$, was gelesen wird: der Logarithme von y für die Basis a ist gleich x.

Die Größen a^x und alle die sich daraus herleiten lassen, werden auch Exponentialgrößen genannt.

§. 57. Wir wollen nun mit Hülfe der Algebra die Eigenschaften der Logarithmen beweisen.

1) Es seien x und x' die Logarithmen der Zahlen y und y', oder $x = \text{Log.}y$, $x' = \text{Log.}y'$. Man hat $a^x = y$, $a^{x'} = y'$; werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt und dividirt, so erhält man $a^{x+x'} = yy'$, $a^{x-x'} = \frac{y}{y'}$.

Der Definition zufolge sind aber die Exponenten $x+x'$ und $x-x'$ die Logarithmen von yy' und $\frac{y}{y'}$; folglich

$$\text{Log.}\,y + \text{Log.}\,y' = \text{Log.}\,(yy'),$$
$$\text{Log.}\,y - \text{Log.}\,y' = \text{Log.}\left(\frac{y}{y'}\right).$$

2) Erhebt man die Gleichung $y = a^x$ auf die $m$te Potenz, oder zieht aus ihr die $m$te Wurzel, so hat man $y^m = a^{mx}$, $\sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}}$; die Definition gibt $mx = \text{Log.}(y^m)$, $\frac{x}{m} = \text{Log.}\sqrt[m]{y}$; folglich $\text{Log.}\,y^m = m\,\text{Log.}y$, $\text{Log.}\sqrt[m]{y} = \frac{\text{Log.}y}{m}$. Es sind diese Resultate mit dem, was wir in der Arithmetik (§. 88) gesehen, übereinstimmend.

3) Will man die Gleichung $c = a^x$, in der c und a gegeben und x unbekannt ist, auflösen; so setzt man die Logarithmen der beiden

Theile einander gleich, was Log. $c = x$ Log. a gibt; hieraus erhält man durch eine einfache Division $x = \frac{\text{Log. } c}{\text{Log. } a}$.

Man kann hiernach den Exponenten n in der auf geometrische Progressionen Bezug habenden Gleichung $l = aq^{n-1}$ (§. 54.) finden; nämlich Log. $l =$ Log. $a + (n-1)$ Log. q, woraus

$$n = 1 + \frac{\text{Log. } l - \text{Log } a}{\text{Log. } q}.$$

Es sei x unbekannt in der Gleichung $Aa^x + Ba^{x-b} + Ca^{x-c} + \ldots\ldots = P$; daraus $a^x \left(A + \frac{B}{a^b} + \frac{C}{a^c} + \ldots\ldots\right) = P$, oder $Qa^x = P$; folglich

$$x = \frac{\text{log. } P - \text{log. } Q}{\text{log. } a}.$$

In der Gleichung $a^z = b$ ist z von x abhängig, indem nämlich $z = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots$ Da $z = \frac{\text{log. } b}{\text{log. } a} =$ einer bekannten Zahl K ist, so hat man noch die Gleichung vom $m$ten Grade, $K = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots$, aufzulösen. Es sei z. B. $4\,(\frac{2}{3})^{x^2-5x+4} = 9$; hieraus $(x^2 - 5x + 4)$ log. $\frac{2}{3} =$ log. $\frac{9}{4}$; folglich $x^2 - 5x + 4 = -2$, eine Gleichung vom zweiten Grade, die $x = 2$ und $= 3$ gibt.

4) Es seien y und $y + m$ zwei Zahlen; die Differenz ihrer Logarithmen für irgend ein System ist

$$\text{Log.}(y+m) - \text{Log.}\,y = \text{Log.}\left(\frac{y+m}{y}\right) = \text{Log.}\left(1 + \frac{m}{y}\right),$$

eine Größe, die dem Logarithmen von 1, oder Null, in dem Maße sich nähert, als $\frac{m}{y}$ abnimmt, und die desto kleiner wird, je größer y ist. Die Logarithmen zweier Zahlen sind also desto weniger von einander verschieden, je größer die Zahlen sind und je näher sie einander liegen, was gleichfalls mit dem in §. 91 der Arithmetik Gesagten übereinstimmt.

§. 58. Hat man eine Logarithmen-Tafel in einem System, dessen Basis a ist, berechnet, so kann man leicht eine andere Tafel, dessen Basis b ist, daraus ableiten. In der Gleichung $a^x = y$ ist x der Logarithme von y in dem System, dessen Basis a ist; nimmt man nun von beiden Theilen der Gleichung die Logarithmen in dem

System, dessen Basis b ist, so erhält man x Log. a = Log. y. Um also den Logarithmen von y in dem zweiten System zu erhalten, muß man x oder den Logarithmen von y im ersten System mit Log. a multipliciren; multiplicirt man daher sämmtliche Logarithmen der ersten Tafel mit Log. a, so erhält man eine neue Tafel für die Basis b. Dieser constante Factor Log. a, der alle Logarithmen eines Systems a in ein System b überträgt, wird der Modul genannt; es ist demnach derselbe nichts anders, als der in dem System b berechnete Logarithme der ersten Basis a. Dividirt man Log. y durch x, welches die Logarithmen einer und derselben Zahl in den Systemen b und a sind, so hat man Log. $a = \frac{\text{Log.} y}{x}$, woraus man ersieht, daß der Quotient der auf diese Systeme Bezug habende Modul ist, und daß derselbe unveränderlich bleibt, was auch y für eine Zahl sein mag.

Sollte es daher in irgend einem Falle vortheilhafter sein, ein anderes logarithmisches System als das für die Basis 10 zu wählen; so wird es leicht sein, mit Hülfe einer einzigen Logarithmentafel, z. B. der Briggs'schen, jeden Logarithmen für dieses neue System zu berechnen. Für das System, dessen Basis $= \frac{5}{7}$, ist z. B. der Logarithme von $\frac{2}{3} = \frac{\text{Log.} \frac{2}{3}}{\text{Log.} \frac{5}{7}} = \frac{\text{Log. } 2 - \text{Log. } 3}{\text{Log. } 5 - \text{Log. } 7}$; die Basis ist hier noch beliebig, nimmt man sie = 10 an, so wird alles bekannt, und man erhält $\frac{-0{,}17609125}{-0{,}14612804} = 1{,}2050476$ für den gesuchten Logarithmen.

Aehnlicherweise ist für das System $\frac{3}{2}$ der Logarithme von $\frac{2}{3} = \frac{\text{log.} \frac{2}{3}}{\text{log.} \frac{3}{2}} = \frac{\text{log. } 2 - \text{log. } 3}{\text{log. } 3 - \text{log. } 2} = -1$; was sich übrigens von selbst versteht, da die Gleichung $y = a^x$ in diesem speciellen Falle $\frac{2}{3} = (\frac{3}{2})^x = (\frac{3}{2})^{-x}$ wird, wo x offenbar $= -1$ ist.

§. 59. Es ist von Wichtigkeit, sich in dem Gebrauch der Logarithmen bei den algebraischen Rechnungen zu üben, daher folgende Beispiele:

1) $\text{log.} (a.b.c.d\ldots) = \text{log.} a + \text{log.} b + \text{log.} c + \text{log.} d\ldots,$

2) $\text{log.} \left(\frac{abc}{de}\right) = \text{log.} a + \text{log.} b + \text{log.} c - \text{log.} d - \text{log.} e,$

3) $\text{log.} (a^m . b^n . c^p \ldots) = m \,\text{log.} a + n \,\text{log.} b + p \,\text{log.} c \ldots,$

4) $\text{log.} \left(\frac{a^m b^n}{c^p}\right) = m \,\text{log.} a + n \,\text{log.} b - p \,\text{log.} c,$

5) log. $(a^2 - x^2) = \log.[(a+x)\times(a-x)] = \log.(a+x) + \log.(a-x)$,

6) log. $\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2}\log.(a+x) + \frac{1}{2}\log.(a-x)$,

7) log. $(a^3\sqrt[4]{a^3}) = 3\log.a + \frac{3}{4}\log.a = \frac{15}{4}\log.a$,

8) log. $\sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = \frac{m}{n}\log.(a-x) + \frac{m}{n}\log.(a^2+ax+x^2)$ (§. 8).

Wird ax dem Trinom hinzugefügt und wieder abgezogen, so wird dasselbe $(a+x)^2 - ax$; setzt man $z^2 = ax$, wo z mittelst der Logarithmen sich finden läßt, so erhält man $(a+x)^2 - ax = (a+x)^2 - z^2 = (a+x+z)(a+x-z)$; folglich log. $\sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = \frac{m}{n}[\log.(a-x) + \log.(a+x+z) + \log.(a+x-z)]$. Diese Rechnungsweise löst $a^3 - x^3$ in seine Factoren auf und gestattet den Gebrauch der Logarithmen.

9) $\sqrt{(a^2+x^2)}$ wird, wenn man $2ax = z^2$ setzt, gleich $\sqrt{[(a+x)^2 - z^2]}$, woraus log. $\sqrt{(a^2+x^2)} = \frac{1}{2}[\log.(a+x+z) + \log.(a+x-z)]$.

10) log. $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{(a+x)^2} = \frac{1}{2}[\log.(a-x) - 3\log.(a+x)]$.

11) Um zwischen a und l eine Anzahl m mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten, muß man $n = m + 2$ in der Gleichung $l = aq^{n-1}$ (§. 54) setzen. Hieraus zieht man das Verhältniß $q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$ und log. $q = \frac{\log.l - \log.a}{m+1}$. Die verschiedenen Glieder aq, aq^2 ...., haben zu Logarithmen log. a + log. q, log. a + 2 log. q .... Um also 11 mittlere geometrische Proportionalen zwischen 1 und 2 einzuschalten, findet man, weil hier log. $a = 0$, log. $q = \frac{1}{12} \times \log.2 = 0,0250858$, und $q = 1,059463$. Die Logarithmen der folgenden Glieder sind 2 log. q, 3 log. q..., und die geometrische Reihe ist

∷ 1 : 1,059463 : 1,122461 : 1,189207 : 1,259921 : 1,334839 : 1,414213 : 1,498307 : 1,587401 : 1,681792 : 1,781797 : 1,887748 : 2.

(Diese Progression stellt die Verhältnisse der Schwingungszahlen der Töne nach der gleichschwebenden Temperatur dar).

12) In dem System für die Basis a ist $a^{\log.z} = z$, weil nach der Erklärung von Logarithmen in der Gleichung $a^y = z$, y der Logarithme von z ist. Ebenso $a^{h\log.z} = a^{\log.(z^h)} = z^h$.

13) In der Gleichung $b^{n-\frac{a}{x}} = c^{mx}.f^{x-p}$ sei x unbekannt, daraus $(n - \frac{a}{x})\log.b = mx.\log.c + (x-p)\log.f$. Man hat demnach

die quadratische Gleichung $(m \log. c + \log. f) x^2 - (n \log. b + p \log. f) x + a \log. b = 0$ aufzulösen.

14) $c^{mx} = a . b^{nx-1}$ gibt $x = \frac{\log. a - \log. b}{m \log. c - n \log. b}$.

15) Wird in $b^{c^x} = d$ gesetzt $c^x = u$, so kommt $b^u = d$, $u \log. b = \log. d$, oder $c^x = \frac{\log. d}{\log. b}$; nimmt man von neuem die Logarithmen, so findet man

$$x = \frac{\log.(\log. d) - \log.(\log. b)}{\log. c}.$$

In diesem Ausdruck bezeichnet log. (log. b) den Logarithmen von Log. b, welcher erhalten wird, wenn man diesen Logarithmen als eine Zahl betrachtet.

16) Die Bevölkerung einer Stadt vermehrt sich jährlich um $\frac{1}{30}$; wie groß wird die Bevölkerung dieser Stadt nach einem Jahrhundert sein, wenn sie jetzt 100000 Seelen zählt? Setzt man $100000 = m$, so wird die Volksmenge am Ende des ersten Jahres $m + \frac{1}{30} m = m . \frac{31}{30} = m'$ sein. Am Schlusse des zweiten Jahres wird m' ähnlicherweise $m' . \frac{31}{30} = m (\frac{31}{30})^2$ sein. Nach 100 Jahren ist hiernach die Einwohnerzahl

$m (\frac{31}{30})^{100} = x = 2654874$, wie der Calcul zeigt.

log. 31	=	1,49136169
— log. 30	=	1,47712125
		0,01424044
100 mal...		1,424044
log. m	=	5,000000
log. x	=	6,424044

Ist die jährliche Vermehrung der Volksmenge $\frac{1}{r}$ der frühern, so findet man ebenso die Volksmenge x nach n Jahren durch die Gleichung $x = m \left(\frac{1+r}{r}\right)^n$. Man kann irgend eine der Größen x, m, r oder n als unbekannt und die übrigen als gegeben betrachten; man findet sonach

$\log. x = \log. m + n[\log.(1+r) - \log. r]$; $\log. m = \log. x - n[\log.(1+r) - \log. r]$,

$$n = \frac{\log. x - \log. m}{\log.(1+r) - \log. r}, \quad \log.\left(1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{\log. x - \log m}{n}$$

Einige Anwendungen zu den vorigen Lehren.

§. 60. **Einfache Interessenrechnung.** Die einfachen Zinsen z eines zu p Prozent während t Tagen ausstehenden Kapitals a werden mittelst der Gleichung $z = \frac{apt}{36000} = a \times \frac{t}{6000} \times \frac{p}{6}$ gefunden, die die in der Arithmetik (§. 80) gegebene Vorschrift ausspricht.

Zusammengesetzte Interessenrechnung. Werden die Zinsen jedes Jahr zum Kapital geschlagen und aufs neue mit verzinset, so sagt man: das Kapital ist zu zusammengesetzten Zinsen oder Zinseszinsen ausgeliehen. Sind r die jährlichen Zinsen vom Kapital 1, so ist zu Ende des ersten Jahres das Kapital a angewachsen zu $a+ar = a(1+r) = aq$, wenn man $1+r$, der Kürze halber, durch q ausdrückt. Hieraus ist zu Ende des zweiten Jahres geworden $aq \cdot q$, oder aq^2; zu Ende des dritten Jahres aq^3, u. s. w. Bezeichnet daher x den Werth nach n Jahren, so ist $x = aq^n = a(1+r)^n$.

Sind drei von den Größen a, n, x und r oder q gegeben, so kann die vierte Unbekannte mit Hülfe dieser Gleichung gefunden werden. Gewöhnlich sind die Procente p gegeben, in diesem Falle ist $r = \frac{p}{100}$ und $q = \frac{100+p}{100}$.

Wollte man z. B. wissen, in wie viel Zeit ein Kapital von 10000 fl. auf 12000 fl. anwachsen würde, wenn dasselbe zu 5 Prozent auf Zinseszinsen aussteht, so müßte man $p = 5$, $r = \frac{1}{20}$, $q = \frac{21}{20}$ setzen; man fände so $12000 = 10000 \times (\frac{21}{20})^n$, woraus (nach §. 57) $n = 3$ Jahr und 9 Monat ohngefähr.

In der am Ende des Buches beigefügten Tabelle ist angenommen, daß ein Kapital von 1000 fl. zu 4, 5 oder 6 Prozent angelegt sei, und die halbjährlich zu entrichtenden Zinsen wieder zum Kapital geschlagen werden, um sie in der Folge mit der Summe zusammengenommen benutzen zu können. Man sieht aus dieser Tafel, daß ein auf diese Art zu 5 Prozent ausgeliehenes Kapital von 1000 fl. nach 14 Jahren auf die Summe von 1996,50 fl. angewachsen ist. — Es ist also einerlei, wenn die Zinsen von Zinsen zu 5 Procent in Anschlag gebracht werden, ob man 1000 fl. gleich baar, oder 1996,50 fl. nach 14 Jahren zahlt. — Man sieht ferner aus dieser Tafel, daß bei 5 Procent in einem Zeitraume von nicht ganz 14½ Jahren das Kapi-

tal sich verdoppelt, bei 6 Prozent in 19 Jahren es sich schon verdreifacht hat. — Beträgt das Kapital 2 oder 3 tausend fl., so muß man die in der Tafel angegebenen Zahlen verdoppeln, verdreifachen, überhaupt sie für jedes andere Kapital demselben proportional nehmen. Hätte man z. B. 2500 fl. zu 5 Procent auf Zinseszinsen auf 12 Jahre lang ausstehen, so würde das Kapital nach diesem Zeitraum auf 2,5 $\times$ 1808,73 fl. = 4521,82 fl. angewachsen sein; es ist also einerlei, ob man jetzt gleich 2500 fl. oder 4521,82 fl. nach 12 Jahren zahlt. — Soll Jemand 30000 fl. in 5 Jahren zahlen, so kann er dafür die Summe von $\frac{30000 \times 1000}{1280,00} = 23436,04$ fl. auf der Stelle geben, wenn mit 5 Procent Zinseszinsen verinteressirt wird."

Anmerkung. Nach n ganzen Jahren wird a zu $a\,(1+r)^n$ ansteigen; diese Summe trägt in $\frac{p}{q}$ Jahr, wo $\frac{p}{q}$ ein ächter Bruch ist, noch $a\,(1+r)^n \cdot r\frac{p}{q}$ Zinsen, so daß die ganze Summe nach $n + \frac{p}{q}$ Jahren $= a(1+r)^n\;(1 + r\frac{p}{q})$ ist. Da der letzte Ausdruck mit dem Ausdrucke $a\,(1+r)^n\;(1+r)^{\frac{p}{q}}$ nicht einerlei ist, so folgt hieraus, daß $a\,(1+r)^{n+\frac{p}{q}}$ nicht ganz genau den Werth des Kapitals a nach $n + \frac{p}{q}$ Jahren angibt.

§. 61. Rentenrechnung. Wird eine Zeitlang von einem Kapital a jährlich eine bestimmte Summe x bezogen, so daß durch dieselbe nach und nach das Kapital nebst Zinseszinsen verzehrt ist, so nennt man diese Summe eine Jahrrente, oder Zeitrente, oder Annuität.

Anmerkung. Der Gläubiger, welcher das Kapital a hergibt und dafür die Rente empfängt, heißt Rentier; der Schuldner, der das Kapital oder den Einsatz a erhält, und die Rente x zu zahlen hat, heißt Entrepreneur oder Banquier. Das gegenseitige Uebereinkommen heißt ein Annuitätsvertrag.

Das Kapital a hat zu Ende des ersten Jahres die Größe aq; der Schuldner zahlt x, ist also nur noch $aq - x = a'$ schuldig.

Zu Ende des zweiten Jahres reducirt sich die Schuld a' auf $a'q-x$, oder aq^2-qx-x. Fährt man auf diese Weise fort, mit q zu multipliciren und mit x abzuziehen, um den nach jedem Jahre noch schuldig gebliebenen Rest zu erhalten; so findet man, daß der Schuldner nach der $n$ten geleisteten Zahlung der Rente x, eine Summe z schuldig ist, welche durch die Gleichung

$$z = aq^n - xq^{n-1} - xq^{n-2} \ldots . - x,$$

$$\text{oder } z = aq^n - \frac{x(q^n - 1)}{q-1} \text{ bestimmt wird.}$$

Ist die Schuld abgetragen, so ist $z = 0$; alsdann

$$x = \frac{aq^n\ (q-1)}{q^n - 1}, \text{ oder } x[(1+r)^n - 1] = ar(1+r)^n.$$

Sind drei von den Größen x, a, q oder r und n gegeben, so kann die vierte mit Hülfe dieser Formel gefunden werden.

Die Anwendung der Logarithmen ist hier sehr bequem, wird unter Umständen selbst unumgänglich nothwendig. Ist die Gleichung in Bezug auf den Exponenten n aufzulösen, so findet man $q^n\ (x+a-aq)=x$, woraus

$$n = \frac{\log. x - \log. (x + a - aq)}{\log. q}, \text{ oder } n = \frac{\log.\ x - \log. (x - ar)}{\log. (1 + r)}.$$

Auf dieser Lehre beruht auch die Berechnung der Leib- oder Lebensrente, es ist dies eine Rente, welche der Gläubiger bis zu seinem Tode zu beziehen hat, wo Kapital und Zinsen als abgetragen angesehen werden. Man nimmt hierbei eine gewisse Lebensdauer des Rentiers von der Zeit, wo er das Kapital dem Schuldner als Eigenthum überläßt, an. Die Frage ist alsdann, welche Summe x er jährlich zu beziehen hat, wenn nach Verlauf von n Jahren seine Forderung als erloschen betrachtet werden soll? Es wird diese Rente nach der oben angegebenen Formel für x gefunden. Ist z. B. $a = 100$ fl., und bei einer Leibrente $p = 5$, so ist $x = \frac{100 \cdot (\frac{21}{20})^n}{(\frac{21}{20})^n - 1} \cdot \frac{1}{20} = \frac{5 \cdot (\frac{21}{20})^n}{(\frac{21}{20})^n - 1}$.

Es läßt sich zwar nicht im voraus bestimmen, wie lange der Rentier noch am Leben bleibt; es wird aber zum Behuf der Rechnung eine gewisse Lebensdauer angenommen, die nach den Sterblichkeitstabellen zu berechnen ist. Die wirkliche Lebensdauer kann allerdings von der angenommenen abweichen; allein das Zufällige wird sich dabei um so mehr ausgleichen, je größer die Anzahl der Rentiers ist, indem den einen gerade von der Lebensdauer das zu Gute kommt, was den

andern davon abgeht. Mittelst dieser Tabellen kann man die wahrscheinliche Lebensdauer eines Individuums, dessen Alter bekannt ist, angeben. Die nachstehende erste Linie enthält das Alter des Individuums, die zweite die wahrscheinliche Lebensdauer in den verschiedenen Lebensperioden desselben.

Alter :

1.5 .10.15.20 .25.30.35.40. 45.50.55.60.65.70.75.80 Jahre.

Wahrscheinliche Lebensdauer :

37.$45\frac{1}{2}$. 43.39.$35\frac{1}{2}$.$32\frac{1}{2}$.$29\frac{1}{2}$.26.23.20.17.14.11. $8\frac{2}{3}$. $6\frac{1}{2}$. 5. $3\frac{1}{2}$ „

Nach dieser Wahrscheinlichkeit der Dauer des menschlichen Lebens verbunden mit dem Anwachsen der Kapitalien, die auf Zinseszinsen ausstehen, werden die Leibrenten berechnet. So hat also z. B. ein Mensch in seinem 40ten Jahre die Hoffnung, noch 23 Jahre zu leben; hiernach findet man $x = 7{,}4$, d. h. für die Einlage eines Kapitals von 100 fl. zu 5 Procent, bezieht die 40 jährige Person eine lebenslängliche Rente von 7,4 fl. jährlich. Auf gleiche Art wird bei den unter dem Namen Tontinen bekannten Instituten verfahren.

Anmerkung. Die Sterblichkeitstabellen zeigen an, wie viele von einer gegebenen Zahl, z. B. 1000, in einem Jahre geborner Menschen, am Ende eines jeden Jahres noch am Leben sind. So leben z. B. von 1000 Gebornen am Ende des 40ten Jahres noch 374. Von 2000 Gebornen leben also am Ende des 40ten Jahres noch 748, und von 500 Gebornen leben am Ende des 40ten Jahres noch 187. Leicht ist es nun, mittelst solcher Tafeln die wahrscheinliche Lebensdauer eines Menschen vom gegebenen Alter zu finden. Man versteht nämlich unter dieser Dauer die Zeit, nach welcher es eben so wahrscheinlich ist, daß man noch lebe, als daß man nicht mehr lebe. Es wird dies alsdann der Fall sein, wenn die Hälfte der Personen jenes Alters gestorben ist. Um z. B. die wahrscheinliche Lebensdauer eines 40 jährigen Menschen zu finden, gibt die Sterblichkeitstabelle die Zahl 374, die Hälfte davon steht bei dem Alter von 63, also ist die wahrscheinliche Lebensdauer eines vierzigjährigen Menschen $63 - 40 = 23$.

Die Tontine ist eine von Lorenzo Tonti erfundene Art Leibrente. Mehrere Individuen legen ein Kapital a in der Kasse der Tontine zusammen an. Die Gesammtheit der Theilhaber

erhält dafür zur Entschädigung jährlich von der Kasse die Summe x. Stirbt nun eines der Mitglieder, so kommt den überlebenden dessen Antheil zu Gute. Bei dem Tode des letzten Mitgliedes hört die Zahlung von Seiten der Kasse auf. Ist n die Zahl der Jahre, die hier bis zum höchsten Alter der Sterblichkeitstabelle verfliessen müssen, so erhält man dieselbe Gleichung wie oben: $x[(1+r)^n - 1] = ar\ (1+r)^n$. Die Summe x wird unter den Tontinenbesitzer nach der Anzahl der Individuen, die jedes Jahr noch leben, vertheilt.

Ueber Sterblichkeitstabellen, Zeitrenten, Leibrenten ꝛc. siehe J. J. Littrows Werkchen über Lebensversicherungen und andere Versorgungsanstalten.

§. 62. Rabattrechnung. Bezeichnet man das Kapital durch a, die Procente durch p, so sind $\frac{apn}{100}$ die Interessen in n Jahren. Die nach n Jahren fällige Summe a hat also, wenn der Rabatt in 100 genommen wird, einen gegenwärtigen Werth

$$x = a(1 - \tfrac{pn}{100}).$$

Bei dem Rabatt auf 100 sagt man dagegen: auf was wird a reducirt, wenn $100 + pn$ auf 100 sich reducirt? Hiernach

$$x = \frac{100\,a}{100+pn}.$$

Will man bei der nach n Jahren fälligen Summe a die Zinseszinsen während dieser Zeit in Anschlag bringen, so muß man zu der Formel in §. 50 seine Zuflucht nehmen. Man hat in diesem Falle die Gleichung $x = \frac{a}{q^n}$.

Anmerkung. Nimmt man bei der Rabattrechnung nur die einfachen Zinsen in Betracht, so heißt dieselbe eine einfache Rabattrechnung; während sie eine zusammengesetzte genannt wird, sobald die Zinseszinsen in Anschlag kommen. Bei der einfachen Rabattrechnung ist die Frage eigentlich folgende: welche Summe wächst in n Jahren nebst den einfachen Zinsen zu p Prozent, zur Größe a an? Man hat hiernach die Gleichung: $x(1+\frac{np}{100}) = a$, woraus $x = \frac{100}{100+np}a$. Die Differenz $a - \frac{100}{100+np}a = \frac{np}{100+np}a$ ist der einfache Rabatt (Rabatt auf 100). — Der Ra-

batt in 100 (Disconto) ist $\frac{apn}{100}$; der jetzt zahlbare Werth für a wäre demnach $x = a\ (\frac{100-pn}{100})$. Der Rabatt auf 100 ist also immer kleiner als der Rabatt in 100; wie es auch sein muß, da hier die Interessen von einem größern Kapital als vorhin genommen werden. Das Unrichtige bei Berechnung des Rabatts in 100 zeigt sich sehr auffallend, wenn $pn = 100$ ist, in welchem Falle auf eine in n Jahren fällige Summe a der Abzug a beträgt; also gar nichts bezahlt wird, was nicht möglich ist.

§. 63. **Regula Falsi.** Es sei $ax = b$ die Gleichung, welche die Theile einer Aufgabe mit einander verbindet. Nimmt man für x einen beliebigen Werth s an, und unterwirft denselben den Bedingungen der Aufgabe, so wird es Zufall sein, wenn man $as = b$ finden sollte. Wir wollen demnach voraussetzen, daß man $as = c$ erhalte. Dividiren wir diese letzte Gleichung nun Glied für Glied durch $ax = b$, so kommt $\frac{s}{x} = \frac{c}{b}$. Das gefundene Resultat verhält sich also zu dem zu findenden wie die angenommene Zahl zu der gesuchten.

I. Man sucht z. B. eine Zahl, deren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ter Theil zusammen 456 ist. Nehmen wir an, daß 200 diese Zahl sei, so ist ihre Hälfte plus ihrem Viertel plus ihrem Fünftel 190 anstatt 456. 200 ist also nicht die gesuchte Zahl; wir setzen nun die Proportion: $190 : 456 = 200 : x$, woraus $x = 480$.

II. In welcher Zeit wird ein Wasserbehälter durch vier zugleich geöffnete Röhren gefüllt werden? Durch die erste Röhre kann solches in 2, durch die zweite in 3, durch die dritte in 5, durch die vierte in 6 Stunden geschehen. Nehmen wir an, daß man eine Stunde nöthig habe, so füllt das erste Rohr die Hälfte des Behälters, das zweite ein Drittel, das dritte ein Fünftel, das vierte ein Sechstel, was in Summa $\frac{6}{5}$ macht. Die Voraussetzung einer Stunde war demnach falsch; wir sagen also: $\frac{6}{5} : \frac{5}{5} = 1 : x = \frac{5}{6}$ Stunde $= 50$ Minuten.

Obgleich diese Vorschrift bei der Gesellschaftsregel, der Interessenrechnung u. s. w. anwendbar ist, so ist sie es doch nicht bei allen Aufgaben des ersten Grades, weil eine allgemeine Gleichung dieser Art die Form $ax + b = cx + d$ hat. Macht die Annahme von $x = s$ die Größe $as + b$ nicht gleich $cs + d$, so wird ein Fehler f statt finden, so daß $as + b - (cs + d) = f$. Ziehen wir hiervon $ax + b - (cx + d)$

$= 0$ ab, so kommt $(a-c)\,(s-x) = f$. Eine zweite Annahme von $x = s'$, die den Fehler f' nach sich zieht, gibt ähnlicherweise $(a-c)\,(s'-x) = f'$. Dividiren wir die beiden letztern Resultate durch einander, so erhalten wir $\frac{s-x}{s'-x} = \frac{f}{f'}$, woraus $x = \frac{fs'-f's}{f-f'}$. Hieraus folgende Regel: Multiplicire den ersten Fehler mit der zweiten angenommenen Zahl, und den zweiten Fehler mit der ersten angenommenen Zahl, ziehe die Produkte mit Berücksichtigung der Zeichen der Fehler von einander ab; dividire darauf das Resultat durch die Differenz der beiden Fehler; der Quotient wird die gesuchte Zahl sein. Es ist das die doppelte Regula Falsi, die zur Auflösung von allen Aufgaben vom ersten Grade angewendet werden kann.

III. In der zweiten Aufgabe gab die Positionszahl 1 Stunde das Resultat $\frac{6}{5}$, der Fehler war demnach $+\frac{1}{5}$. Die zweite Positionszahl $\frac{1}{2}$ Stunde gibt das Resultat $\frac{3}{5}$, der Fehler ist also $-\frac{2}{5}$.

Man schreibt diese Zahlen wie hier neben geschehen, multiplicirt die im Kreuz stehenden Zahlen mit einander, und zieht die Produkte von einander ab; man erhält

Angenommene Zahlen.		Fehler.
1 Stunde.	+	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{2}$	—	$\frac{2}{5}$

$\frac{1}{10} + \frac{2}{5}$ oder $\frac{1}{2}$; die Differenz der Fehler ist $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ oder $\frac{3}{5}$; man dividirt endlich $\frac{1}{2}$ durch $\frac{3}{5}$, woraus $x = \frac{5}{6}$ sich ergibt.

IV. Ein Vater ist jetzt 40 Jahre, sein Sohn 12 Jahre alt; wann ist der Vater dreimal so alt als der Sohn? Man nehme 5 als erste Positionszahl: der Vater ist alsdann 45 Jahre, der Sohn 17 Jahre alt; das Dreifache von 17 gibt 6 mehr als 45. Man nehme 1 als zweite Positionszahl: der Fehler ist —2. Die reciproken Produkte der aus den Positionszahlen entstandenen Fehler geben

Angenommene Zahlen.		Fehler.
5 Jahre		6
1	—	2
6	+	10

die Differenz 16; dividirt man dies Resultat durch die Differenz der Fehler, die 8 beträgt, so erhält man zwei als Zahl der Jahre, in denen der Vater dreimal so alt, als der Sohn sein wird.

Werthe eines Kapitals von 1000 fl. von 6 zu 6 Monat, mit Zinseszinsen zu 4, 5 und 6 Procent.

Jahre.	4 pCt.	5 pCt.	6 pCt.	Jahre.	4 pCt.	5 pCt.	6 pCt.
	1020,00	1025,00	1030,00		1515,67	1679,58	1860,29
1	1040,40	1050,63	1060,90	11	1545,98	1721,57	1916,10
	1061,21	1076,89	1092,73		1576,90	1764,61	1973,59
2	1082,43	1103,81	1125,51	12	1604,44	1808,73	2032,79
	1104,08	1131,41	1159,27		1640,61	1853,94	2093,78
3	1126,16	1159,69	1194,05	13	1673,42	1900,29	2156,59
	1148,69	1188,69	1229,87		1706,89	1947,80	2221,29
4	1171,66	1218,40	1266,77	14	1741,02	1996,50	2287,93
	1195,09	1248,86	1304,77		1775,84	2046,41	2356,57
5	1218,99	1280,08	1343,92	15	1811,36	2097,57	2427,26
	1243,37	1312,09	1384,23		1847,59	2150,01	2500,08
6	1268,24	1344,89	1425,76	16	1884,54	2203,76	2575,08
	1293,61	1378,51	1468,53		1922,23	2258,85	2652,34
7	1319,48	1412,97	1512,59	17	1960,68	2315,32	2731,91
	1345,87	1448,30	1557,98		1999,89	2373,21	2813,86
8	1372,79	1484,51	1604,71	18	2039,89	2432,54	2898,28
	1400,24	1521,62	1652,85		2080,69	2493,35	2985,23
9	1428,25	1559,56	1702,42	19	2122,30	2555,68	3074,78
	1456,81	1598,65	1753,51		2164,74	2619,57	3167,03
10	1485,95	1638,62	1806,11	20	2208,04	2685,06	3262,04

Noten zur niedern Algebra.

Note 1 zu §. 6.

Ueber die Rechnungsarten mit einfachen entgegengesetzten Größen.

Die im Text gegebenen Regeln der vier Rechnungsarten sind für die negativen Größen als Theile von Binomen, nicht aber wenn sie ganz einzeln stehen, gefunden worden. Es dürfte daher nicht überflüssig sein, die Sache aus einem und dem andern Gesichtspunkte nochmals zu betrachten.

1) Zwei gleichartige Größen, welche, wenn sie mit einander vereinigt gedacht werden, sich gegenseitig ganz oder zum Theil aufheben, heißen entgegengesetzte Größen; im ersten Falle sagt man, sie haben einen gleichen absoluten (numerischen) Werth; im zweiten, sie haben einen ungleichen absoluten Werth. In einer solchen entgegengesetzten Beziehung stehen zu einander die positiven (additiven) Größen, d. h. mit dem Zeichen $+$ versehenen Größen, und die negativen (subtractiven) Größen, d. h. mit dem Vorzeichen $-$ behafteten Größen. Die Zeichen $+$ und $-$ sind mit den Größen, vor welchen sie stehen, zusammengehörige Dinge, sie sind gleichsam als Adjective bei ihren Subtractiven anzusehen. Positive Größen sind also die Größen, welche zu andern, wenn sie mit ihnen in Verbindung kommen, addirt, während die negativen Größen von andern, mit denen sie in Verbindung kommen, subtrahirt werden sollen.

2) Verbindet man die Größe a mit der Größe $-b$ auf dem Wege der Addition, so wird $a - b$ das Resultat dieser Vereinigung sein, das positiv oder negativ ist, je nachdem $a >$ oder $<$ als b ist. Hieraus ergibt sich, daß eine Addition in der Algebra nicht immer eine wirkliche Vermehrung mit sich bringt, und daß das Wort Summe nicht ganz in demselben Sinne wie in der Arithmetik genommen werden kann.

Der Ausdruck $a - b + c + d - e + f$ ist der nachstehenden Summe $(+a) + (-b) + (+c) + (+d) + (-e) + (+f)$ gleich, er wird deshalb algebraische Summe genannt. — Leicht ist einzusehen, daß $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

3) Eine Größe von einer andern subtrahiren, heißt eine Größe (Rest) finden, welche, zum Subtrahend addirt, den Minuend gibt. Soll $-b$ von a subtrahirt werden, so ist Rest $+$ Subtrahend $=$ Minuend, oder

Rest $-b=a$, woraus Rest $=a+b$; d. h. vertausche das Vorzeichen des Subtrahends und addire dann diesen neuen Ausdruck zu dem unveränderten Minuend. Die Subtraction in der Algebra hat also nicht immer eine Verminderung zur Folge.

La Place beweist die Subtractionsregel wie folgt: Setzt man zu einer Größe a die Größe $b-b$ hinzu, die im Grunde nur Null ist, so ändert man den Werth jener Größen nicht; a und $a+b-b$ sind demnach einerlei. Will man nun $+b$ von a subtrahiren, so braucht man in $a+b-b$ nur b wegzulassen, was $a-b$ gibt; will man hingegen $-b$ subtrahiren, so läßt man $-b$ weg, und es bleibt $a+b$.

4) Eine Größe multipliciren, heißt eine Größe (Produkt) finden, welche aus dem Multiplicand eben so gebildet wird, wie der Multiplicator aus der positiven Einheit gebildet ist.

Um zwei Größen mit einander zu multipliciren, multiplicire ihre absoluten Werthe und nimm das Produkt positiv oder negativ, je nachdem die Factoren gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Erster Fall. $(+a)\cdot(+b)=+ab$. Kein weiterer Beweis nöthig.

Zweiter Fall. $(+a)\cdot(-b)=-ab$. $-b$ entsteht aus $+1$ dadurch, daß man das entgegengesetzte von $+1$, d. h. -1 b mal nimmt. Um also das Produkt $+a\cdot-b$ zu bilden, muß man b mal das Entgegengesetzte von $+a$, d. h. b mal $-a$ nehmen, was $-ab$ gibt.

Dritter Fall. $(-a)\cdot(+b)=-ab$. $+b$ entsteht aus $+1$ dadurch, daß man b mal $+1$ nimmt. Um also das Produkt $-a\cdot+b$ zu bilden, muß man $-a$ selbst b mal nehmen, was $-ab$ gibt.

Vierter Fall. $(-a)\cdot(-b)=+ab$. $-b$ entsteht aus $+1$, indem man b mal -1 nimmt. Um also das Produkt $-a\cdot-b$ zu bilden, muß man das Entgegengesetzte von $-a$, d. h. $+a$, b mal nehmen, was $+ab$ gibt.

La Place beweist die Multiplicationsregeln wie folgt: Das Produkt von $a-a$ mit b muß Null sein; da nun das Produkt von a mit $b=+ab$ ist, so muß das Produkt von $-a$ mit b nothwendig $=-ab$ sein, um das Produkt $+ab$ zu vernichten. Folglich muß $-a$ mit $+b$ multiplicirt, $-ab$ geben.

Das Produkt von a mit $b-b$ muß Null sein; da nun das Produkt von a mit $b=+ab$ ist, so muß $+a$ mit $-b$ multiplicirt $=-ab$ sein, um das Produkt ab zu vernichten. $+a$ mit $-b$ multiplicirt gibt folglich $-ab$.

Das Produkt von $-a$ mit $b-b$ muß gleich Null sein; da nun das Produkt von $-a$ mit $+b$ nach dem Vorhergehenden gleich $-ab$ ist, so muß das Produkt von $-a$ mit $-b$ gleich $+ab$ sein, um das erste Produkt zu vernichten. $-a$ mit $-b$ multiplicirt gibt daher $+ab$.

Die Multiplicationsregel läßt sich auch auf folgende Art beweisen:

Man hat $a + (-b) = a - b$

$c \quad = c \quad,$

also auch $ac + c(-b) = ac - bc,$

oder $c \cdot (-b) = -bc.$

Man setze die zwei Gleichheiten:

$$a - b = g \; \ldots . (1), \quad c - d = k \; \ldots . (2).$$

Addirt man in der ersten Gleichheit b auf beiden Seiten hinzu, zieht dann successive a und g beiderseits ab, und verfährt man ähnlicherweise mit der Gleichheit (2), so erhält man die zwei Gleichungen:

$$b - a = -g \; \ldots . (3), \text{ und } d - c = -k \; \ldots . (4).$$

Multiplicirt man die Gleichungen (1) und (2), und die Gleichungen (3) und (4) Glied für Glied mit einander, so erhält man:

$$ac - bc - da + bd = k \times g, \text{ und } bd - ad - cb + ac = -k \times -g.$$

Da die ersten Theile dieser Gleichungen einerlei sind, so werden es auch die zweiten Theile sein, mithin $k \times g = -k \times -g$. Wird (1) mit (4) und (2) mit (3) Glied für Glied multiplicirt, so findet man, daß $g \times -k = k \times -g$.

Da der Divisor, mit dem Quotienten multiplicirt, den Dividend hervorbringt, so braucht man, um positive und negative Größen durch einander zu dividiren, nur ihre absoluten Werthe durch einander zu dividiren, und den Quotienten positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Dividend und Divisor gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Note 3 zu §. 11.

Zusammenstellung der zur Theorie des größten gemeinschaftlichen Theilers gehörigen Sätze.

Die im Texte angeführten Hauptsätze, auf denen die Theorie des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Polynome beruht, sind folgende:

1) Der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Polynome ist immer auch ein größter Theiler des Restes, den ihre Division liefert.

2) Der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Polynome wird nicht geändert, wenn man das eine durch eine Größe dividirt oder multiplicirt, die keinen gemeinschaftlichen Factor mit dem andern Polynome hat. Dieser Satz erlaubt uns die einem Polynome zugehörigen Factoren, in so fern sie dem andern Polynome nicht gemein sind, ganz ausser Acht zu lassen. Ferner setzt er uns in Stand, die Theilbarkeit rücksichtlich der ersten Glieder jedesmal herzustellen.

3) Der den Polynomen gemeinschaftliche, von dem Ordnungsbuchstaben unabhängige Theiler wird herausgenommen und bei Seite gesetzt. Man findet den vom Ordnungsbuchstaben unabhängigen gemeinschaftlichen Theiler, indem man den größten gemeinschaftlichen Factor aller Coefficienten des einen Polynoms und den aller Coefficienten des andern aufsucht.

4) Das Verfahren, den vom Ordnungsbuchstaben abhängigen Factor zu finden, besteht nun darin, daß man das höhere Polynom durch das andere dividirt, bis das höchste Glied des Restes niedriger als das höchste Glied des Divisors ist; dann den Divisor durch den Rest, diesen Rest durch den zweiten Rest und so fort; nur muß man dafür Sorge tragen, daß die Theilbarkeit der höchsten Glieder bei jedesmaliger Division gelinge.

5) Der bei Seite geschriebene, vom Ordnungsbuchstaben unabhängige, gemeinsame Factor wird mit dem am Ende herauskommenden, vom Ordnungsbuchstaben abhängigen Theiler multiplicirt. Das Produkt wird nun der verlangte Theiler sein. Zur Vervollständigung dieser Lehre, die späterhin uns von Wichtigkeit sein wird, mögen hier noch folgende Sätze stehen.

6) Jedes Polynom ist entweder ein Primpolynom, oder ein Produkt von Primpolynomen oder Primzahlen. Ist ein Polynom kein Primpolynom, so kann man es, in seine Factoren zerlegt, diese abermals in ihre Factoren aufgelöst denken, und dieses so fort, bis man endlich auf solche kommt, die keine weitere Zersetzung zulassen. Daß man endlich, weil keine Brüche vorkommen, auf dergleichen Primfactoren stoßen müsse, läßt sich leicht einsehen.

7) Jeder größte gemeinschaftliche Theiler zweier Polynome ist ein Produkt aller ihrer gemeinsamen Primpolynome. Denn nur dieses Produkt kann die beiden Polynome genau theilen, daß die Quotienten keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben.

8) Hat man überhaupt einen gemeinsamen Factor zweier Polynome erkannt, so schreibt man diesen heraus, und sucht nunmehr zwischen den noch bleibenden Polynomen den größten gemeinschaftlichen Theiler. Am Ende wird dieser Theiler mit den herausgenommenen Factoren multiplicirt.

9) Da das höchste Glied des Ordnungsbuchstaben in den vereinfachten Polynomen bei jeder Subtraction verschwindet, mithin jeder Rest niedrigere Potenzen dieses Buchstaben, als der vorhergehende Rest enthält, so wird man am Ende, wenn die Division nicht eher aufgeht, zu einem Reste gelangen, wo der Ordnungsbuchstabe nicht weiter vorkommt. In diesem letzteren Falle haben die Polynome, wenn jener Rest nicht Null ist, offenbar keinen von dem Ordnungsbuchstaben abhängigen, gemeinschaftlichen Theiler, oder mit andern Worten: die vereinfachten Polynome, in denen die von dem Ordnungsbuchstaben abhängigen Factoren nämlich nicht mehr vorkommen, haben keinen andern gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit. Nachstehendes Beispiel wird dies erläutern:

Man soll für

$$(9b^2 - 18bc)\,a^3 + (21b^3 - 42b^2c)\,a^2 + (36b^3c - 18b^4)\,a\,(A) \text{ und}$$
$$(15b^2 - 30bc)\,a^2 + (18b^2c - 9b^3)\,a,\ (B)$$
den größten gemeinschaftlichen Theiler finden.

Man sieht hier bald, daß $3ab$ ein Bestandtheil des gesuchten Theilers ist. Nach Hinweglassung dieses Factors erhält man

$$(A'),\ (3b - 6c)\,a^2 + (7b^2 - 14bc)\,a + 12b^2c - 6b^3,$$
$$(B'),\ (5b - 10c)\,a + 6bc - 3b^2.$$

Der größte gemeinschaftliche Theiler der Coefficienten dieser Polynome ist $b - 2c$; streicht man letzteren Factor in den Polynomen A' und B' weg, so hat man die vereinfachten Polynome

$$3a^2 + 7ba - 6b^2 \text{ und } 5a - 3b.$$

Um die Theilbarkeit der ersten Glieder herzustellen, wird der Dividend mit 5 multiplicirt. Hier folgt die Rechnung:

$$\begin{array}{rrr|l}
15a^2 & +\ 35ba & -\ 30b^2 & 5a - 3b \\
-15a^2 & +\ 9ab & & \overline{3a + 22} \\
\hline
 & 44ab & -\ 30b^2 & \\
 & 2b(22a & -\ 15b) & \\
 & 110a & -\ 75b & \\
 & 110a & +\ 66b & \\
\hline
 & & -\ 9b &
\end{array}$$

Der Factor $2b$ wird weggestrichen und dann mit 5 multiplicirt.

Man findet also für die vereinfachten Polynome den Theiler 1; wird dieser mit den bei Seite gesetzten Factoren $(b-2c)$ und $3ab$ multiplicirt, so hat man $3ab\,(b-2c)$ als größten gemeinschaftlichen Theiler der gegebenen Polynome.

Die Zusammenstellung vorstehender Sätze zeigt, daß das angegebene Verfahren, ebenso wie bei Zahlen, stets zum Zweck führt, d. h. daß man durch dasselbe am Ende den größten gemeinschaftlichen Theiler der Polynome findet.

Note 3 zu §. 38.

Eine jede ganzzahlige Potenz von $\sqrt{-1}$ zu bilden.

Auflösung. Der Grad der verlangten Potenz werde durch 4 dividirt, der Rest der Division gibt die gesuchte Potenz. — Bezeichnen wir $\sqrt{-1}$ durch x, so sind sämmtliche gesuchte Potenzen von $\sqrt{-1}$ in folgenden vier Formen enthalten:

$$(\sqrt{-1})^{4n} = x^{4n} = (x^4)^n = (+1)^n = +1.$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = x^{4n+1} = x^{4n}\cdot x = +1.\ \sqrt{-1} = +\sqrt{-1}.$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = x^{4n+2} = x^{4n}\cdot x^2 = +1\cdot -1 = -1.$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = x^{4n}\cdot x^3 = 1\cdot x^2\cdot x = -x = -\sqrt{-1}.$$

Aus diesen Gleichheiten erhellet die Richtigkeit der Auflösung.

Note 4 zu §. 43.

Wenn h in der Potenz a^h so klein, als man nur immer will, werden kann, so wird auch die Potenz der Einheit so nahe kommen können, als man nur immer will. Man setze $h = \frac{1}{z}$ und $a^{\frac{1}{z}} - 1 = \frac{1}{x}$. Die letzte Gleichung gibt $a = \left(\frac{x+1}{x}\right)^z$. So oft nun aber $\frac{x+1}{x}$ mit sich selbst multiplicirt wird, so oft kommt mehr als $\frac{1}{x}$ der Einheit zu dem Producte. Wird also $\frac{x+1}{x}$ auf die $z$te Potenz erhoben, so ist $\left(\frac{x+1}{x}\right)^z > \frac{x+1}{x} + \frac{z-1}{x} > \frac{x+z}{x}$. Folglich $a > \frac{x+z}{x}$, woraus $\frac{1}{x} < \frac{a-1}{z}$. Da nun z größer als jede noch so große Zahl werden kann, so muß $\frac{1}{x}$ kleiner als irgend eine kleine Größe werden, d. h. der Unterschied zwischen $a^{\frac{1}{z}}$ und 1 kann so klein, als man will, werden.

Note 5 zu §. 43.

Oefters wird $\sqrt{(a+b)}$ mit $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, und $\sqrt{(a-b)}$ mit $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ verwechselt, so verschieden auch diese Ausdrücke sind.

Es ist nämlich:

1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ größer als $\sqrt{(a+b)}$.

Offenbar ist $a + b + 2\sqrt{ab} > a+b$, oder

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > a + b; \text{ folglich}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{(a+b.)}$$

2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ kleiner als $\sqrt{(a-b)}$, wenn $a>b$ ist. Man hat $a>b$; also $ab>b^2$, oder $\sqrt{ab}>\sqrt{b}$; also auch $2\sqrt{ab}>2b$. Wird auf beiden Seiten dieser Ungleichheit $a-b$ hinzu addirt, so kommt die Ungleichheit $a-b+2\sqrt{ab}>a+b$; woraus, wenn man beiderseits $2\sqrt{ab}$ abzieht, $a-b>a+b-2\sqrt{ab}$; daher $\sqrt{(a-b)}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$, was zu beweisen war.

Note 6 zu §. 53.

Auslegung der gebrochenen und negativen Werthe von n bei arithmetischen Progressionen:

I. Aus den Bestimmungsstücken a, d und l habe man für n einen Ausdruck von der Form $p + \frac{q}{m}$ gefunden, wo p eine ganze Zahl und $\frac{q}{m}$

einen ächten Bruch darstellt. In solchem Falle ist l eigentlich kein Glied der Progression, welche a zum ersten Gliede und d zur Differenz hat. Schalten wir aber in dieser Progression zwischen je zwei Glieder $(m-1)$ neue Glieder ein, so wird l dem $[mp-(m-1)+q]$ten Gliede dieser durch Interpolation erhaltenen Progression gleich sein. Bezeichnet d' die Differenz jener neuen Progression, so ist $d' = \frac{l-a}{(p-1)m+q}$, weil dem gefundenen n gemäß $d = \frac{(l-a)m}{(p-1)m+q}$. Da $(p-1)$ $(m-1)$ neue Glieder hinzukommen, so wird die Gesammtzahl der Glieder gleich $p + (m-1)(p-1)$ sein. Nehmen wir in der neuen Progression noch q Glieder weiter hinzu, so ist der Werth x dieses $[mp-(m-1)+q]$ten Gliedes durch die Gleichung $x = a + [mp-(m-1)+q-1] \frac{(l-a)}{(p-1)m+q}$ bestimmt, woraus $x = l$, was zu beweisen war.

Beispiel. Es sei $a = 5$, $l = 15$, $d = 3$, so wird $n = 4\frac{1}{3}$. Schalten wir zwischen je zwei Nachbarglieder zwei neue ein, so ist die Zahl 15, obschon kein Glied der frühern Progression, doch das eilfte Glied der neuen Progression, deren Differenz $= \frac{10}{10} = 1$ ist.

Erhält man aus den gegebenen Stücken a, d und l für n einen ganzen negativen Werth, so sagt ein solcher Ausdruck aus, daß l auf der linken Seite der von a fortgesetzten Progression liege. Die negativen n sind für die rückwärts von a verlängerte Progression gerade das, was die positiven n für die von a vorwärts gehende Progression darstellen. In der That ist die rückwärts fortgesetzte Reihe folgende: $a-d$, $a-2d$, $a-3d\ldots$, deren Glieder offenbar mit den aus der Formel $l = a + (n-1)d$ gewonnenen Ausdrücken, wenn man für n successive die Werthe $0, -1, -2\ldots$, setzt, übereinstimmen.

Beispiel. Es sei $a = 10$, $l = 4$ und $d = 3$; man soll die Stelle des Gliedes 4 finden. Man hat $4 = 10 + (n-1)3$, woraus $n = -1$ folgt, d. h. das Glied 4 steht auf der zweiten Stelle zur Linken von 10, indem 7 die $(1-1)$te oder 0te Stelle, die natürlicherweise mitzählt, einnimmt.

Die auf beiden Seiten fortlaufende Reihe ist hier:

$$\ldots\ldots -5,\ -2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19\ \ldots\ldots$$

Ist n negativ und zugleich von der Form $p + \frac{q}{m}$, so wird durch Einschaltung von $(m-1)$ neuen Glieder in der rückwärts fortgesetzten Progression die Stelle des gegebenen Gliedes l gefunden werden.

II. Aus den Bestimmungsstücken s, a, l hat man $n = 2p + \frac{q}{m}$ gefunden. Es zeigt ein solcher Ausdruck, daß s keine eigentliche Summe der vorliegenden Reihe sei. Es kommt jedoch diese Summe heraus, wenn man zur Summe der p ersten Glieder der Progression die Summe der p ersten Glieder der auf l rückwärts folgenden Glieder, sammt dem $\frac{q}{2m}$ten Theile der beiden $(p+1)$ten Glieder hinzu addirt. Bezeichnen wir durch S' die erste und durch S'' die zweite dieser gedachten Summen, so erhalten wir

$$S' = \left(a + a + (p-1)\,\frac{(l^2 - a^2)}{2s - (a+l)}\right)\frac{p}{2}, \text{ und}$$

$$S'' = \left(l + l - (p-1)\,\frac{(l^2 - a^2)}{2s - (a+l)}\right)\frac{p}{2}.$$

Ausserdem ist der $\frac{q}{2m}$te Theil des $(p+1)$ten Gliedes der vorwärts genommenen Reihe, den wir x' nennen wollen, $= \left(a + \frac{p(l^2-a^2)}{2s-(a+l)}\right)\frac{q}{2m}$, und x'', derselbe Theil des $(p+1)$ten Gliedes der rückwärtsgehenden Reihe, $= \left(l - \frac{p(l^2-a^2)}{2S-(a+l)}\right)\frac{q}{2m}$.

Wir haben hiernach $S' + S'' + x' + x'' = (a+l)\left(p + \frac{q}{2m}\right)$.

Dem angenommenen n gemäß ist aber $a + l = \frac{2sm}{2pm+q}$; folglich $S' + S'' + x' + x'' = s$, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergibt.

Beispiel. Es sei $a = 2$, $n = 40$, $s = 154$. Man hat $n = \frac{308}{42} = 7\frac{1}{3}$.

Die vorwärts gehende Reihe ist: 2, 8,14, 20, 26 . . . . .
Die rückwärts laufende Reihe ist: 40, 34, 28, 22, 16 . . .

Hier ist $s' = 24$ und $s'' = 102$, ferner $x' = 13\frac{1}{3}$ und $x'' = 14\frac{2}{3}$, was in Summe 154 macht. Hat man nämlich $n = 2p - 1 + \frac{q}{m}$ gefunden, so setzt man dafür

$$n = 2p - 2 + \frac{q + m}{m},$$

was einerlei ist.

III. Eine ähnliche Auslegung findet bei den aus der Formel $n = \frac{2l+d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2l+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$ gefundenen Werthe von der Form $n = 2p + \frac{q}{m}$ statt.

Beispiel. Es sei $d = 5$, $l = 41$, $s = 189$; man findet $n = q$ oder $8\frac{2}{5}$. Für den Werth $n = 8\frac{2}{5}$ haben wir $a = 4$. Hiernach
die vorwärts laufende Reihe: 4, 9, 14, 19 ....
die rückwärts gehende Reihe: 41, 36, 31, 26 ....
Wir erhalten $s' = (4+19)\,2 = 46$, und $s'' = 134$; ausserdem $x' = \frac{24}{5}$, und $x'' = \frac{21}{5}$, was die Summe 189 gibt.

Ist n irrational, so kann man auf diesem Wege, wenn anstatt n eine rationale Zahl, die dem irrationalen n sehr nahe liegt, genommen wird, die Summe s beinahe erhalten.

IV. Der negative Werth von $n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2\right]}$ verlangt, daß die Reihe auf der linken Seite von a weiter fortgesetzt werde. Es läßt sich darthun, daß wenn $n = -2p$, die Summe der p ersten Glieder der Reihe $a, (a-d), (a-2d)$ .... und die Summe der p ersten Glieder der entgegengesetzt laufenden Reihe $l, a-2pd, a-(2p-1)d$... zusammen eine Summe $= s$ geben.

Beispiel. Es sei $a = 5$, $d = 2$, $S = 140$. Die Formel $n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2\right]}$ gibt $n = 10$ und $= -14$. l steht also in der 15ten Stelle links von a und ist $= 5 - 2 \cdot 15 = -25$. Die Summe der 7 ersten Glieder der Reihe 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, und die Summe der 7 Glieder der entgegengesetzt laufenden Reihe -25, -23, -21, -19, -17, -15, -13 machen zusammen 140, abgesehen vom Zeichen.

Ist $n = -(2p+1)$, so nimmt l die $(2p+2)$te Stelle ein. In diesem Falle gibt die Summe der p ersten Glieder von l an nach der rechten Seite zu, plus der Summe der p ersten Glieder von a an nach der linken Seite zu, plus dem Mittelgliede der Gesammtreihe eine Summe $= s$.

Beispiel. Es sei $a = 5$, $d = 2$, $s = 77$. Wir erhalten $n = 7$ und $= -11$. l steht in der zwölften Stelle von a und ist gleich -19. Die von a nach der Linken verlängerte Reihe ist folgende:
5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, -11, -13, -15, -17, -19.
Die Summe der 5 ersten Glieder 19, 17, 15, 13, 11 nebst der Summe der 5 ersten Glieder -5, -3, -1, 1, 3 plus dem Mittelgliede 7 gibt

die Summe 77. In beiden Fällen also fehlen in der Reihe zwei symmetrisch liegende Glieder.

Hat man $n = -2p - \frac{q}{m}$, so nimmt man ausser den $2p$ erwähnten Gliedern nach den $\frac{q}{2m}$ten Theil der beiden in den $p$ten Stellen von den äussersten Enden a und l stehenden Gliedern, um die gegebene Summe zu erhalten.

Note 7 zu §. 56.

Der Logarithme einer ganzen Zahl ist entweder ganzzahlig oder incommensurabel.

Die vollständigen Potenzen von 10 haben offenbar ganzzahlige Logarithmen. Wir müssen nun darthun, daß die Gleichung $10^{\frac{p}{q}} = z$, wo $\frac{p}{q}$ ein Bruch ist, nicht statt findet, wenn z eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

1) z und 10 seien Primzahlen unter sich. Wäre $z = 10^{\frac{p}{q}}$, so würde man, wenn man beiderseits auf die $q$te Potenz erhebt, $10^p = z^q$ erhalten; woraus $10^{p-1} = \frac{z^q}{10}$, was unmöglich ist.

2) Es sei $z = 2^r$ oder 5^r. Wäre z. B. $2^r = (10)^{\frac{p}{q}}$, dann auch $2^{rq} = 10^p$, was ebenfalls unmöglich ist.

3) Es sei $z = 2^r \cdot n$ oder $= 5^r \cdot n$; n und 10 sind Primzahlen unter sich. Hätte man z. B. $10^{\frac{p}{q}} = 2^r \cdot n$; dann auch $10^p = 2^{rq} \cdot n^q$; woraus $\frac{10^p}{n^q} = 2^{rq}$, was ungereimt ist.

4) Es sei $z = 2^r \times 5^t \times n$, oder $= 2^r \times 5^t$, wo n und 10 Primzahlen unter sich sind. Es kann $10^{\frac{p}{q}}$ nicht gleich $2^r \times 5^t \times n$ sein, weil hieraus $10^p = 2^{rq} \times 5^{tq} \times n^q$, oder $\frac{10^p}{n} = 2^{rq} \times 5^{tq} \times n^{q-1}$ folgte, d. h. ein Bruch gleich einer ganzen Zahl sein müßte. Die Gleichung $z = 10^{\frac{p}{q}}$ ist also in keinem Falle zuläßig.

Die Logarithmen der Brüche 0,1; 0,01 .... sind negative ganze Zahlen. Dagegen sind die Logarithmen der übrigen Brüche, sie mögen

ächt oder unächt sein, incommensurabel. Wäre $\log.(\frac{a}{b}) = n$, wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, so hätte man $\frac{a}{b} = 10^n$, was unmöglich ist. Man kann auch nicht $\frac{a}{b} = 10^{\frac{p}{q}}$ setzen, $\frac{p}{q}$ mag positiv oder negativ sein, weil dann $\left(\frac{a}{b}\right)^q = 10^p$ wäre. — Also können nur die Logarithmen von den Zahlen 1, 10, 100.... und die von den Brüchen 0,1; 0,01; 0,001.... genau erhalten werden.

Note 8 zu §. 57.

Zu zeigen, wie es möglich ist, die Logarithmen der ganzen Zahlen zu finden.

Wir wollen annehmen, daß der Log. 2 gesucht werden soll. Man setze $10^x = 2$. Man sieht, daß x zwischen 0 und 1 liegt; man schreibe daher $x = \frac{1}{z}$, woraus $10^{\frac{1}{z}} = 2$, oder $10 = 2^z$. Da z zwischen 3 und 4 liegt, so setze man $z = 3 + \frac{1}{z'}$. Man erhält dann $10 = 2^{3 + \frac{1}{z'}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z'}}$, oder $\frac{5}{4} = 2^{\frac{1}{z'}}$, oder $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z'}$. Man findet, daß z' zwischen 3 und 4 fällt, also $z' = 3 + \frac{1}{z''}$. Hiernach wird $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}}$, woraus $\left(\frac{128}{125}\right)^{z''} = \frac{5}{4}$. Man findet durch Probiren, daß $z'' = 9 + \frac{1}{z'''}$ ist.

Bleiben wir bei dieser Annäherung stehen, die man nach Belieben weiter fortsetzen kann, so erhalten wir durch successive Substitution der gefundenen Werthe: $z' = \frac{28}{9}$, $z = \frac{93}{28}$, $x = \frac{28}{93}$. Wir haben demnach annähernd $\log. 2 = \frac{28}{93} = 0{,}30107$, ein Werth, der bis auf die vierte Ziffer genau ist, da der bis auf 7 Decimalstellen berechnete 0,3010300 macht.

Erhebt man also die Zahl 10 zu einer Potenz vom Grade 3010300 und zieht aus dem Resultate die Wurzel vom Grade 10000000, so erhält man eine Zahl, welche beinahe gleich 2 ist.

Diese Methode zur Berechnung der Logarithmen ist zwar weniger langwierig als die in der Arithmetik angegebene, jedoch ist sie noch äusserst mühsam; auch sind die Logarithmen auf diesem Wege nicht berechnet worden. Einfachere Mittel zu ihrer Bestimmung werden später vorkommen.

Bemerkt mag noch werden, daß man die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen leicht finden kann, wenn man die Logarithmen der Primzahlen bestimmt hat.

Note 9.

Einiges von den höhern arithmetischen Progressionen.

Wenn man in einer Reihe von Gliedern a, b, c, d u. s. w. die Unterschiede $b-a$, $c-b$ u. s. w. der nächst auf einander folgenden Glieder bildet, so machen die auf diese Art erhaltenen Größen die erste Differenzenreihe aus. Nimmt man in dieser ersten Differenzenreihe abermals die Unterschiede der auf einander folgenden Glieder $c-b-(b-a)$, $d-c-(c-b)$ u. s. w.; so bilden diese Unterschiede die zweite Differenzenreihe. Auf dieselbe Art wird die dritte, vierte u. s. w. Differenzenreihe der ursprünglichen oder Hauptreihe abgeleitet. Gelangt man auf solche Art auf eine aus lauter gleichen Gliedern bestehende $n$te Differenzenreihe, so heißt die Hauptreihe eine arithmetische Progression der höhern Ordnung und zwar von der $n$ten Ordnung. Die im §. 52 betrachteten arithmetischen Reihen sind also hiernach arithmetische Reihen der ersten Ordnung.

Die Quadrate der natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung. In der That sind sämmtliche ganze Zahlen in den Formeln $3n$, $3n+1$, $3n+2$ enthalten. Bilden wir die Quadrate dieser Ausdrücke, die erste und zweite Differenzenreihe derselben, so entsteht folgende Tabelle:

Zahlen.	Quadrate.	1te Differenzenreihe.	2te Differenzenreihe.
$3n$	$9n^2$		
$3n+1$	$9n^2+6n+1$	$6n+1$	
$3n+2$	$9n^2+12n+4$	$6n+3$	2.

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich, daß die zweite Differenz $=2$ ist, welche drei auf einander folgende Quadrate man übrigens auch betrachten mag.

Die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Progression der dritten Ordnung. Bilden wir die Cuben der vier beliebig auf einander folgenden Zahlen $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, sammt der ersten, zweiten und dritten Differenzenreihe jener Cuben, so erhält man folgende Darstellung:

Zahlen.	Cuben.	1te Differenzenreihe.	2te Differz.	3te Differz.
$4n$	$64n^3$			
$4n+1$	$64n^3+48n^2+12n+1$	$48n^2+12n+1$		
$4n+2$	$64n^3+96n^2+48n+8$	$48n^2+36n+7$	$24n+6$	
$4n+3$	$64n^3+144n^2+108n+27$	$48n^2+60n+19$	$24n+12$	6

Die dritte Differenz bleibt also dieselbe für alle Werthe von n.

Wir werden später sehen, daß die $m$ten Potenzen der Reihe 1^m, 2^m, 3^m, 4^m .... eine arithmetische Progression der $m$ten Ordnung bilden, deren $m$te Differenz $= 1 \times 2 \times 3 \times \ldots m$, wo m eine ganze Zahl darstellt.

Note 10.

Die Summe der Quadrate und Cuben der in einer arithmetischen Reihe stehenden Zahlen zu finden:

Es sei die arithmetische Reihe $a, b, c \ldots i, k, l$; die constante Differenz werde wie gewöhnlich durch d dargestellt. Der Natur der Progression zufolge haben wir $b = a + d$, $c = b + d \ldots l = k + d$.

Erheben wir diese Gleichungen beiderseits aufs Quadrat, auf den Cubus und auf die vierte Potenz, so erhalten wir folgende Systeme von Gleichungen:

I.

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + 2ad + d^2 \\ c^2 &= b^2 + 2bd + d^2. \\ &\vdots \\ l^2 &= k^2 + 2kd + d^2. \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} b^3 &= a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3. \\ c^3 &= b^3 + 3b^2d + 3bd^2 + d^3. \\ &\vdots \\ l^3 &= k^3 + 3k^2d + 3kd^2 + d^3. \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} b^4 &= a^4 + 4a^3d + 6a^2d^2 + 4ad^3 + d^4. \\ c^4 &= b^4 + 4b^3d + 6b^2d^2 + 4bd^3 + d^4. \\ &\vdots \\ l^4 &= k^4 + 4k^3d + 6k^2d^2 + 4kd^3 + d^4. \end{aligned}$$

1) Addiren wir die Gleichungen des ersten Systems Glied für Glied, so haben wir nach Hinweglassung der gemeinschaftlichen Glieder und Versetzung von a^2 in den ersten Theil:

$$l^2 - a^2 = 2d(a + b + c + \ldots i + k) + (n-1)\,d^2, \text{ oder}$$

$$l^2 - a^2 = 2d\,(S_1 - l) + (n-1)d^2,$$

wenn S_1 die Summe der n Glieder der arithmetischen Reihe bedeutet. Hieraus folgt

$$S_1 = \frac{(l^2 - a^2) - (n-1)d^2 + 2ld}{2\,d};$$

setzt man für l seinen Werth, so kommt

$$S_1 = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} = \frac{d}{2}\;n^2 + \frac{2a-d}{2}\;n.$$

2) Addiren wir ebenso die Gleichungen des zweiten Systems zu einander, so erhalten wir

$$l^3 - a^3 = 3d(a^2 + b^2 + \ldots + k^2) + 3d^2(a + b + \ldots + k) + (n-1)d^3, \text{ oder}$$

Inhalt des zweiten Buches.

(Niedere Algebra.)

Erstes Kapitel.

Von den algebraischen Rechnungsarten.

Zweites Kapitel.

Von den Gleichungen des ersten Grades.

Drittes Kapitel.

Von den Potenzen, den Wurzeln und Gleichungen des zweiten Grades.

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnissen und Anwendung derselben auf praktische Rechnungen.

Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

L. B. Francoeur,
Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der vierten verbesserten und vermehrten Original-Ausgabe (1837) aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. Edmund Külp,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Zweiten Bandes erstes Buch,

enthaltend

die höhere Algebra.

Mit einer Kupfertafel.

Bern, Chur und Leipzig,
Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.
1841.

Haller'sche Buchdruckerei in Bern.

Inhalt.

Zweiten Bandes erstes Buch.

(Die höhere Algebra).

Erstes Kapitel.

Von den Combinationen und Potenzen.

Zweites Kapitel.

Von der Auflösung der Gleichungen.

Inhalt. Zweiten Bandes erstes Buch.

Seite.

Drittes Kapitel.

Von der Auflösung besonderer Gleichungen.

Viertes Kapitel.

Von den symmetrischen Funktionen.

Fünftes Kapitel.

Von den Kettenbrüchen.

Sechstes Kapitel.

Von der Methode der unbestimmten Coefficienten.

Erstes Kapitel.

Von den Combinationen und Potenzen.

Permutationen und Combinationen.

§. 1. Wenn Glieder aus mehreren gleichartigen oder ungleichartigen in verschiedener Ordnung an einander gereihten Buchstaben (Elementen) bestehen, so nennt man solche Zusammenstellungen **Permutationen** (Versetzungen), dagegen aber **Combinationen**, wenn wenigstens in jedem Gliede einer jener Buchstaben verschieden ist, und dabei auf die Ordnung der Buchstaben keine Rücksicht genommen wird. So z. B. sind abc, bac, cba, bca, 4 Permutationen, und abc, abd, bcd, acd, 4 Combinationen zu 3 und 3. — Die Anzahl aller möglichen Permutationen von m Buchstaben, p zu p genommen, wollen wir im Allgemeinen durch das Symbol [m Pp], die Anzahl sämmtlicher Combinationen hingegen durch [m Cp] darstellen. —

Anmerkung. Gegebene Größen **permutiren** heißt gewöhnlich, sie alle zusammen, so oft es möglich ist, in einer andern Ordnung an einander reihen. Gegebene Größen **combiniren** heißt, sie in Klassen von 2, 3, 4 . . . ., so oft es möglich ist, an einander reihen, wobei nicht mehr auf die Ordnung der Größen gesehen wird. Nimmt man aber zugleich jede Combination mit allen ihren Permutationen, so nennt man diese Operation auch das **Variiren**.

Es sei jetzt unsere Aufgabe, die **Anzahl sämmtlicher Permutationen von m Buchstaben, p zu p genommen**, oder

y = [m Pp] zu finden. Wir betrachten zu diesem Behufe zuvörderst jene Anordnungen, welche mit einem Buchstaben wie z. B. a anfangen, jedoch von einander verschieden sind, sei es hinsichtlich irgend eines andern Buchstabens zur Rechten von a, sei es auch nur in Rücksicht der Stellung, in der sich gedachte Buchstaben neben einander befinden. Läßt man nun überall diesen Anfangsbuchstaben a weg, so hat man eine gleiche Anzahl von Verbindungen aus (p—1) Buchstaben: es sind dieß offenbar alle mögliche Versetzungen der (m—1) übrigen Buchstaben b, c, d . . ., zu (p—1) und (p—1) genommen. Drücken wir die Anzahl dieser Versetzungen durch φ aus, so haben wir, der gewählten Zeichensprache zufolge, $\varphi = [(m-1)\ P\ (p-1)]$. Nimmt man demnach diese (m—1) Buchstaben b, c, d . . . ., bildet dann mit ihnen alle mögliche Permutationen zu je p—1, setzt endlich jeder einzelnen auf solche Weise gefundenen Permutationsform a vor; so hat man alle Permutationen zu je p mit dem Anfangsbuchstaben a. In der That sollte eine von diesen Permutationen weggelassen sein oder mehreremal wiederholt vorkommen, so müßten, nach Wegstreichen des an der Spitze stehenden Buchstabens a, die übrigbleibenden Anordnungen den nämlichen Fehler darbieten, d. h. es müßte irgend eine Permutation aus den Buchstaben b, c, d . . . . zu je (p—1) ebenfalls weggelassen oder wiederholt worden sein, was gegen die Voraussetzung streitet, da diese Permutationen als richtig entwickelt angenommen sind. — Es gibt folglich eben so viele Versetzungen aus m—1 Buchstaben zu je p—1, als Versetzungen aus m Buchstaben zu je p mit dem Anfangsbuchstaben a vorkommen; ihre Anzahl ist daher = φ. Verfährt man auf ähnliche Weise mit b, wie mit a geschehen, so findet man φ Permutationen, die mit b anfangen; desgleichen φ Permutationen, in denen c der erste Buchstabe ist, u. s. w. f. Da nun jeder unserer Buchstaben die erste Stelle einnehmen kann, so wird die gesuchte Zahl y die Zahl φ so oftmal enthalten, als Buchstaben vorhanden sind; d. h. es ist

$$y = m\varphi, \text{ oder } [m\ Pp] = m\ [(m-1)\ P\ (p-1)].$$

Hieraus ergeben sich nachstehende Resultate:

I. Für die Anzahl y'' der Versetzungen von m Buchstaben zu zweien hat man $y'' = m\ (m-1)$, weil die Anzahl φ der Versetzungen von m—1 Buchstaben, zu 1 und 1 genommen, offenbar gleich m—1 ist.

II. Um die Anzahl der Versetzungen von m Buchstaben zu dreien zu finden, wird man p = 3 setzen; φ drückt dann die Anzahl der

Versetzungen, deren $m-1$ Buchstaben zu 2 und 2 fähig sind, aus, eine Zahl, die aus y'' dadurch abgeleitet wird, daß man m in $m-1$ umändert. Hiernach ist $\varphi = (m-1)(m-2)$, und $y''' = m(m-1)(m-2)$.

III. Man findet ebenso für die Anzahl der Permutationen von m Buchstaben zu 4 und 4, $y^{IV} = m(m-1)(m-2)(m-3)$; u. s. f. — Es ist leicht einzusehen, daß, um von einer dieser Gleichungen zu der darauf nächst kommenden zu gelangen, man m in $m-1$ verwandeln und alsdann mit m multipliciren, oder, was auf dasselbe hinausläuft, den Factoren $m, m-1, \ldots$ das der letztern dieser Zahlen unmittelbar folgende Ganze beifügen muß. Für p Buchstaben wird dieser letzte Multiplicator $m-(p-1)$ sein, wonach

$$y = [m\,Pp] = m(m-1)(m-2)\ldots\times(m-p+1)\ldots(1);$$

die Zahl der Factoren ist p. Die Anzahl aller möglichen Versetzungen aus 9 Dingen zu je 4 wird also durch das Produkt der 4 Factoren $9.\ 8.\ 7.\ 6 = [9\ P4] = 3024$ angegeben: auf so vielerlei Arten können hiernach 9 Personen 4 Plätze so einnehmen, daß sie jedesmal eine andere Ordnung beobachten. — Die Versetzungen von m Dingen zu je 1 machen mit denen zu je 2 zusammen $m + m(m-1) = m^2$.

IV. Setzt man $m = p$, so erhält man die Anzahl z aller möglichen Versetzungen von p Buchstaben, wo dieselben in jeder Anordnung zusammen vorkommen, nämlich

$$z = [p\,Pp] = p(p-1)\ldots 3.\ 2.\ 1. = 1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots p\ldots(2).$$

Die Zahl der Permutationen der 7 Noten der gewöhnlichen Tonleiter beträgt $1.\ 2.\ 3.\ldots 7 = 5040$; man erhält 479001600, wenn die halben Töne mitgerechnet werden.

§. 2. Wir wollen jetzt die **Zahl x der verschiedenen Combinationen von m Buchstaben, zu p und p genommen, oder $x = [m\,Cp]$ finden.** Wir nehmen an, daß diese x Combinationen gefunden und successive neben einander in derselben Horizontallinie geschrieben seien. Wir setzen darauf unter die erste jener Combinationen nach einander alle Permutationen der darin vorkommenden p Buchstaben; es entsteht dadurch eine aus z Gliedern zusammengesetzte Verticalcolonne (Gl. 2). Die zweite Combination in gedachter Horizontallinie wird ebenso eine aus z Gliedern gebildete Verticalcolonne liefern, welche sämmtliche Permutationen der in jener zweiten Combination enthaltenen p Buchstaben in sich begreift, von denen einer wenigstens von denjenigen Buchstaben verschieden ist,

die in der schon betrachteten Combination vorkommen. Die dritte Combination gibt gleichfalls z Glieder, die von denen der andern Parthieen verschieden sind, u. s. w. f. Man bildet also auf diese Weise eine Tabelle, welche x Colonnen jede mit z Gliedern enthält, im Ganzen demnach xz Resultate, welche offenbar alle möglichen Versetzungen unserer m Buchstaben, p zu p genommen, ausmachen, ohne daß irgend eine weggelassen oder wiederholt vorkäme. Da diese letzte Zahl y ist (Gl. 1), so hat man $y=zx$, woraus $x=\frac{y}{z}=\frac{[m\ Pp]}{[p\ Pp]}$, nämlich

$$x=[m\,Cp]=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\times\frac{m-p+1}{p}\cdots(3).$$

Die Formeln (1) und (2) enthalten jede p Factoren; die Gleichung (3) hat daher deren ebenfalls p, welche als Brüche erscheinen, deren Glieder ganzzahlig sind, und die natürliche Zahlrenreihe befolgen, in der Art, daß dieselben von m anfangend für den Zähler abnehmen und für den Nenner bis p wachsen. Da x seiner Natur nach eine ganze Zahl ist, so muß die Formel (1) durch (2) theilbar sein; was sich übrigens auch direct beweisen ließe.

§. 3. Man hat

$$[m\ Cq]=x'=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdot\frac{m-q+1}{q}.$$

Es sei $p>q$; alle Factoren der letztern Gleichung kommen in der Gleichung (3) vor, die demnach wie folgt geschrieben werden kann:

$$x=x'\cdot\frac{m-q}{q+1}\cdot\frac{m-q-1}{q+2}\cdots\frac{m-p+1}{p}.$$

I. Wir wollen vorerst untersuchen, ob $x=x'$ sein kann. Es ist klar, daß in solchem Falle das Produkt aller dieser Brüche sich auf 1 reduciren muß, oder die Zähler dasselbe Produkt wie die Nenner liefern. Nimmt man die letztern in umgekehrter Ordnung, so hat man

$$(m-q)\ (m-q-1)\ \ldots=p\ (p-1)\ \ldots\ (q+1).$$

Da nun diese beiden Glieder eine gleiche Anzahl stetigfortlaufender und abnehmender Factoren besitzen, so könnte die in Frage stehende Gleichheit nicht Bestand haben, wenn nicht jeder Factor auf der einen Seite demjenigen gleich wäre, der auf der andern Seite die nämliche Stelle einnimmt, weil sonst, nach Hinweglassung der gemeinschaftlichen Factoren die noch übrigbleibenden auf der einen Seite

sämmtlich größer als die auf der andern Seite in gleicher Anzahl vorhandenen sein würden. Damit $x=x'$ werde, muß also durchaus $m-q=p$ sein. Es erzeugt dieß folgende Formel:

$$[m\,Cp]=[m\,Cq],\ \text{wobei}\ m=p+q.$$

Die Anzahl der Combinationen von 100 Dingen zu je 88 ist also eben so groß, als die zu je 12. In der That hat der Ausdruck [100 C 88] zum Zähler 100.99......13, und zum Nenner 1. 2. 3..... 88; werden die gemeinschaftlichen Factoren 13. 14....... 88 oben und unten weggestrichen, so bleibt $\frac{100.\ 99....\ 89}{1.\ 2.\ 3\ ....\ 12}=[100\ C\ 12]$. Diese Bemerkung kann dazu dienen, die in der Formel (3) angegebenen Rechnungen zu erleichtern, wenn $p>\frac{1}{2}m$, weil man wirklich eher [100 C 4] als [100 C 96] = 3 921 225 gefunden hat.

Hieraus schließen wir, daß, wenn man die Combinationszahlen der m Buchstaben, zu je 1, zu je 2, zu je 3.... successive an einander reiht, die nämlichen Werthe in umgekehrter Ordnung jenseits des mittlern Gliedes wieder zum Vorschein kommen. Für 8 Buchstaben sind diese Zahlen 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8. (Siehe die nachstehende Tabelle.)

II. Machen wir $q=p-1$, so besitzt x nur einen Factor mehr als x′ und man hat

$$x=x'.\frac{m-p+1}{p},\ \text{oder}$$

$$[m\,Cp]=[m\,C\,(p-1)].\ \frac{m-p+1}{p}\ \ldots\ (4).$$

Hieraus ergibt sich nachstehende Regel, mit Hülfe welcher man die Anzahl der verschiedenen Combinationen von m Buchstaben, zu je 1, zu je 2,.... nacheinander ableiten kann. Man schreibt nämlich die Brüche $\frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}$.... an und multiplicirt jeden mit dem Produkte aller vorhergehenden. Um z. B 8 Buchstaben zu combiniren, schreibt man $\frac{8}{1}, \frac{7}{2}, \frac{6}{3}$, wonach man hat 8; $8\times\frac{7}{2}=28$; $28\times\frac{6}{3}=56$... In 8 Nummern der Lotterie sind also 8 Auszüge, 28 Amben, 56 Ternen, 70 Quaternen und 56 Quinternen enthalten. Die 90 Nummern geben 90 Auszüge, 4005 Amben, 117480 Ternen, 2555190 Quaternen, 43949268 Quinternen. —

Die Zähler unserer successiven Factoren $\frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \ldots$

nehmen ab, während ihre Nenner wachsen. So lange mithin diese Brüche > 1 sind, ist das Produkt im Steigen begriffen; es fällt dagegen, sobald die Stelle i des Gliedes von der Art ist, daß man

$$\frac{m-i+1}{i}<1, \text{ oder } i>\frac{m+1}{2}$$

hat. Ueberdieß wissen wir, daß man die nämlichen Produkte in umgekehrter Ordnung wiederfindet.

Für den ersten Fall, in welchem m = einer geraden Zahl 2α ist, hat man $i > \alpha + \frac{1}{2}$: die Glieder wachsen also bis zur Stelle $i=\alpha$, wo der letzte Factor $\frac{\alpha+1}{\alpha}$ wird. Das entsprechende Glied ist $[m\,C\,\frac{1}{2}\,m]$, oder

$$M=\frac{2\,\alpha\,(2\alpha-1)\ldots.(\alpha+1)}{1.\;2.\;\ldots\ldots\ldots.\;\alpha}=\frac{(\alpha+1)\;(\alpha+2)\;\ldots.\;2\alpha}{1.\;2.\;3.\;\ldots\ldots.\;\alpha}.$$

Hiernach schreibt man in den Nenner die natürliche Reihenfolge 1. 2. 3.... α, und setzt dieselbe im Zähler bis 2α weiter fort. Indem wir den Zähler durch die Factoren 1. 2. 3.... α vervollständigen, haben wir

$$M=\frac{1.2.3.\ldots.\;2\,\alpha}{(1.2.3.\ldots\alpha)^2}$$

Die geradzahligen Factoren, welche abwechselnd in einer um der andern Stelle sich befinden, geben aber $2.\,4.\,6\ldots\,2\alpha=2^{\alpha}\times 1.2.3.4\ldots\alpha$; das größte Glied, oder das in der Mitte ist folglich

$$M=[m\,C\frac{1}{2}m]=2^{\frac{1}{2}m}\;\frac{1.\,3.\,5.\,7.\ldots.(m-1)}{1.2.3.4.\ldots.\frac{1}{2}\,m}.$$

Für den zweiten Fall, in welchem m eine ungerade Zahl $=2\alpha+1$ ist, verwandelt sich die oben angeführte Bedingung in $i>\alpha+1$: die Glieder nehmen also erst dann ab, wenn die Stelle i die Größe $\alpha+1$ übertrifft. Da für diese Stelle der letzte Factor sich auf $\frac{\alpha+1}{\alpha+1}=1$ reducirt, so ist dies Glied dem vorhergehenden gleich; es wird sich dasselbe demnach in den Stellen $\alpha+1$ und α oder $\frac{1}{2}\,(m\pm 1)$ wiederholen. Setzen wir daher $i=\alpha$, so haben wir für die beiden mittlern Glieder, welche die größten sind $[m\,C\frac{1}{2}\,(m\pm 1)]=$

$$M=\frac{(2\alpha+1)\;2\alpha\;\ldots.\;\alpha+2}{1.\;2.\;3.\;\ldots\;\alpha}=\frac{(\alpha+2)\;(\alpha+3)\;\ldots..\;(2\alpha+1)}{1.\;2.\;3.\ldots\;\alpha}.$$

Indem wie oben verfahren wird, findet man

$$M=[m\,C\frac{1}{2}(m\pm 1)]=2^{\frac{1}{2}(m-1)}\;\frac{1.\;3.\;5.\;7.\ldots\;m}{1.\;2.\;3.\;4.\ldots\;\frac{1}{2}\;(m+1)}.$$

Für die größte Anzahl der Combinationen, deren 18 und 19 Buchstaben fähig sind, erhält man also

$$M = [18\,C\,9] = 2^9 \times \frac{1.3.5....17}{1.2.3.....9} = 48620;$$

$$M = [19\,C\,9] = 2^9 \times \frac{1.3.5....19}{1.2.3....10} = 92378.$$

Uebrigens ist jede Anzahl solcher Combinationen stets eine ganze Zahl.

III. Die Gleichung (4) gibt auch

$$x + x' = x'.\frac{m+1}{p} = \frac{m+1}{1}.\frac{m}{2}...\frac{m-p+2}{p},$$

$$\text{weil } x' = \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}....\frac{m-q+1}{q} \text{ und } q = p-1.$$

Die Zusammenstellung des zweiten Gliedes der vorhergehenden Gleichung mit der Gleichung (3) liefert

$$[(m+1)Cp] = [mCp] + [mC(p-1)].$$

Diese Relation setzt uns in den Stand, mittelst einer einfachen Addition die Combinationen von $m+1$ Buchstaben aus denen von m Buchstaben herzuleiten. Auf solche Weise beträgt in der nachstehenden Tabelle, welche man das arithmetische Dreieck von Pascal nennt, jede Zahl die Summe der beiden entsprechenden Glieder der vorhergehenden Linie. So z. B. finden sich in der 7ten Linie die Zahlen:

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Um die 8te Linie zu erhalten, macht man $1 + 7 = 8$; $7 + 21 = 28$; $21 + 35 = 56$; $35 + 35 = 70$; u. s. f.

Es erklärt dieß Gesetz zugleich das Wiederkehren der nämlichen Glieder in umgekehrter Ordnung, weil es hinreicht, daß dasselbe in einer Linie statt hat, um auch in der nächstfolgenden wieder zum Vorschein zu kommen. Uebrigens können wir die Glieder einer und derselben Linie nach und nach von einander ableiten, indem man dabei das Verfahren in II anwendet, oder die Glieder der voranstehenden Linie benutzt, oder endlich auf directe Art, wenn man die Gleichung (3) zu Hülfe nimmt, welche Gleichung der Ausdruck ihres allgemeinen Gliedes ist.

Coefficienten des Binoms, oder Anzahl der Combinationen.

0	1 zu 1	2 zu 2	3 zu 3	4 zu 4	5 zu 5	6 zu 6	7 zu 7	8 zu 8	9 zu 9	10 zu 10
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
1	13	78	286	716	1287	1716	1716	1287	715	286
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

IV. Es seien 1, m, a, b, c .... b, a, m, 1, die Zahlen irgend einer Linie; die der nächst folgenden sind nach III: 1, 1+m, m+a, a+b, ... a+m, m+1, 1. Die Summe der geradstelligen Glieder, nämlich 1+m+a+b+...+m+1 ist einerlei sowohl mit der der ungeradstelligen, als auch mit der Summe der Glieder in der vorhergehenden Linie. Indem man sämmtliche Glieder der $m+1^{ten}$ Linie addirt, erhält man folglich das Doppelte der Summe der m^{ten} Linie. Die Glieder der zweiten Linie addirt, geben aber $1+2+1=4=2^2$; die folgenden Linien haben daher zur Summe 2^3, 2^4, ... 2^m. Die Summe der Combinationen von m Buchstaben macht also 2^m, die der geradstelligen oder ungeradstelligen Glieder beträgt 2^{m-1}, welche Summe man auch für die Combinationen von $m-1$ Buchstaben findet.

§. 4. Wir theilen jetzt die m Buchstaben a, b, c, d ... in zwei Klassen ab, wovon die eine m', die andere m'' jener Buchstaben enthält (dabei ist $m=m'+m''$); hierauf suchen wir alle Combinationen zu je p, die aus einer Anzahl p' der erstern Buchstaben, verbun-

den mit einer Anzahl p'' der zweiten hervorgehen (dabei ist $p=p'+p''$). Wir bilden zu diesem Behuf alle Combinationen der erstern Buchstaben zu je p', und die der andern zu je p''; die Anzahl derselben wird beziehungsweise sein $[m' \, Cp']$ und $[m'' \, Cp'']$. Verbinden wir jetzt jedes einzelne erstere Resultat mit jedem zweiten, wobei p' Factoren einerseits zu p'' Factoren andererseits hinzugefügt eine Anzahl p derselben hervorbringen; so ist einleuchtend, daß diese Systeme die gesuchten ausmachen werden. Ihre Zahl ist folglich

$$X=[m'Cp'] \times [m''Cp''] \ldots (5).$$

Hiernach lassen sich leicht folgende Aufgaben lösen:

I. Wie viele unter den sämmtlichen Combinationen von m Buchstaben a, b, c ... gibt es, worin der Buchstabe a vorkommt? Man hat $m'=p'=1$ und $X=[(m-1)\,C\,(p-1)]$.

II. Wie viele gibt es darunter, welche a ohne b und b ohne a enthalten? Hier ist $m'=2$, $p'=1$; woraus $X = 2 \times [(m-2)\,C\,(p-1)]$.

III. Wie viele sind darunter, worin a und b zusammenbleiben? $m'=p'=2$; $X = [(m-2)\,C\,(p-2)]$.

IV. Wie viele gibt es, welche weder a noch b enthalten? $m'=2$ und $p'=0$; $X = [(m-2)\,Cp]$.

V. Wie viel gibt es unter den Combinationen von m Buchstaben zu je p, die zwei der drei Buchstaben a, b, c enthalten? $m'=3$, $p'=2$; $X = 3 \times [(m-3)\,C\,(p-2)]$.

VI. Die Zahl der Combinationen von 10 Buchstaben, zu 4 und 4 genommen, beträgt 210. Wenn man drei Buchstaben a, b, c heraushebt, so fragt es sich, wie viele gibt es unter jenen Combinationen, welche keinen dieser drei Buchstaben enthalten; wie viele darunter, die nur einen davon haben; wie viele, worin zwei vorkommen; wie viele, worin sie alle drei beisammen bleiben?

1) Für die Anzahl der Combinationen, wo keiner der drei Buchstaben vorkommt: . . . . $3C0 . 7C4 = 1 \times 35 = 35$;
2) „ „ „ „ „ wo nur einer vorkommt: . $3C1 . 7C3 = 3 \times 35 = 105$;
3) „ „ „ „ „ wo zwei eintreten: . . . . $3C2 . 7C2 = 3 \times 21 = 63$;
4) „ „ „ „ „ wo alle drei erscheinen: . $3C3 . 7C1 = 1 \times 7 = 7$;

Gesammtzahl der Combinationen 210.

Was die Anzahl der Permutationen von m Buchstaben zu je p betrifft, welche p' Buchstaben, unter den m' gewählten genommen, enthalten; so ist die Anzahl derselben $Y = X \times 1.2.3 \ldots p$. Es reicht

in der That hin, jede der X Combinationen einzeln zu nehmen und die daselbst vorkommenden p Buchstaben zu permutiren.

§. 5. Um alle mögliche Permutationen zu je p der m Buchstaben a, b, c . . . v zu finden, verfahre man wie folgt: Man nehme eine Anzahl p—1 derselben, wie i, k, ... v davon weg, schreibe dann einen, wie i, neben jeden der m—p + 1 übrigen Buchstaben a, b, c . . . . h; woraus ia, ib, ic . . . . ih. Man ändere hierauf nach und nach i in a, b, c, . . . h um; dadurch kommen sämmtliche Versetzungen zu zweien von den m—p+2 Buchstaben i, a, b . . . h zum Vorschein. Man setze alsdann diesen Resultaten den zweitweggelassenen Buchstaben k vor, wodurch kia, kib, . . . kih. Aendert man jetzt successive k in i, a, b . . . . h um, so bekommt man alle Permutationen zu dreien der m—p+3 Buchstaben k, i, a, b . . . h; u. s. w. f. — Um z. B. die Permutationen zu dreien von den fünf Buchstaben a, b, c, d, e zu erhalten, nimmt man d und e weg und setzt d neben a, b, c, was uns da, db, dc gibt. Indem nun d mit a, b, c vertauscht wird, findet man sämmtliche Permutationen zu zweien der vier Buchstaben a, b, c, d, nämlich:

da, db, dc, ad, ab, ac, ba, bd, bc, ca, cb, cd.

Es erübrigt nur noch jedem dieser Glieder den Buchstaben e voranzusetzen, woraus eda, edb, edc . . . ., und endlich e mit a, b, c und d zu vertauschen, um die verlangten Versetzungen zu gewinnen, deren Anzahl sich auf 60 beläuft.

Anmerkung. Man kann das Vorhergehende zur Bildung von Anagrammen anwenden, d. h. der Versetzungen der Buchstaben eines Wortes, oder der Worte eines Satzes, so daß die Versetzung wieder einen Sinn gibt. Dergleichen mühsame Spielereien liefern zuweilen glückliche Resultate. In den Worten Frère Jacques Clément, dem Namen des Mörders Heinrichs des dritten, findet man Buchstaben für Buchstaben das Anagramm: C'est l'enfer qui m'a crée. — Jablonski bildete Anagramme mit den Buchstaben der Worte Domus Lescinia zu Ehren Stanislas, aus dem Hause der Leszinski abstammend; er fand dabei die Worte: Ades incolumis, omnis es lucida, mane sidus loci, sis columna Dei, J scande solium. Der letzte Ausspruch war insofern prophetisch, als Stanislas König von Polen wurde.

§. 6. **Um die Combinationen zu je p zu finden**, verfährt man auf folgende Weise: Man suche zuvörderst die Combinationen zu zweien; man nimmt deßhalb den Buchstaben a weg, um solchen jedem andern beizusetzen, was ab, ac, ad, ... gibt: es sind dies die Combinationen zu zweien, worin a vorkommt. Setzen wir ferner ebenso b neben c, d ..., dann c neben den Buchstaben d, e ..., welche ihm zur Rechten stehen; so erhalten wir sämmtliche Combinationen zu zweien. — Will man zu 3 und 3 combiniren, so nimmt man a weg und verbindet die übrigen Buchstaben b, c, d .... zu zweien, wie so eben angegeben worden; hierauf setzt man a neben jede Verbindung, b neben jede derselben, worin kein b vorhanden ist, c zu jeder, worin sich weder b noch c vorfindet, u. s. w.: auf solche Weise werden wir die Combinationen zu dreien erhalten. — Im Allgemeinen um unsere Buchstaben zu p und p zu combiniren, lasse man p—2 Buchstaben i, k, ... v weg, und combinire zu zweien die übrig bleibenden a, b, c ... h; hierauf setze man neben jedes Resultat einen von den weggelassenen Buchstaben i; dann a neben die Verbindungen in welchen kein a vorkommt, b neben diejenigen, welche weder a noch b enthalten, u. s. w.: auf diese Art gelangt man zu den Combinationen zu dreien der Buchstaben a, b, c ... h, i. Man bringe nun von neuem k neben jede Verbindung, a neben diejenigen, in denen kein a sich befindet, u. s. f.; es entstehen hieraus die verschiedenen Combinationen zu vieren der Buchstaben a, b ... i, k. Man setze dieses Verfahren so weiter fort, bis die sämmtlichen (p—2) weggelassenen Buchstaben eingeführt sind. —

Bildung der Potenzen eines Polynoms.

§. 7. Nimmt man $a = b = c \ldots$, so verwandelt sich das Produkt der m Binomialfactoren $(x+a)(x+b)(x+c) \ldots$ in $(x+a)^m$: die Bildung der m^{ten} Potenz eines Binoms läuft also dahin aus, jenes Produkt zu entwickeln, und hierauf die zweiten Theile a, b, c ... der Binomialfactoren einander gleich zu setzen. Durch ein solches Verfahren sind wir im Stand, das Gesetz, welches die verschiedenen Glieder eines solchen Resultats befolgen, zu erkennen, ehe in ihnen eine Reduction stattgefunden hat. Aus §. 6 der niedern Algebra wissen wir, daß dieses Produkt von der Form ist:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Nx^{m-n} \ldots + abcd \ldots,$$

wo A die Summe $a + b + c \ldots$ der zweiten Glieder der Binomialfactoren, B die Summe $ab+ac+bc \ldots$ der Produkte dieser Glieder zu zweien, C die Summe $abc+abd \ldots$ der Produkte derselben zu dreien bedeutet u. s. f. Macht man jetzt $a=b=c \ldots$, so verwandeln sich alle Glieder von A in a, die von B in a^2, die von C in a^3, die von N in a^n, u. s. w.

Aus A wird dann a, solches m mal genommen, oder ma.

Aus B entsteht a^2, so vielmal wiederholt, als es verschiedene Produkte zu zweien gibt, oder $B=a^2\,[mC2] = \frac{1}{2}\,m\,(m-1)\,a^2$.

C gibt a^3, so vielmal genommen, als sich m Buchstaben zu dreien combiniren lassen, oder $C = \frac{1}{6}\,m\,(m-1)\,(m-2)\,a^3$; u. s. f.

Für das Glied Nx^{m-n} in einer beliebigen Stelle n hat man $N=[mCn]\,a^n$. Das letzte Glied endlich ist a^m. Hieraus ergibt sich folgende, von Newton entdeckte Formel:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}$$

$$+ m\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} \ldots + a^m \ (6).$$

Das allgemeine Glied ist

$$T = [mCn].\ a^nx^{m-n} \ldots (7).$$

Dasselbe hat n Glieder vor sich und erzeugt, wenn darin nach einander $n=1, 2, 3 \ldots$ gesetzt wird, alle Glieder der Entwicklung von $(x+a).^m$ —

Um $(x-a)^m$ zu entwickeln, hat man nur nöthig, hier $-a$ für a zu substituiren, d. h. die Glieder, in denen a einen ungeraden Exponenten hat, mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen.

§. 8. Die Formel (6) besteht aus (m+1) Gliedern, deren Coefficienten sämmtlich ganze Zahlen sind; es sind dieselben bis zur 20sten Potenz im §. 3 aufgeführt worden. Die Exponenten von a nehmen von Glied zu Glied um eine Einheit zu, und die von x um eben so viel ab, so daß die Summe der beiden Exponenten von a und x für jedes Glied m beträgt. Hieraus entsteht folgende Regel: um aus einem Gliede das nächst folgende zu erhalten, multiplicire man das erstere mit $\frac{a}{x}$ und dem daselbst vorkommenden Exponenten von x, dividire darauf das Resultat durch die Zahl, welche die Stelle dieses Gliedes in der Reihe angibt. Diese Regel auf $(x+a)^9$ angewendet, liefert:

$$(x+a)^9 = x^9 + 9ax^8 + 36a^2x^7 + 84a^3x^6 + 126a^4x^5 + 126a^5x^4 + \ldots$$

Um $(2b^3—5c^3)^9$ zu entwickeln, braucht man nur in der vorstehenden Gleichung $x=2b^3$ und $a=—5c^3$ zu setzen; man wird alsdann erhalten:

$$(2b^3—5c^3)^9 = 512b^{27} — 45.256c^3b^{24} + 36\ 25.128c^6b^{21} — 84.125.64c^9b^{18} \ldots$$

Die Formel (6) liefert überdieß folgende Resultate:

I. Nach dem mittlern Gliede kommen die Coefficienten in umgekehrter Ordnung wieder vor. Die vom ersten und letzten gleich weit abstehende Glieder haben einerlei Coefficienten. Es wachsen diese Coefficienten bis zur Mitte der Formel, wo der entsprechende Werth in §. 3 aufgefunden wurde.

II. Jeder Coefficient der m^{ten} Potenz zu dem nächst folgenden addirt, liefert den Coefficienten der $(m+1)^{ten}$ Potenz, welcher die nämliche Stelle hier, als jener zweite dort einnimmt (§. 3).

III. Die Summe aller Coefficienten der m^{ten} Potenz ist $= 2^m =$ der Summe der geradstelligen oder ungeradstelligen Coefficienten der $(m+1)^{ten}$ Potenz, was mit dem früher Gesagten übereinstimmt. Denn setzt man in unserer Formel $x=a=1$, so findet man $2^m =$ der Summe aller Coefficienten.

IV. Für $x=1$ und $a=z$ verwandelt sich die Formel (6) in

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m—1)}{1.2} z^2 + \ldots . (8).$$

Da dieser Ausdruck viel einfacher ist, so sucht man die Entwicklung jeder vorgelegten Potenz darauf zurückzuführen. Für $(A+B)^m$ dividirt man das Binom durch A, um das erste Glied auf 1 zu reduciren, und multiplicirt hierauf mit A^m, um unserer Größe ihren primitiven Werth $= A^m\left(1+\frac{B}{A}\right)^m$ wiederzuverschaffen. Indem man den Bruch $\frac{B}{A}=z$ setzt, findet man die Formel (8) wieder. Man erhält also, wenn die successiven Produkte der Factoren m, $\frac{1}{2}(m—1)$, $\frac{1}{3}(m—2)$, $\frac{1}{4}(m—3) \ldots$, nach dem im §. 3 angegebenen Verfahren gebildet werden, die Coefficienten unserer Entwicklung, welche Coefficienten man hierauf mit den steigenden Potenzen von z multipliciren muß. Für $(2a+3b)^8$ z. B. schreibe man $(2a)^8\left(1+\frac{3b}{2a}\right)^8$ und mache $z=\frac{3b}{2a}$. Dann setze man die Brüche $\frac{8}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{4}$ an, aus denen durch

successive Multiplicationen die Coefficienten 8, 28, 56, 70 hergeleitet werden; geht man über dies mittlere Glied hinaus, so sind die folgenden 56, 28, 8. Bringt man die steigenden Potenzen z, z^2, z^3, . . . an die geeigneten Stellen, multiplicirt dann das Ganze mit $256a^8$ und substituirt endlich für z den dadurch ausgedrückten Bruch; so wird man haben:

$$(2a+3b)^8 = 256a^8 + 3072a^7b + 16128a^6b^2 + 48384a^5b^3 + 90720a^4b^4 + 108864a^3b^5 + \ldots$$

§. 9. Man führt die Entwicklung der Potenz eines Polynoms, wie $(a+b+c+\ldots i)^m$, auf die Bildung der Potenz eines Binoms zurück, indem man $b+c+\ldots i = z$ setzt;
das allgemeine Glied von $(a+z)^m$ ist . . . . $[mC\alpha]a^\alpha z^p$,
wo α und p beliebige Werthe haben, jedoch so, daß . $\alpha + p = m$.
Setzt man nun $c + d + \ldots + i = y$, so hat man $z = b + y$ und das allgemeine Glied von z^p ist . . . . $[pC\beta]b^\beta y^q$,
mit der Bedingung, daß $\beta + q = p$, nämlich $\alpha + \beta + q = m$.
Setzt man ebenso $d + e + \ldots i = x$, so hat man $y = c + x$, und das allgemeine Glied von y^q ist . . . . $[qC\gamma]c^\gamma x^r$,
wobei $\gamma + r = q$, oder . . . . $\alpha+\beta+\gamma+r=m$.

Durch stufenweise vorgenommene Substitution dieser Werthe findet man für das allgemeine Glied der gesuchten Entwicklung

$$N = [mC\alpha].[pC\beta].[qC\gamma]\ldots a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots i^u,$$

wobei $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+u = m$ sein muß.

Uebrigens bezeichnen α, β, γ . . . beliebige ganze Zahlen, welche die Stellen eines jeden unserer allgemeinen Glieder in ihren betreffenden Reihen angeben. Der Nenner des Coefficienten von N ist $1.2.3\ldots\alpha \times 1.2.3\ldots\beta \times \ldots$, indem man eben so viele Factorenreihen nimmt, als es Exponenten gibt, mit Ausnahme des letztern. Der Analogie halber führen wir das Produkt $1.2.3\ldots u$ im Nenner und Zähler ein, wodurch der letztere die Form erhält:
$m(m-1)\ldots(m-\alpha+1) \times p(p-1)\ldots(p-\beta+1)q\ldots(q-\gamma+1)\ldots u(u-1)\ldots 2.1$.
Nun ist $p = m - \alpha$; die Factoren p, $p-1$, . . . setzen mithin die Reihe $m(m-1)\ldots$ bis $(p-\beta+1)$ fort, die ihrerseits durch $q = p - \beta$ fortgesetzt wird u. s. w., bis $u(u-1)\ldots 2.1$. Der Zähler bildet daher die fallende Factorenreihe $m(m-1)\ldots$ bis 2.1, die man auch folgendermaßen: $1.2.3\ldots(m-1)m$ schreiben kann. Das gesuchte allgemeine Glied ist also

$$N = \frac{1.2.3\ldots m \times a^{\alpha}\, b^{\beta} c^{\gamma} \ldots i^{u}}{1.2.3\ldots\alpha \times 1.2.3\ldots\beta \times 1.2.3\ldots\gamma \ldots \times 1.2\ldots u} \ldots (9).$$

Die Exponenten α, β, $\gamma\ldots$ sind stufenweise alle ganzen und positiven Zahlen von o bis m, jedoch so, daß ihre Summe $= m$ bleibt. Es gibt hiernach so viele Glieder von dieser Form, als man verschiedene Werthe nehmen kann, welche derselben in allen möglichen Verbindungen Genüge leisten. Für $(a+b+c)^{10}$ z. B. ist eins der Glieder

$$\frac{1.2.3\ldots 10 . a^5 b^3 c^2}{1.2.3.4.5 \times 1.2.3 \times 1.2} = 2520\, a^5 b^3 c^2;$$

mit dem nämlichen Coefficienten sind die Glieder $a^3 b^2 c^5$, $a^2 b^3 c^5\ldots$ behaftet.

Anmerkungen. I. Nimmt man an, daß das Polynom $(a+b+c+..)$ sich auf das Binom $(x+a)$ reducire, so wird das allgemeine Glied N im letztern Falle $= \frac{1.2.3\ldots m\, x^{\alpha} a^{\beta}}{1.2\ldots\alpha \times 1\, 2\ldots\beta}$ sein, wobei α und β veränderlich, aber an die Gleichung $\alpha+\beta=m$ gebunden sind. Dieß allgemeine Glied kann daher, wenn man n für β setzt, auch wie folgt geschrieben werden:

$$N = \frac{m\,(m-1)\ldots 3.2\,1}{1.2.3\ldots n \times 1.2\ldots(m-n)} . x^{m-n}\, a^n =$$

$$\frac{m\;(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} a^n x^{m-n},$$

was mit der Formel (7) übereinstimmt. —

II. Bezeichnet p die Anzahl der Glieder des Polynoms und drückt m eine ganze positive Zahl aus, so ist die Summe aller Zahlencoefficienten der Glieder der Entwicklung von $(a+b+c+..)^m$ gleich p^m, zu welchem Resultate man sofort dadurch gelangt, daß man $a=b=c\ldots=1$ macht.

§. 10. Das Vorhergehende setzt durchaus voraus, daß der Exponent m eine ganze und positive Zahl ist. Hat dies nicht statt, so weiß man nicht, welches die Entwicklung von $(1+z)^m$ ist; es handelt sich darum zu zeigen, daß dieselbe in allen Fällen die nämliche Form (8) beibehält. Hierauf reducirt sich in der That der Satz für die Bildung einer jeden Potenz eines Polynoms; denn indem man die Gleichung (8) mit x^m multiplicirt, erhält man die Entwicklung von

$(x+xz)^m$ oder $(x+a)^m$, wenn $xz=a$ gesetzt wird. Durch diesen Calcul ergibt sich dann die Gleichung (6), welche demnach für jeden beliebigen Exponenten m als erwiesen betrachtet werden kann; das im vorhergehenden Paragraphen Gesagte findet hierauf ohne weiteres seine Anwendung.

Wir nehmen also an, daß m und n beliebige Größen darstellen und setzen $x = 1 + mz + \frac{1}{2} m (m-1) z^2 + \text{ꝛc.}$,

$y = 1 + nz + \frac{1}{2} n (n-1) z^2 + \text{ꝛc.}$

Hieraus folgt $xy = 1 + pz + \frac{1}{2} p (p-1) y^2 + \text{ꝛc.}$,

wobei $p = m + n$ ist.

In der That, ohne uns dabei aufzuhalten, die Multiplication der Polynome x und y zu verrichten, was uns die ersten Glieder einer unbestimmten Reihe liefern würde, aber nicht das darin herrschende Gesetz erkennen ließe, bemerken wir, daß, im Falle m und n ganze und positive Zahlen sind, die Gültigkeit der Gleichungen $x=(1+z)^m$, $y=(1+z)^n$ nachgewiesen wurde. Hieraus entsteht $xy=(1+z)^{m+n}$ $=(1+z)^p$, wo in diesem Falle das Produkt xy gerade eine solche Gestalt, wie oben vorausgesetzt worden, bekommt. Da nun das Produkt xy in allen Fällen einerlei Form behalten muß, so wird es, wenn m oder n nicht ganzzahlig und positiv wäre, nothwendigerweise mit der obigen Form übereinstimmen, weil die Regeln der Multiplication der beiden Polynome keineswegs von den Größen abhängig sind, welche man den Buchstaben der Factoren beilegen kann. Das Glied in z^2 z. B. unsers Produktes wird aus gewissen Gliedern von x und y zusammengesetzt sein, welche offenbar ungeändert bleiben, was auch die besondern Werthe von m und n sein mögen; nun ist dies Produkt für einen Fall $\frac{1}{2} p (p-1) z^2$, es wird mithin auch für alle übrige dasselbe sein. Wir betrachten jetzt nach einander folgende Fälle:

I. m sei eine ganze negative Zahl. Da n willkührlich ist, so setzen wir $n=-m$, mithin bedeutet n eine positive, ganze Zahl. Nun wissen wir, daß alsdann $y=(1+z)^n$. Die dritte der obigen Gleichungen geht für $p=0$ in $xy=1$ über, woraus $x=y^{-1}=(1+z)^{-n}=(1+z)^m$. Also

$$(1\mp z)^{-m} = 1 \pm mz + m\frac{(m+1)}{2}z^2 \pm m\frac{(m+1)}{2}\frac{(m+2)}{3}z^3 \ldots$$

$$T = \pm m \frac{(m+1)}{2}\frac{(m+2)}{3} \ldots \frac{(m+n-1)}{n} z^n = z^n \; [(m+n-1)\,Cn]$$

$$= \pm \frac{(n+1)}{1}\frac{(n+2)}{2} \ldots \frac{(n+m-1)}{m-1} z^n = z^n \; [(n+m-1)\,C\,(m-1)]$$

$(x \pm a)^{-1}$ hat zu Coefficienten	1	∓ 1	$+1$	∓ 1	$+1 \ldots\ldots$
$(x \pm a)^{-2}$	1	∓ 2	$+3$	∓ 4	$+5 \ldots\ldots$
$(x \pm a)^{-3}$	1	∓ 3	$+6$	∓ 10	$+15 \ldots\ldots$
$(x \pm a)^{-4}$	1	∓ 4	$+10$	∓ 20	$+35 \ldots\ldots$

Man sehe die in §. 3 aufgestellte Tabelle nach, in welcher man das Gesetz dieser Coefficienten findet.

II. m sei eine gebrochene, positive oder negative Zahl. Wir machen $n=m$, woraus $p=2m$, $xy=x^2$;

also $$x^2 = 1 + 2mz + 2m\frac{(2m-1)}{2}z^2 + \text{ꝛc.}$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $x = 1 + mz +$

so kommt $$x^3 = 1 + 3mz + 3m\frac{(3m-1)}{2}z^2 + \text{ꝛc.}$$

Ebenso $$x^4 = 1 + 4mz + 4m\frac{(4m-1)}{2}z^2 + \text{ꝛc.}$$

Endlich $$x^k = 1 + kmz + km\frac{(km-1)}{2}z^2 + \text{ꝛc.},$$

welche ganze Zahl auch k sein mag.

Ist nun k der Nenner des Bruches $m = \frac{l}{k}$, mithin $km = l$; so hat man

$$x^k = 1 + lz + l\frac{(l-1)}{2}z^2 + \text{ꝛc.} = (1+z)^l,$$

weil l eine ganze, positive oder negative Zahl darstellt. Folglich $x^k = (1+z)^{km}$ und $x = (1+z)^m$.

III. m sei irrational oder transcendent. n und h mögen zwei Zahlen darstellen, zwischen denen m enthalten ist. Da jedes Glied von $x = 1 + mz + \ldots$ sich zwischen seinen correspondirenden in den Reihen $(1+z)^n$ und $(1+z)^h$ befindet, so ist klar, daß x zwischen diesen beiden Ausdrücken, deren Unterschied auf jeden beliebigen Grad von Kleinheit gebracht werden kann, liegt. Die Größe $(1+z)^n$ ist folglich von x um desto weniger verschieden, je mehr sich n dem m nähert. Es sei α der Unterschied, oder $(1+z)^n = x + \alpha$. Ebenso sei der Unterschied zwischen $(1+z)^n$ und $(1+z)^m$, oder $(1+z)^n = (1+z)^m + \beta$;

hieraus $x+\alpha=(1+z)^m+\beta$. Die Größen α und β können kleiner als jede gegebene Größe werden, man hat daher $x=(1+z)^m$.

IV. Der Exponent m sei imaginär. Nach Uebereinkunft werden dergleichen Ausdrücke nach den für die reellen Größen geltenden Regeln des Calculs behandelt. Man kann sich in der That unmöglich einen klaren Begriff von einer Rechnung machen, deren Elemente nur Symbole sein würden, die gar keine Spur von einer Größe an sich tragen: es ist also hier nichts zu beweisen.

§. 11. Wir wollen die Formel (6) auf einige Beispiele anwenden.

I. Um $\frac{a}{\alpha+\beta x} = \frac{a}{\alpha} \times \frac{1}{1+kx}$, wobei $k=\frac{\beta}{\alpha}$ ist, zu entwickeln, bilden wir die Reihe von $(1+kx)^{-1}$. Die Coefficienten haben bezüglich zu Factoren -1, $\frac{1}{2}(-1-1)$, $\frac{1}{3}(-1-2)\ldots\ldots$, welche sich sämmtlich auf -1 reduciren. Die Glieder sind wechselseitig positiv oder negativ, wonach die geometrische Progression $1-kx+k^2x^2-k^3x^3\ldots\ldots$ entsteht, deren Verhältniß $-kx$ ist. Folglich

$$\frac{a}{\alpha+\beta x}=\frac{a}{\alpha}\left(1-\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^3x^3}{\alpha^3}+\ldots\mp\frac{\beta^n x^n}{\alpha^n}\ldots\right)$$

II. Für $\sqrt{(a^2\pm x^2)}$ schreiben wir $a\sqrt{\left(1\pm\frac{x^2}{a^2}\right)}=a\sqrt{(1\pm y^2)}$, indem $x=ay$ gesetzt wird. Um den Ausdruck $\frac{1}{2}(1\pm y^2)$ zu entwickeln, bilden wir die Factoren der Coefficienten, nämlich: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)$, $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-2)$, ... oder $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\ldots\ldots$ Die Coefficienten sind Brüche, deren Zähler die ungeraden Factoren 1, 3, 5, 7.... und deren Nenner die geraden Factoren 2, 4, 7, 8, ... ausmachen. Folglich

$$\sqrt{(1\pm y^2)}=1\pm\frac{y^2}{2}-\frac{1.y^4}{2.4}\pm\frac{1.3.y^6}{2.4.6}-\frac{2.3.5y^8}{2.4.6.8}\pm\ldots\ldots$$

$$\sqrt{(a^2\pm x^2)}=a\left(1\pm\frac{x^2}{2a^2}-\frac{1.x.^4}{2.4a^4}\pm\frac{1.3x^6}{2.4.6a^6}-\frac{1.3.5.x^8}{2.4.6.8a^8}\pm\ldots\right)$$

Auf dieselbe Art findet man:

$$(1\pm y^2)^{-\frac{1}{2}}=1\mp\frac{1.y^2}{2}+\frac{1.3.y^4}{2.4}\mp\frac{1.3.5y^6}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7y^8}{2.4.6.8}\pm\ldots\ldots$$

$$(a^2\mp x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}\left(1\mp\frac{x^2}{2a^2}+\frac{1.3x^4}{2.4a^4}\mp\frac{1.3.5x^6}{2.4.6a^6}+\frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8a^8}\mp\ldots\right)$$

$$(1\pm x)^{-\frac{3}{2}}=1\pm\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2\mp\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{128}x^4\ldots$$

$$(1\pm x)^{-\frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3.5}{2.4}x^2 \mp \frac{3.5.7}{2.4.6}x^3 + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}x^4 \ldots$$

$$\sqrt[3]{(a+x)} = \sqrt[3]{a}\left(1 + \frac{x}{3a} - \frac{x^2}{9a^2} + \frac{5x^3}{81a^3} - \frac{10x^4}{243a^4} - \frac{22x^5}{729a^5} \ldots\right)$$

$$\sqrt[3]{(1-y^3)} = 1 - \frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{9} - \frac{5y^9}{81} - \frac{10y^{12}}{243} - \frac{22y^{15}}{729} \ldots\ldots$$

$$(1-a)^{-2} = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 \ldots + (n+1)a^n \ldots$$

§. 12. Sämmtliche Coefficienten von $(x+a)^m$ sind, mit Ausnahme von x^m und a^m, Vielfache von m, wenn m eine Primzahl ist. Die Gleichung (3) gibt in der That,

$$1.2.3. \ldots p \times [mCp] = m(m-1)(m-2) \ldots (m-p+1).$$

Da nun das zweite Glied ein Vielfaches von m ist, so muß es auch das erste sein, mithin ist [mCp] nothwendigerweise durch m theilbar, weil m eine Primzahl und $> p$ ist. Man beweist auf dieselbe Art, daß alle Glieder von $(a+b+c\ldots)^m$, mit Ausnahme der von $a^m, b^m, c^m, \ldots$ Vielfache von m sind. Man hat folglich

$$(a+b+c\ldots)^m = a^m + b^m + c^m \ldots + mK,$$

wobei K ein Ganzes darstellt. Wird $a=b=c=\ldots=1$ gesetzt, und die Zahl der Glieder des Polynoms durch h ausgedrückt, so finden wir $h^m = h + mK$. Hieraus $h^m - h =$ einem Vielfachen von m, oder $h\frac{(h^{m-1}-1)}{m} =$ einer ganzen Zahl. Dividirt daher die Primzahl m nicht h ohne Rest, so muß sie $h^{m-1}-1$ genau theilen. Dieser von Fermat herrührende Lehrsatz läßt sich auch folgendermaßen ausdrücken: Ist m eine Primzahl und h eine beliebige, aber durch m nicht theilbare Zahl, so ist der Rest der Division von h^{m-1} durch m der Einheit gleich.

Man kann diesen Lehrsatz auch auf folgende Art geben: Da $m-1$ eine gerade Zahl 2q darstellt, und $h^{m-1}-1 = (h^q-1)(h^q+1)$ ist; so muß m einen der beiden letztern Faktoren theilen, d. h. der Rest der Division von h^q durch m ist ± 1, wenn m eine Primzahl > 2 und $q = \frac{1}{2}(m-1)$ ist.

Von der Wurzelausziehung des vierten, fünften.... Grades.

§. 13. Die in der Arithmetik gegebene Verfahrungsart, um die Quadrat- und Cubikwurzeln aus Zahlen zu finden, kann jetzt auf die Wurzel irgend eines Grades angewendet werden. Um z. B. die vierte Wurzel aus 548464 zu ziehen, stellen wir die größte, in der vorgelegten Zahl enthaltene 4te Potenz durch A, dagegen durch a die Zehner und durch b die Einer der gesuchten Wurzel dar. Da $A = (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + \ldots$ so sieht man bald ein, daß die 4te Potenz der Zehner dieser Wurzel keinen Theil der vier ersten Ziffern zur Rechten ausmacht. Werden daher die vier Ziffern 8464 abgesondert, so ist einleuchtend, daß man in 54 diese 4te Potenz der Ziffer der Zehner, solche als einfache Einheiten betrachtet, zu suchen hat. Nun ist die größte, in 54 enthaltene 4te Potenz die Zahl 16, deren 4te Wurzel 2 beträgt, welche man sofort für die Ziffer der Zehner nimmt. Man ziehe jetzt 16 von 54 ab, und setze neben den Rest 38 die abgesonderten Ziffern herunter. Die hieraus entspringende Zahl 388464 wird die vier andern Theile von $(a+b)^4$ oder $4a^3b + 6a^2b^2 \ldots$ enthalten. Das höchste dieser Glieder ist $4a^3b$ und endigt sich mit 3 Nullen, die von a^3 herkommen. Um dieses besonders zu betrachten, schneide man die drei Ziffern 464 zur rechten Seite ab; die zur linken übrigbleibende Zahl 388 wird das fragliche Glied, d. i. das vierfache Produkt aus den Einern b in den Cubus der Ziffer 2 der Zehner solche abermals als einfache Einheiten angesehen, oder $4 \times 8b = 32b$, und überdieß die aus den folgenden Gliedern entspringenden Tausende enthalten. Der Quotient 10, welcher sich bei der Division von 388 durch 32 herausstellt, wird daher b oder $>b$ sein; man muß aber b auf 7, oder die Wurzel auf 27 reduciren, wie sich aus einer ähnlichen Untersuchung wie bei der Cubikwurzel ergibt, indem man das Produkt $b(4a^3 + 6a^2b + 4ab^2 + b^3)$, wie hier unten geschehen, bildet. Man findet auf diese Art den Rest 17023. Um die Annäherung weiter zu treiben, ist es erforderlich, noch vier Nullen anzuhängen, von denen man vorerst drei absondert, und 170230 durch $4a'^3$ dividirt, wobei' $= 27$. Da $4a'^3 = 4a^3 + 12a^2b + 12ab^2 + 4b^3$, so sieht man, daß, um diesen Divisor a'^3 zu bekommen, $6a^2b + 8ab^2 + 3b^3$ dem obigen, zwischen den Parenthesen stehenden

Theile hinzugefügt werden müsse, und sofort. Hiernach läßt sich die Operation folgendermaßen anordnen:

54.8464	27,2		
16	32 erster Divisor . .	$4a^3$	53063
388.464	168	$6a^2b$	168
371 441	392	$4ab^2$ . . 2mal . .	784
17 0230	343	b^3 . . 3mal . .	1029
	$53063 \times 7 = 371441$	zweiter Divisor	$78732 = 4.27^3$.

Es ist leicht einzusehen, daß dieser für das Aufsuchen jedes partiellen Divisors bequeme Gang der Rechnung ganz allgemein ist, welches der Wurzelgrad auch sein mag.

§. 14. Das Geschäft des Wurzelausziehens wird durch die Logarithmentafeln bedeutend erleichtert; sie reichen jedoch nicht aus, sobald man die Wurzel genauer, als es die Grenzen dergleichen Tafeln gestatten, haben will. Man nimmt alsdann zu folgenden Näherungsmethoden seine Zuflucht.

I. Mit Hilfe der in §. 11 entwickelten Reihen läßt sich die Quadratwurzel mit einer großen Genauigkeit finden. Um $\sqrt{N}$ zu erhalten, wird man N in zwei Theile a^2 und $\pm x^2$ dergestalt zerlegen, daß der erste ein vollkommenes Quadrat und eine weit größere Zahl als der zweite ist. $\sqrt{N} = \sqrt{(a^2 \pm x^2)}$ wird alsdann durch eine schnell convergirende Reihe ausgedrückt sein. Es werde z. B. $\sqrt{2}$ verlangt. Ich suche $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Wegen $8 = 9 - 1$ setzte ich $a = 3$, $x^2 = 1$ hieraus $\sqrt{8} = 3\,(1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{648} \ldots)$. Um die Reihe noch stärker convergirend zu machen, nehmen wir die drei ersten Glieder, welche 2,829 betragen, und vergleichen das Quadrat dieses Bruches mit 8. Wir werden so finden $8 = 2{,}829^2 - 0{,}003241$, woraus

$$\sqrt{8} = 2{,}809 \sqrt{\left(1 - \frac{3241}{8003241}\right)} = 2{,}82842\ 71247\ 462.$$

Nehmen wir die Hälfte, so haben wir endlich

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ 35623\ 732.$$

Die Logarithmentafeln liefern die erste Annäherung, welche hierauf mittelst des eben gezeigten Verfahrens weiter fortgesetzt wird. Man trägt dabei Sorge alle diejenigen Glieder der Reihe beizubehalten, welche, in Decimalbrüche verwandelt, Werth habende Ziffern in den Decimalstellen, welche für die Wurzel gesucht werden sollten, besitzen. Das erste vernachlässigte Glied muß demnach mit 0,000...

anfangen, solche bis zu einer weitern Stelle fortgerückt, als der Grad der Annäherung erfordert.

II. Es werde vorausgesetzt, daß a der genäherte Werth der mten Wurzel von N, und b der Unterschied zwischen N und a^m sei; der noch fehlende Theil der Wurzel, der z heißen mag, soll ferner schon ein kleiner Bruch sein. Demzufolge ist $a^m \pm b = (a \pm z)^m$. Hieraus entsteht, wenn man entwickelt und die Coefficienten der Gleichung durch m, A′, A″.... darstellt:

$$b = z(m a^{m-1} \pm A' z a^{m-2} + A'' z^2 a^{m-3} \pm \ldots).$$

Für eine erste Annäherung, wo nur das erste Glied dieser Reihe beibehalten wird, hat man $b = mza^{m-1}$. Zieht man hieraus den Werth von z, substituirt solchen dann in das zweite Glied $\pm A' z a^{m-2}$ und vernachläßigt die übrigen; so findet man

$$z = \frac{2ab}{2ma^m \pm (m-1)b} = \pm 2a \times \frac{N - a^m}{(m+1)a^m + (m-1)N},$$

indem $b = \pm(N - a^m)$ eliminirt wird.

Man hat folglich $\sqrt[m]{N} = a \times \frac{(m+1)N + (m-1)a^m}{(m-1)N + (m+1)a^m}$; woraus

$$\sqrt{N} = a \times \frac{3N + a^2}{N + 3a^2}, \quad \sqrt[3]{N} = a \times \frac{2N + a^3}{N + 2a^3},$$

$$\sqrt[4]{N} = a \times \frac{5N + 3a^4}{3N + 5a^4}, \quad \sqrt[5]{N} = a \times \frac{3N + 2a^5}{2N + 3a^5}; \text{ u. s. f.}$$

Es diene als Beispiel $\sqrt{65}$. Man nimmt $a = 8$; hieraus $\sqrt{65} = 8 \times \frac{195 + 64}{65 + 192} = \frac{2072}{257} = 8{,}062257$, ein bis auf die 5te Decimalstelle genaues Resultat. Man gelangt schnell zu genaueren Näherungswerthen, wenn man mehreremal hintereinander die Formel in Anwendung bringt. So z. B. für $\sqrt{8}$ setzt man zuvörderst $a = 2{,}8$, und findet 2,82842. Hierauf macht man $a = 2{,}82842$, woraus sich a^2 und b ergibt. Man erhält endlich denselben Werth von $\sqrt{8}$, den wir oben gefunden haben.

Von den figurirten Zahlen.

§. 15. Man gibt diesen Namen nachstehenden Zahlen:

1te Ordnung	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1....
2te	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10....
3te	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55....
4te	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	165.	220....

5te Ordnung	1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330.	495.	715....
6te	1.	6.	21.	56.	126.	252.	462.	792	1287.	2002....
7te	1.	7.	28.	84.	210.	462.	924.	1716	3003.	5005. 2c.

Das Gesetz, nach welchem dergleichen Zahlen gebildet werden, lautet folgendermaßen: Jedes Glied entsteht aus der Summirung des zu seiner Linken zunächst vorhergehenden und des über dem erstern unmittelbar darüber befindlichen Gliedes. So z. B. $2002 = 1287 + 715$. Aus der Vergleichung dieser Entstehungsart mit der im §. 3 aufgeführten Tabelle ergibt sich, daß die Zahlen in beiden Fällen die nämlichen sind, mit dem Unterschiede, daß sie nur in einer andern Ordnung vorkommen. Eine Zahlenreihe jener frühern Tabelle, wie z. B. 1. 7. 21. 35....., bildet hier sozusagen eine Hypothenuse. Man hat daher für den Werth irgend eines Gliedes von der $p$ten Ordnung, oder des in der $p$ten Linie auf der $m$ten Hypothenuse stehenden Gliedes den Ausdruck $T = [mC(p-1)]$. Nehmen wir zwei aufeinanderfolgende Reihen, nämlich von der

$(p-1)$ten Ordnung. $1. a .... q. r. s. t\ v ....$,

$p$ten Ordnung..... $1. A ... Q. R. S\ T .....$;

so haben wir der Definition zufolge:

$$A = 1 + a, ... R = Q + r, S = R + s, T = S + t ....$$

1. Auf einer Hypothenuse stehen in den consecutiven Reihen die Glieder um eine Stelle von einander ab, wie z. B. T und v. Wenn nun T das $n$te Glied von der $p$ten Ordnung ist, oder sich in der $n$ten Columne und der $p$ten Reihe befindet; so ist v das $(n+1)$te Glied von der $p-1$ten Ordnung: ebenso ist das Glied der vorhergehenden Reihe das $(n+2)$te von der $(p-2)$ten Ordnung. Um auf solche Weise bis zur zweiten Ordnung $1, 2, 3 ... m$ aufzusteigen, muß man demnach zu der Stellenzahl n die Zahl $p-2$, den Unterschied der beiden Ordnungen addiren, oder mit andern Worten, das Glied m, d. i. die Nummer der Hypothenuse nimmt daselbst die $(n+p-2)$te Stelle ein. Man hat folglich $m = n + p - 2$, wonach die Gleichung

$$T = [mC(p-1)] \text{ in}$$

$$T = [(n+p-2)C(p-1), \text{ oder } (n-1)] \qquad (10), \text{ oder}$$

$$T = \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdots \frac{n+p-2}{p-1}$$

$$T = \frac{p}{1} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot \frac{p+2}{3} \cdots \frac{n+p-2}{n-1}$$ übergeht, wenn man der

Gleichung (3) im §. 2 gemäß entwickelt und die Faktoren des Zählers in umgekehrter Ordnung schreibt. Man wählt vorzugsweise den ersten oder zweiten dieser Ausdrücke des allgemeinen Gliedes T, je nachdem $p <$ oder $> n$ ist. Es stellt sich hier zugleich heraus, daß das nte Glied von der pten Ordnung mit dem pten Gliede von der nten Ordnung einerlei ist.

Setzt man $p=3, 4, 5, \ldots$ so hat man

3te Ordnung 1. 3. 6. 10... $T=\frac{1}{2}n(n+1)=[(n+1)C2]$;
4te ...... 1. 4. 10. 20... $T=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=[(n+2)C3]$;
5te ...... 1. 5. 15. 35... $T=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

2. Vergleicht man die Glieder T, t und S, so hat man
$T=[mC(p-1)]$, $t=[(m-1)C(p-2)]$, $S=[(m-1)C(p-1)]$.

Indem wir nach Gl. (3) im §. 2 entwickeln und reduciren, finden wir

$$T=\frac{n+p-2}{n-1}\times S=\frac{n+p-2}{p-1}\times t \ldots (11).$$

Es dienen diese Formeln dazu, die einzelnen Glieder, entweder die der pten Linie oder die der nten Columne nach und nach von einander abzuleiten. $p=6$ z. B. gibt $T=\frac{n+4}{n-1}S$. Macht man $n=2, 3, 4\ldots$, so findet man $\frac{6}{1}, \frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{4}\ldots$ für die successiven Multiplicatoren jedes Gliedes von der 6ten Ordnung, um daraus zu dem unmittelbar kommenden Gliede T zu gelangen. Für $n=7$ kommt $T=\frac{p+5}{p-1}t$, woraus die Factoren $\frac{7}{1}, \frac{8}{2}, \frac{9}{3}\ldots$ entspringen, mit Hülfe deren man aus einem Gliede t der 7ten Columne das nächstfolgende T erhält.

3. Addirt man die beiden Glieder in der $(n-1)$ten und nten Stelle von der 3ten Ordnung, so findet man, daß ihre Summe n^2 beträgt. Die Summe zweier successiven Zahlen von der dritten Ordnung macht also ein vollständiges Quadrat, und ein jedes Quadrat ist in zwei Zahlen von der dritten Ordnung zerlegbar. So z. B. ist 121, das Quadrat von 11 die Summe von 55 und 66, welche Zahlen die 10te und 11te Stelle in der dritten Ordnung einnehmen.

4. Addirt man die Werthe von $A \ldots R, S, T$, so kommt $T=1+a\ldots+r+s+t$. Ein beliebiges Glied T ist also gleich der Summe aller Glieder der zunächst vorhergehenden Zahlenreihe bis zu dem Gliede t, welches in derselben die ebensovielte Stelle einnimmt als

T in seiner Ordnung; oder mit andern Worten, das allgemeine Glied von der pten Ordnung ist gleich dem summatorischen Gliede von der (p—1)ten Ordnung. Um folglich das summatorische Glied Σ oder die Summe der ersten Glieder von der pten Ordnung zu erhalten, muß man in der Gleichung (10) p mit p+1 vertauschen. Hiernach steht

$$\Sigma = [(n+p-1)Cp \text{ oder } (n-1)].$$

Für die 7te Ordnung hat man z. B. $\Sigma = [(n+6)C7]$; die 7te Zahlenreihe bis zum 9ten Gliede hat zur Summe $[15C7] = 6435$.

5. Man wird ebenfalls leicht sehen, daß irgend ein Glied unsers Schema's die Summe der Glieder der zunächst vorhergehenden Columne bis zu derselben Ordnung gehend, ausmacht. Es ist dieß übrigens eine Folge von dem, daß die erstere Columne aus den nämlichen Zahlen wie die pte Horizontalreihe besteht: denn diese Glieder sind, je zwei und zwei, gerade diejenigen, welche in derselben Hypothenuse wieder zum Vorschein kommen, indem sie gleichweit von den äußersten abstehen.

§. 16. Wir nahmen bis hierher die Reihe 1. 1. 1. 1.... als Anfangsreihe unseres Schema's. Wählen wir dafür die Reihe $1.\ \delta.\ \delta.\ \delta. \ldots$, und behalten dieselbe Entstehungsart bei; so wird aus der arithmetischen Progression $1.\ 1+\delta.\ 1+2\delta.\ 1+3\delta. \ldots$ die Reihe von der zweiten Ordnung entspringen, aus welcher die Reihe von der dritten Ordnung hervorgeht, u. s. w., wie es aus der hier unten stehenden Tabelle zu ersehen ist, von der die früher betrachtete nur einen besondern Fall ausmacht.

1te Ordnung	1.	δ.	δ.	δ.	δ.	. . .
2te	1.	$1+\delta$.	$1+2\delta$.	$1+3\delta$	$1+4\delta$.	. . .
3te	1.	$2+\delta$.	$3+3\delta$.	$4+6\delta$.	$5+10\delta$.	. . .
4te	1.	$3+\delta$.	$6+4\delta$.	$10+10\delta$.	$15+20\delta$.	. . .
5te	1.	$4+\delta$.	$10+5\delta$.	$20+15\delta$.	$35+35\delta$.	. . .
6te	1.	$5+\delta$.	$15+6\delta$.	$35+21\delta$.	$70+56\delta$.	. . .

Sämmtliche Glieder sind offenbar von der Form $T = A + B\delta$. Durch Zusammenstellung dieser Zahlen mit denen der ersten Tabelle findet man, daß A das Glied von demselben Range in der zunächst vorhergehenden (p—1)ten Ordnung und B das Glied von der nämlichen pten Ordnung in der (n—1)ten Stelle ist. Hiernach

T = dem nten Glied von der (p—1)ten Ordnung
$+\delta$ [(n — 1)ten Glied von der pten Ordnung],

$$T=(n-1)\frac{n}{2}\cdot\frac{n+1}{3}\cdots\cdot\frac{n+p-3}{p-1}\cdot\left(\frac{p-1}{n-1}+\delta\right).$$

Es ist dieß das allgemeine Glied unsers letzten Schema's. Das summatorische Glied Σ von der $p$ten Ordnung fällt, wie hieroben, mit dem allgemeinen Gliede von der $(p+1)$ten Ordnung zusammen. $p=3$ z. B. gibt für die 3te Ordnung

$$T=n+\tfrac{1}{2}n\delta(n-1),\ \Sigma=\tfrac{1}{2}n(n+1)\left[1+\tfrac{1}{3}\delta(n-1)\right],$$

Setzt man $\delta=2$, so entspringen, wie man aus dem ersten der hier unten stehenden Beispiele sieht, die Quadrate 1. 4. 9 16.... aus der natürlichen Reihenfolge der ungeraden Zahlen 1. 3. 5. 7... In dem zweiten Beispiele ist $\delta=3$, in dem dritten $\delta=4$ gesetzt.

1. 2. 2. 2. 2. . .	1. 3. 3. 3. 3. . .	1. 4. 4. 4. . .
1. 3. 5. 7. 9. . .	1. 4. 7. 10. 13. . .	1. 5. 9. 13. . .
1. 4. 9. 16. 25. . .	1. 5. 12. 22. 35. . .	1. 6. 15. 28. . .
$T=n^2$	$T=n\cdot\frac{3n-1}{2}$	$T=n(2n-1)$
$\Sigma=n\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}$	$\Sigma=n^2\cdot\frac{n+1}{2}$.	$\Sigma=n\cdot\frac{n+1}{3}\cdot\frac{4n-1}{3}$.

§. 17. Theilt man die Seite al des Dreiecks alm in den Punkten b, d, f... (Fig. 23) in $(n-1)$ gleiche Theile und zieht dann die Linien bc, de, fg... zu der Basis lm parallel; so wachsen diese Längen wie die Zahlen 1. 2. 3. 4... Setzt man nun einen Punkt auf a, zwei Punkte auf bc, drei auf de, vier auf fg, u. s. w.; so beträgt die Summe dieser Punkte, von a an gerechnet, successive 1. 3. 6. 10... Das Dreieck alm erhält demnach ebensoviele Punkte als Einheiten in der $n$ten dieser Zahlen von der dritten Ordnung vorkommen. Es ist dieß der Grund, warum man die letztern Zahlen auch Triangularzahlen oder dreieckige Zahlen nennt. Die oben gedachten Punkte stehen gleichweit von einander ab, wenn das Dreieck gleichseitig ist. Zieht man ferner in einem Polygon von n Seiten aus einer seiner Winkelspitzen a Diagonalen, theilt dann die letztern und die Seiten des Winkels a in $(n-1)$ gleiche Theile, verbindet hierauf die Punkte von der nämlichen Nummer durch gerade Linien; so entstehen $(n-1)$ Polygone, welche den Winkel a gemeinschaftlich und $(m-2)$ Seiten parallel haben. Die Umfänge dieser Polygone verhalten sich wie die Zahlen 1. 2. 3. 4.... Setzt man nun einen Punkt in jede Winkelspitze, einen

Punkt in die Mitte der parallelen Seiten des zweiten Polygons, zwei Punkte auf jede Seite des dritten, u. s. w.; so werden diese Seiten 1, 2, 3... Punkte mehr enthalten, von denen jeder Umfang der $(m-2)$ parallelen Seiten $(m-2)$ mehr als der vorhergehende hat. Setzen wir $\delta = m-2$, so wird der Flächeninhalt unsers Polygons ebensoviele Punkte (solche stehen beim regelmäßigen Polygon gleichweit von einander ab) enthalten, als es die Menge der Einheiten in dem $n$ten Gliede der Zahlenreihe von der dritten Ordnung, welche aus der Reihe $1.\, 2\delta.\, 3\delta \ldots$ entspringt, anzeigt. Aus diesem Grunde heißen die Zahlen jener Reihen viereckige oder Quadratzahlen, fünfeckige oder Pentagonalzahlen, sechseckige oder Hexagonalzahlen; wir haben ihr allgemeines sowohl als ihr summatorisches Glied für $\delta = 2$, $3, 4 \ldots$ oder $m = 4, 5, 6 \ldots$ hier oben angegeben.

Ueberhaupt nennt man sämmtliche aus der Reihe von der dritten Ordnung für verschiedene Werthe von δ entspringende Zahlen vieleckige oder Polygonzahlen, weil sich immer so viele Punkte, als eine solche Zahl Einheiten enthält, durch Polygone darstellen lassen.

Befolgt man ein ähnliches Verfahren bei der dreikantigen Ecke, so wird man sehen, daß die Reihe 1. 4. 10. 20... die Anzahl der Punkte ausdrückt, welche man auf parallelen Ebenen daselbst vertheilen kann; man nennt deshalb die daraus hervorgehenden Zahlen dreiseitige Pyramidalzahlen. Pyramidalzahlen sind überhaupt alle Zahlen von der vierten Ordnung; ihr allgemeines und summatorisches Glied wird dadurch bestimmt, daß man $p = 4$ und 5 macht. Der Analogie halber dehnte man diese Bildungsweise solcher Zahlen weiter aus, und nannte alle diejenigen, welche dem im §. 15 aufgestellten Gesetze unterworfen und in dem vorhergehenden Schema enthalten sind, figurirte Zahlen, obschon sie sich nicht sämmtlich über die vierte Ordnung hinaus wirklich durch geometrische Figuren darstellen lassen.

Anmerkungen. Die Formeln für die figurirten Zahlen finden ihre Anwendung bei Berechnung der Kugelhaufen in Zeughäusern.

1. Ein Kugelhaufen in der Form einer dreiseitigen Pyramide hat n Schichten; man soll die Anzahl der Kugeln in der letzten Schichte, sowie die im ganzen Haufen angeben. Das $n$te Glied der Reihe der dreiseitigen Pyramidezahlen gibt $\frac{n(n+1)}{1.2}$

für die Anzahl Kugeln in der $n$ten Schicht, und das summatorische Glied liefert $\frac{n(n+1)(1+2)}{2.3}$ Kugeln.

2. Der Kugelhaufen habe die Form einer vierseitigen Pyramide, welche aus n Schichten besteht; die Kugelzahl der Pyramide zu finden. Man findet $\frac{(n+1)n(2n+1)}{2.3}$ Kugeln. — Für die unvollständige vierseitige Pyramide, bei welcher m^2 Kugeln in der obersten Schicht liegen, beträgt die Summe aller Kugeln $\frac{(n+1)n(2n+1)}{2.3} - m\,\frac{(m+1)(2m+1)}{2.3}$.

Es haben übrigens die figurirten Zahlen bei weitem nicht jene Wichtigkeit, die man ihnen früher beilegte.

Von den Permutationen und Combinationen, insofern die Buchstaben nicht sämmtlich von einander verschieden sind.

§. 18. Wir wollen das Produkt des Polynoms $a+b+c\ldots.(A)$, wo solches mehreremal als Factor erscheint, in der Art aufstellen, daß in jedem Gliede der Multiplicator-Buchstabe die erste Stelle einnehme und jeder Buchstabe des Multiplicators an seinem Platze gelassen werde. Hiernach steht:

$$\begin{array}{ll}
A\ldots\ldots & a+b+c\ldots\ldots \\
 & a+b+c\ldots\ldots \\
\hline
B\ldots\ldots & aa+ab+ac\ldots\ldots \\
 & ba+bb+bc\ldots\ldots \\
 & ca+cb+cc\ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
 & a+b+c\ldots\ldots \\
C\ldots\ldots & aaa+aab+aac\ldots+aba+abb+abc\ldots+aca+acb+\ldots \\
 & baa+bab+bac\ldots+bba+bbb+bbc\ldots+bca+bcb+\ldots \\
 & caa+cab+cac\ldots+cba\ldots \text{ u. s. fort.}
\end{array}$$

Das Produkt B besteht aus den Anordnungen zu zwei und zwei der Buchstaben $a, b, c, \ldots$; C aus den Permutationen zu drei und drei u. s. w., wobei angenommen wird, daß jeder Buchstabe 1, 2, 3 ... mal in einem Gliede vorhanden sein kann. Kämen nämlich zwei Anordnungen zu je drei, in denen a der Anfangs-Buchstabe ist, zweimal in

C vor, oder fehlte daselbst eine von ihnen; so müßte das System der beiden Buchstaben zur Rechten von a eine Versetzung von 2 Buchstaben ausmachen, die man in B wiederholt oder weggelassen hätte. Das Produkt B hat m Glieder in jeder Linie und m Linien, wenn m die Zahl der Buchstaben a, b, c, ... darstellt. Die Zahl der Anordnungen zu zwei und zwei beträgt demnach m^2. Das Produzt C hat m Linien, jede mit m^2 Gliedern, was m^3 Anordnungen zu drei und drei gibt. m^n endlich drückt die Zahl der Permutationen der m Buchstaben, zu n und n genommen, aus, wobei jeder Buchstabe 1, 2, 3 ... bis nmal in den Resultaten vorkommen kann; übrigens darf hier $n > m$ sein. So z. B. liefern 9 Ziffern, vier zu vier genommen, 9^4 oder 6561 verschiedene Zahlen.

Die Summe der Versetzungen von m Buchstaben zu 1 und 1, zu 2 und 2, 3 und 3, ... zu n und n genommen, macht $m + m^2 + m^3 \ldots m^n$ oder $m\frac{(m^n - 1)}{m-1}$. Mit 5 Ziffern zu 1, oder 2, oder 3 genommen, kann man also $\frac{5}{4}(5^3-1)$ oder 155 Zahlen schreiben.

Es seien n Würfel A, B, C ... deren f Seiten mit den Buchstaben a, b, c .... bezeichnet sind. Einem Wurfe mit diesen Würfeln wird eine gewisse Verbindung, die durch a b a c c .... dargestellt sein mag, entsprechen. Nimmt man jetzt den ersten Würfel A, und bringt nach und nach seine verschiedenen Seiten hervor, ohne dabei an den übrigen Würfeln etwas zu ändern; so wird die obige Verbindung deren f erzeugen: unsere n Würfel geben folglich f Resultate mehr als die (n—1) übrigen Würfel B, C....

Zwei Würfel bieten also f^2 Fälle dar, 3 Würfel liefern deren f^3, 4 Würfel f^4, ... n Würfel mit f Seiten geben f^n Fälle. Wir betrachten hier die identischen Resultate als von einander unterschieden, sobald sie durch verschiedene Würfel herbeigeführt werden.

Hat der erste Würfel f Seiten, der zweite deren f', der dritte f'' ...., so wird sich die Zahl aller möglichen Fälle auf $f \times f' \times f'' \ldots$ belaufen.

§. 19. Es seien m leere Plätze A, B, C...; man soll dieselben mit m Buchstaben besetzen, nämlich α Plätze mit a, β Plätze mit b, u. s. f. Es fragt sich, auf wie vielerlei Arten man eine solche Vertheilung bewerkstelligen kann. Es ist klar, daß, um die α Buchstaben a anzuschreiben, es hinreichend ist, eine Anzahl α von den Buchstaben A, B, C... zu nehmen und dieselben gleich a zu setzen; was

auf so vielerlei Arten geschehen kann, als man α Buchstaben A, B, C... gleich a anzunehmen vermag: $[mC\alpha]$ drückt folglich aus, auf wie viel mögliche Arten man α Plätze unter den m leeren mit a besetzen kann. Es bleiben jetzt für jede specielle Versetzung $m-\alpha$ leere Plätze übrig, von denen β mit dem Buchstaben b ausgefüllt werden sollen: $[(m-\alpha)C\beta]$ drückt sofort aus, wie oft sich solches bewerkstelligen läßt. Das Produkt $[mC\alpha]\times[(m-\alpha)C\beta]$ zeigt daher an, auf wie vielerlei Arten sich α Buchstaben a und β Buchstaben b in die m leeren Plätze vertheilen lassen. In die $(m-\alpha-\beta)$ übrigbleibenden Plätze kann man nun γ Buchstaben c setzen, was $[(m-a-\beta)C\gamma]$ Fälle liefert; und dieß so weiter fort, bis keine leeren Plätze mehr da sind, was stattfinden wird, wenn $[\vartheta C\vartheta]=1$. Will man also die m Faktoren $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ auf alle möglichen Arten unter einander versetzen, oder alle mögliche Versetzungen bilden, deren jene Faktoren fähig sind; so wird die Zahl der fraglichen Fälle durch die Formel (9), welche den Coefficienten des allgemeinen Gliedes eines Polynoms gibt, angezeigt werden. So z. B. können die 10 Faktoren $a^4b^3c^2d$ auf $N=\frac{1.2.3.\ldots.10}{2.3.4\times2.3\times2}=12600$ Arten permutirt werden Die 7 Buchstaben des Wortes Etienne lassen sich auf 420 verschiedene Weisen unter einander vertheilen.

Dieser Coefficient drückt zugleich aus, wie vielerlei Fälle es gibt, um mit m Würfeln, deren jeder f Seiten hat, ein bestimmtes Resultat herbeizuführen. Denn haben diese Würfel auf ihren Seiten die Buchstaben a, b, c... stehen, und will man, daß α Würfel den Buchstaben a darbieten sollen; so ist dieß gerade so viel, als ob man verlangte, α Buchstaben a in solche Stellen zu setzen, deren Anzahl m beträgt: hieraus ergeben sich $[mC\alpha]$ Fälle, um α Buchstaben a hervorzubringen. Damit β von unsern übrigen $(m-\alpha)$ Würfeln die Seite b darbieten, muß man auf ähnliche Weise β Plätze unter den $(m-\alpha)$ leeren ausfüllen; jedes der vorhergehenden Resultate liefert mithin $[(m-a)C\beta]$ Fälle u. s. fort.

§. 20. Wir wollen die Combinationen der Buchstaben a, b, c... suchen, unter der Voraussetzung, daß jeder Faktor mehreremal in den verschiedenen Gliedern vorkommen könne, wie solches in §. 8 geschehen, mit dem Unterschiede, daß dabei auf die Ordnung der Faktoren keine Rücksicht genommen werde.

$$
\begin{array}{llll}
a + & b + & c + & d\ldots\ldots \\
a + & b + & c + & d\ldots\ldots \\
\hline
aa + & bb + & cc + & dd\ldots\ldots \\
+ & ab + & bc + & cd\ldots\ldots \\
 & + & ac + & bd\ldots\ldots \\
 & & + & ad\ldots\ldots \\
\hline
aaa + & bbb + & ccc + & ddd\ldots\ldots \\
+ & abb + & bcc + & cdd\ldots\ldots \\
+ & aab + & acc + & bdd\ldots\ldots \\
 & + & bbc + & add\ldots\ldots \\
 & + & abc + & ccd\ldots\ldots \\
 & + & aac + & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Wir multipliciren deshalb das Polynom mehrmal mit sich selbst, indem wir dabei als Faktoren eines Gliedes a, b, c.. nur die Glieder des Multiplicands nehmen, welche sich mit jenem in der nämlichen Columne oder zu seiner Linken befinden. Es ist einleuchtend, daß die successiven Resultate die verlangten Combinationen zu je 2, zu je 3... sein werden. Was die Anzahl der Combinationen anbelangt, so bemerken wir, daß jede Columne eines Produktes ebensoviele Glieder enthält, als deren in der darüber befindlichen Columne und den daneben zur Linken stehenden zusammen vorhanden sind. Stellen demnach $1, \alpha, \beta, \gamma \ldots.$ die Zahlen der Glieder der Columne eines Produktes dar, so sind die für das folgende Produkt $1+\alpha$, $1+\alpha+\beta$, $1+\alpha+\beta+\gamma$, ... Es geht diese Reihe nach dem Bildungs-Gesetze der figurirten Zahlen aus $1.\alpha.\beta\ldots.$ (§. 15) hervor. Hiernach bestehen für die Combinationen zu je 2 die successiven Columnen aus 1. 2. 3 4.... Gliedern; für die Combinationen zu je 3 beträgt diese Anzahl successive 1. 3. 6. 10....; für die Combinationen zu je p hat man die Reihe von der pten Ordnung. Die Gesammtanzahl der Combinationen oder die der Glieder eines Produktes ist die Summe der Reihe, solche bis auf 2, 3, 4, ... Columnen ausgedehnt, je nachdem man 1, 2, 3 ... Buchstaben zu combiniren hat. Für n Buchstaben muß man die n ersten Glieder der pten Ordnung, d. h. das nte Glied von der (p+1)ten Ordnung nehmen. Die Menge der Combinationen von n Buchstaben, zu p und p genommen, vorausgesetzt, daß deren jeder 1, 2, 3 ... pmal vorkommen kann, ist demnach die nte Zahl von der

(p+1)ten Ordnung. Um dieselbe zu erhalten, muß man folglich in der Gleichung (10) p+1 mit p vertauschen; wonach sieht

$$T = n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}\ldots\frac{n+p-1}{p} = (p+1)\frac{p+2}{2}\ldots\frac{p+n-1}{n-1}\ldots (12);$$

n kann hier $>, =$ oder $<$ p sein. So z. B. geben 10 Buchstaben, zu 4 und 4 genommen, 715 Resultate; 4 Buchstaben, zu 10 und 10 genommen, liefern deren 286. Man sieht übrigens, daß n Buchstaben, zu p und p genommen, dieselbe Anzahl Combinationen hervorbringen, weil man p+1 statt n und n—1 statt p setzen kann, ohne dadurch T zu ändern.

Anmerkung. Aus der Gleichung (12) ergibt sich, daß die Anzahl der Combinationen von n Elementen zu je p mit Wiederholungen gleich der Anzahl der Combinationen von n+p—1 Elementen zu je p ohne Wiederholungen ist.

§. 21. Die Entwicklung von $(a+b+c+\ldots)^p$ besteht aus ebenso vielen Gliedern von der Form $Na^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ (§. 9), als man verschiedene Zahlen für die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ nehmen kann, wobei ihre Summe = p bleibt. Die Gesammtanzahl der Glieder ist demnach der Zahl der Combinationen der n Buchstaben a, b, c..., zu p und p genommen, gleich, indem man ihren Exponenten alle Werthe von Null bis p beilegt. Hieraus erhellt, daß der im vorigen Paragraphen gefundene Werth für T die Zahl der Glieder der pten Potenz des Polynoms a+b+c.... anzeigt.

Will man die Summe der Combinationen von n Buchstaben zu je 1, zu je 2,... zu je p haben, so muß man die nte Zahl der successiven Ordnungen 1. 2. 3...(p+1) des im §. 15 aufgestellten Schemas, oder die dieser Summe gleichgeltende (n+1)te Zahl der (p+1)ten Ordnung nehmen. Wir erhalten hiernach für die verlangte Summe, indem n+1 mit n vertauscht wird,

$$S = [(n+p)\,C\,p.\ \text{oder}\ n] - 1.$$

Die subtractive Einheit entspricht der Combination Null zu Null, welche man hier weglassen muß. 5 Buchstaben von je 1 bis zu je 4, oder 4 Buchstaben von je 1 bis zu je 5 combinirt, geben auf solche Weise $\frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} - 1 = 125$ Resultate.

Will man bloß die Combinationen von zu je p bis zu je p' haben, so wendet man unsere Formel zweimal an, nämlich für die

Zahlen p und p', und zieht hierauf die gefundenen Resultate von einander ab. 5 Buchstaben, zu je 4 bis zu je 6 genommen, liefern 461—125, oder 336 Combinationen.

§. 22. Man soll alle Combinationen für die Buchstaben des Ausdruckes $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$, zu 1 und 1, 2 und 2,... bis zu je $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ genommen, finden. Für a können 1, 2, 3.. α die Exponenten sein, ebenso 1, 2, 3... β für b, u. s. w.: die Aufgabe läuft offenbar dahin aus, sämmtliche Theiler von $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$ zu finden. Die Anzahl aller Zahlen dieser Art oder die aller Combinationsformen ist gleich der Anzahl der Glieder, welche das Produkt

$$(1+a+a^2+\ldots a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots b^\beta)(1+c\ldots c^\gamma)\ldots\ldots$$

enthält, wenn man es vollständig entwickelt; mithin beträgt die gesuchte Zahl $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$ Z. B. $a^5\, b^4\, c^3\, d^2$ hat 360 oder 6. 5. 4. 3 Theiler, wenn die Einheit mitgerechnet wird. Es gibt also im vorliegenden Falle 359 Arten, die Faktoren zu 1 und 1, zu 2 und 2, u. s. w. zu combiniren.

Will man von diesen Theilern nur diejenigen herausheben, welche a enthalten, so findet man für die Anzahl derselben $\alpha(1+\beta)(1+\gamma)\ldots$, insofern man von der Gesammtanzahl die Größe $(1+\beta)(1+\gamma)\ldots$, d. i. die Zahl der Theiler von $b^\beta\, c^\gamma \ldots$ abzieht: es ist dieß gerade so viel, als ob man mit jeder Combination ohne a die Faktoren a, a^2, a^3,... vereinigt hätte.

Um zu wissen, wie viele unter den Theilern $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ es gibt, welche $a^m b^n$ enthalten, nimmt man alle Theiler von $c^\gamma d^\beta \ldots$, deren Anzahl $(1+\gamma)(1+\delta)\cdot$ beträgt, und setzt neben jedem $a^m b^n$: dergleichen Resultate stimmen folglich der Anzahl nach überein.

Anmerkung. Sind die Exponenten α, β, γ... sämmtlich gleich 1, d. h. sind keine Wiederholungen gestattet, so ist die Anzahl sämmtlicher Combinationen für n Elemente in allen Klassen $=2^n-1$.

Man vergleiche übrigens das hier Gesagte mit der 6ten Note in der Arithmetik.

bindungen, während die a' Piques deren $[a'Cm'']$ liefern. Indem man diese Systeme zusammenstellt, findet man $[aCm'] . [a'Cm'']$ für die Zahl der günstigen Fälle. Man würde dafür $[aCm'][a'Cm'']$ $[a''Cm''']$ bekommen, wenn überdieß noch a'' Carreaux vorhanden wären, von denen man m''' ziehen wollte.

IV. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer Lotterie von m Nummern, bei welcher jedesmal p gezogen werden, von m' besetzten Nummern gerade p' herauskommen? Die Zahl aller möglichen Fälle oder der gesuchte Nenner ist $[mCp]$. Die Zahl der günstigen Combinationen oder der Zähler ist

$$X = [(m-m')C(p-p')][m'Cp'].$$

In der gewöhnlichen Zahlenlotterie hat man $m=90$, $p=5$; hiernach ist der Nenner $=[90C5]=43949268$. Besetzt Jemand z. B. 20 Nummern, mithin $m'=20$, so hat er, wenn von diesen Nummern herauskommen sollen, nämlich:

$1=p'$	Zähler 20	$[70C4]$,	Wahrscheinlichkeit 0,4172
$2=p'$	.... $20.\frac{19}{2}$	$[70C3]$	 0,2367
$3=p'$	.... $20.\frac{19}{2}\frac{18}{3}$	$[70C2]$	 0,0626
$4=p'$	.... $70.$	$[20C4]$	 0,0077
$5=p'$	....	$[20C5]$	 0,0003

Will man, daß von den besetzten Nummern wenigstens eine herauskomme, d. h., daß davon 1, 2, 3, 4 oder 5 herauskommen; so muß man die Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten nehmen, was 0,7245 gibt. Sollen von den besetzten Nummern wenigstens 2 herauskommen, so muß man die vorigen Resultate, mit Ausnahme des erstern, addiren; hieraus entsteht die Wahrscheinlichkeit 0,3073; u. s. w. Für den Fall, daß keine Nummer herauskommt, macht man $p'=$ Null, oder zieht 0,7245 von 1 ab; hierdurch kommt 0,2755. Es lassen sich diese Probleme auch folgendermaßen ausdrücken: Man hat m Karten, unter welchen sich m' auf eine gewisse Art bezeichneten befinden; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn p Karten gezogen werden, von diesen bezeichneten gerade oder wenigstens p' herauskommen? Aus den 12 Karten z. B., welche ein Piquetspieler schon in Händen hat, schließt er, daß unter den 20 übrigen Karten noch 7 Cœurs vorhanden sind; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter den 5 noch zu erhaltenden Karten gerade 3 Cœurs sein werden? Hier ist $m=20$, $m'=7$, $p=5$, $p'=3$; woraus

$$\frac{[13C2]\ [7C3]}{[20C5]} = \frac{2730}{15504}, \text{ ohngefähr } \frac{3}{17}.$$

Indem wie oben verfahren wird, findet man $\frac{3206}{15504}$, ohngefähr $\frac{6}{29}$ für die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens 3 Cœurs kommen werden.

Eine Urne enthalte 12 Kugeln, worunter 4 weiße sind; man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß, indem man 7 daraus zieht, darunter gerade 3 weiße sein werden. Es ist $m = 12$, $m' = 4$, $p = 7$, $p' = 3$: woraus man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{280}{792}$, ohngefähr $\frac{6}{17}$ findet. Die Wahrscheinlichkeit, daß unter den 7 Kugeln wenigstens 3 weiße sein werden, ist $\frac{14}{33}$.

§. 24. Zwei Ereignisse A, A' werden bezüglich durch p, p' Umstände herbeigeführt, während sich q, q' Umstände ihrem Stattfinden entgegensetzen; dabei wird angenommen, daß die Ereignisse getrennt oder zusammen eintreffen können, und von einander unabhängig sind. Man soll die Wahrscheinlichkeiten aller Fälle ausmitteln. Wir denken uns deßhalb zwei reguläre Polyeder oder Würfel (dieses letztere Wort in einem ausgedehnteren Sinne als gewöhnlich genommen) von welchem der eine $p+q$ farbige Seiten hat, davon p Seiten weiß, die übrigen q schwarz sind, und der zweite $p'+q'$ farbige Seiten besitzt, davon p' roth, die andern q' blau sind. Man sieht leicht ein, daß der Wurf mit einem jeden dieser Würfel für sich Resultate herbeiführt, welche mit unsern beiden Ereignissen verglichen werden können. A z. B. findet statt, wenn man eine von den p weißen Seitenflächen erhält, während es nicht eintrifft, wenn man eine von den q schwarzen Seiten wirft; u. s. w. Die Anzahl aller möglichen Fälle ist $(p+q)(p'+q')$ und gibt den gemeinschaftlichen Nenner aller Wahrscheinlichkeiten ab. Soll eine schwarze und eine rothe Seite zusammentreffen, so hat man qp' günstige Fälle, weil sich auf so vielerlei Arten die q schwarzen Seiten mit den p' rothen verbinden lassen: die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von A', ohne daß A statt hat, ist folglich $\frac{qp'}{(p+q)(p'+q')} = \frac{q}{p+q} \times \frac{p'}{p'+q'}$. Aehnliches gilt von den übrigen Fällen.

Kugeln in eine Urne zusammenthäte und sodann die Wahrscheinlichkeit, daraus eine weiße Kugel zu ziehen, suchte. Man fände für die letztere Wahrscheinlichkeit den Bruch $\frac{5}{7}$, welcher von der oben gefundenen Wahrscheinlichkeit $\frac{17}{24}$ verschieden ist. Allein man darf die Kugeln nur in dem Fall in eine Urne zusammenwerfen, wenn jede Urne gleichviel Kugeln enthält, mithin die Wahrscheinlichkeit, eine jede Kugel zu ziehen, gleich groß ist, was sonst nicht statt hat. Denn die größere Anzahl der Kugeln in der zweiten Urne verursacht keineswegs, daß daß man eher in die zweite als in die erste Urne greifen werde; während, wenn sämmtliche Kugeln in einer Urne vereinigt sind, die Kugeln der zweiten Urne eine größere Wahrscheinlichkeit, als die der erstern gezogen zu werden, für sich haben. Diese Ungleichheit verschwindet, wenn man die Wahrscheinlichkeiten, eine weiße Kugel aus der ersten und zweiten Urne zu ziehen, nämlich die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ auf einerlei Benennung bringt, was $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ gibt, demnach annimmt, die erste Urne enthalte 8 weiße und 4 schwarze Kugeln, und die zweite Urne 9 weiße und 3 schwarze. Vereinigt man nun alle Kugeln in eine Urne, so beträgt ihre Anzahl 24, worunter 17 weiße sind; die Wahrscheinlichkeit, eine von diesen zu ziehen, ist folglich $\frac{17}{24}$, wie oben.

§. 25. Für das Eintreffen eines Ereignisses A gibt es p günstige und q ungünstige Fälle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß gedachtes Ereigniß unter n Versuchen kmal nach einander eintrete? Es ist klar, daß bei jedem Versuche der Bruch $\frac{p}{p+q}$ die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von A und der Bruch $\frac{q}{p+q}$ die des Gegentheils ausdrücke. Für das kmalige Eintreffen des Ereignisses hat man die kte Potenz des ersten Bruches, dagegen die $(n-k)$te Potenz des zweiten Bruches, wenn solches bei den $n-k$ übrigen Versuchen nicht der Fall ist. Durch Multiplikation dieser beiden Potenzen erhält man die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$z = \frac{p^k \cdot q^{n-k}}{(p+q)^n},$$

welche ausdrückt, daß unter n Versuchen A genau kmal eintreffe, wobei die Ordnung, in welcher die Ereignisse auf einander folgen,

im Voraus bestimmt wird. Ist diese Ordnung aber beliebig, so muß man z so vielmal nehmen, als sich dergleichen Resultate combiniren lassen, nämlich die Anzahl Fälle, wo A eintrifft, mit denen, wo solches nicht statt findet, was den Faktor [nCk] liefert: z×[nCk] stellt folglich die Wahrscheinlichkeit dar, daß das Ereigniß A unter n Versuchen kmal vorkommen werde, ohne die Ordnung zu berücksichtigen, in welcher solches geschieht.

Will man, daß A wenigstens kmal eintreffe, so ändert man hier k in k, k+1, ... bis n um, und nimmt die Summe der Resultate.

Der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist also $(p+q)^n$, während der Zähler dadurch gefunden wird, daß man das letzte Binom entwickelt und an demjenigen Gliede, wo p^k vorkommt, stehen bleibt; man nimmt alsdann dies letztere Glied ohne oder mit seinem Coefficienten, je nachdem die Ordnung der k Fälle, in denen A unter n Versuchen zutrifft, berücksichtigt oder unbeachtet gelassen wird. Will man, daß A wenigstens kmal und höchstens k′mal unter n Versuchen stattfinde, so addirt man sämmtliche Glieder, in denen p die Exponenten k, k+1, ... k′ hat.

Einige Beispiele hierüber:

I. Von den 6 Seiten eines Würfels sind 2 einem Spieler günstig; damit er gewinne, muß er in 4 Würfen 3mal die eine oder die andere Seite werfen (oder in einem einzigen Wurfe mit 4 Würfeln sind 3 Seiten günstig). Man soll die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes bestimmen. Es ist hier $p=2$, $q=4$, ferner $(p+q)^4=6^4=1296=$

$p^4 =$ 16 Fälle, welche 4mal eine der günstigen Seiten herbeiführen.
$+4p^3q = 128$ . . . . 3 „
$+6p^2q^2 = 384$ . . . . 2 „
$+4p\,q^3 = 512$ . . . . 1 „
$+ \quad q^4 = 256$ . . . . 0 „

Summe $=1296=(p+q)^4$, Nenner der verschiedenen Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, daß genau 3mal einer der günstigen Fälle eintreffe, ist folglich $\frac{128}{1296}=\frac{8}{81}$. Man dividirt mit dem Coefficienten 4, wenn die Ordnung der einzelnen Fälle beachtet wird, wodurch $\frac{2}{81}$ entsteht. Für die Wahrscheinlichkeit, daß die günstigen Seiten wenigstens 3mal vorkommen, findet man $\frac{144}{1296}$ oder $\frac{1}{9}$, indem die beiden ersten Zahlen addirt werden.

II. Man wirft eine Münze, deren beide Seiten mit Kopf und Wappen bezeichnet sind, in die Höhe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in zwei Würfen wenigstens einmal Kopf zu oberst zu liegen komme?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist offenbar gleich $\frac{p^2}{(p+q)^2}+\frac{2.p.q}{(p+q)^2}$, wobei $p=q=\frac{1}{2}$, weil die Wahrscheinlichkeiten, daß Kopf oder Wappen falle, gleich groß sind; hiernach ist unsere Wahrscheinlichkeit $=\frac{3}{4}$.

III. Die Anzahl der erforderlichen Würfe mit 2 Würfeln zu bestimmen, damit die Wahrscheinlichkeit, zwei Sechsen zu werfen, $=\frac{1}{2}$ sei. Man hat $(\frac{35}{36})^x=\frac{1}{2}$, woraus $x=24,6$. Die Wahrscheinlichkeit, 2 Sechsen zu werfen, ist mithin nach 25 Versuchen schon größer als $\frac{1}{2}$.

IV. Welche Wahrscheinlichkeiten haben zwei Spieler, die im Spiel eine gleiche Stärke besitzen, wenn dem M noch 6 Punkte, dem N dagegen 4 Punkte fehlen, um die Parthie zu gewinnen? Die Summe der Punkte beträgt 10; ich bilde die 9te Potenz von $p+q$, und behalte für M die vier ersten Glieder (wo der Exponent von p wenigstens 6 ist), für N aber die sechs übrigen Glieder, und setze endlich $p=q=1$. Auf diese Weise finde ich einerseits 130, und andererseits 382, und die ganze Summe 512. Die Wahrscheinlichkeit, daß M gewinne, ist $\frac{130}{512}$, und die von N macht $\frac{382}{512}$. Wird das Spiel abgebrochen, bevor noch von den Spielern ein weiterer Versuch gemacht worden ist; so muß der Einsatz zwischen M und N in dem Verhältniß von 130 : 382, sehr nahe wie 1 : 3 vertheilt werden: es ist dieß zu gleicher Zeit der Werth, für welchen sie ihre Ansprüche auf den Einsatz verkaufen sollen, wenn sie darauf zu verzichten übereingekommen sind. Besitzen die Spieler im Spiel keine gleichen Kräfte, z. B. verhalten sich dieselben wie 3 zu 2, d. h. gewinnt M, indem er mit N spielt, auf 5 Parthien 3, oder gibt M auf 3 Punkte einen an N ab, um die Kräfte gleich zu machen; so ist die Rechnung ganz die nämliche, wenn man $p=3$ und $q=2$ setzt. In diesem Falle findet man, daß die Wahrscheinlichkeit von M zu der von N sich ohngefähr wie 14 : 15 verhalte.

Anmerkung. Die Regel, nach welcher der Gesammteinsatz, bevor noch das Spiel geendigt ist, vertheilt werden muß, heißt

die Theilungsregel; dieselbe wurde zu gleicher Zeit von dem berühmten Pascal und dem scharfsinnigen Fermat entwickelt, welche die eigentlichen Gründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind.

Man hat hier nur zwei Ereignisse betrachtet; kommen aber deren mehrere vor, so benutzt man, um die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses zu finden, statt des Binoms das Polynom, das aus so vielen Theilen besteht als verschiedene Ereignisse berücksichtigt werden. Sind A, B, C ... die Ereignisse, und a, b, c ... ihre bezüglichen einfachen Wahrscheinlichkeiten; so wird die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen pmal A, qmal B, rmal C, u. s. w. in beliebiger Ordnung eintreffe, durch

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2..p \times 1.2\ldots q \times 1.2.3\ldots r\ldots} a^p b^q c^r \ldots$$

ausgedrückt, wobei die Bedingung besteht, daß $p+q+r\ldots = n$ ist. Man läßt den Zahlencoefficienten weg, wenn die einfachen Ereignisse in einer vorgeschriebenen Ordnung hervorgehen sollen.

§. 26. Es trifft sich öfters, daß die Ursachen zu verborgen liegen, oder sich auf zu manigfaltige Weise durchkreuzen, daß es unmöglich ist, sie sämmtlich zu entwickeln und ihre Menge zu zählen: die früher aufgestellten Grundsätze können in solchen Fällen keine Anwendung mehr finden. Man nimmt hier sofort zu der Erfahrung seine Zuflucht, um sich zu vergewissern, ob in den Erscheinungen eine Art von periodischer Aufeinanderfolge sichtbar wird, woraus sich mit Wahrscheinlichkeit vermuthen ließe, daß die unbekannte Ursache, welche in einer regelmäßigen Ordnung jene Erscheinungen häufig hervorgebracht hat, dieselben abermals, insofern sie noch wirksam ist, in der nämlichen Ordnung erzeugen werde. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt alsdann die Zahl jener beobachteten Aufeinanderfolgen für die Zahl der Ursachen selbst. Um dieß durch ein Beispiel deutlich zu machen, wollen wir annehmen, daß ein 10mal hintereinander in die Höhe geworfener Würfel 9mal die Seite a herbeigeführt hat: es muß daher in der Art des Werfens, in der Gestalt, der Substanz des Würfels irgend eine verborgene Ursache liegen, welche dieses 9malige Wiederkehren der Seite a hervorbringt. Wäre ebenso bei 100 Versuchen 90mal die nämliche Seite wieder zum Vorschein gekommen,

so erlangt die diesem Wiederkehren günstige Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ ein ziemliches Gewicht, das in dem Maße gesteigert wird, als die wiederholten Versuche mit dieser Annahme in Uebereinstimmung sind, weil man Gewißheit über die Richtigkeit der Annahme haben würde, wenn bei einer unendlichen Anzahl von Versuchen jedesmal 9 davon unter 10 die Seite a hervorbrächten. Auf solche Art hat die Erfahrung die Beständigkeit folgender Thatsachen nachgewiesen, deren Ursachen anzugeben unmöglich ist:

1. Die Anzahl der in einem Lande vollzogenen Heirathen, für irgend eine bestimmte Zeit, verhält sich zu jener der Geburten und der Bevölkerung wie 3 : 14 : 396.

2. Die Anzahl der Geburten der Knaben steht zu jener der Mädchen in dem Verhältnisse wie 16 : 15.

3. Die Bevölkerung, die Zahl der Geburten, die der Todesfälle und die der Heirathen verhalten sich wie 2037615 : 71896 : 67700 : 15345. In einem Jahr betragen sehr nahe die Geburten den 28sten, die Todesfälle den 30sten, die Heirathen den 132sten Theil der Bevölkerung. Der Unterschied $\frac{1}{420}$ der Geburten über die Todesfälle ist der jährliche Zuwachs der Bevölkerung.

4. Die Dauer der Generationen von Vater auf Sohn ist etwa 33 Jahre.

5. Die Zahl der männlichen Sterbefälle verhält sich zu jener der weiblichen wie 24 : 23. Die Zahl der männlichen Lebenden steht zu der der weiblichen in dem Verhältnisse von 33 : 29.

6. Die Sterbefälle an Mannspersonen betragen den 58sten, die an Frauenspersonen den 61sten Theil der Bevölkerung. In Paris macht die Zahl der Todesfälle nur den 32sten Theil der Einwohnerzahl aus; die Sterbfälle belaufen sich jährlich im Durchschnitt auf 22700, und die Geburten auf 24800.

7. Die Hälfte der ganzen Bevölkerung steht unter 25 Jahren, und alle 25 Jahre ist eine Hälfte erneuert.

8. In Frankreich verheirathet sich jedes Jahr der 66ste Theil der Bevölkerung. Die mittlere Lebensdauer beträgt $28\frac{1}{2}$ Jahre.

9. Die auf den Posten in Frankreich zurückgebliebenen Briefe betragen jährlich etwa 19000.

10. Es sind, ungeachtet der Veränderungen, welche einzelne Jahre hervorbringen mögen, die Erzeugnisse eines Landes für einen bestimmten Zeitraum, wenn man sie aus einer bedeutenden Anzahl von Jahren ableitet, sehr nahe beständig. Auf dergleichen Betrachtungen gestützt sind die Sterblichkeitstabellen und Bevölkerungslisten aufgestellt worden.

Wir wollen nicht weiter in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingehen, die von solcher Ausdehnung ist, daß darüber eigene Werke existiren. Einige der leichtern hierüber sind:

1. Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Lacroix, übersetzt von E. Unger, Erfurt bei Keyser.

2. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben von Littrow, Wien bei Beck.

3. Bicquilly, Rechnung des Wahrscheinlichen, übersetzt von Rüdiger, Leipzig bei Schweikert.

4. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung von Jahn, Leipzig bei Schweikert.

Zweites Kapitel.

Von der Auflösung der Gleichungen.

Von der Zusammensetzung und Transformation der Gleichungen.

§. 27. Die allgemeine Gleichung eines jeden Grades kann, wenn man alle Glieder auf eine Seite bringt und reducirt, durch

$$kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \ldots + tx + u = o \quad (1)$$

dargestellt werden, wobei $k, p, q \ldots u$ bekannte Zahlen sind, die positiv, negativ und zum Theil auch Null sein können. Jeder reelle oder imaginäre Ausdruck a, welcher in eine solche Gleichung statt x gesetzt, das erste Glied gleich Null macht, nämlich $ka^n + pa^{n-1} + \ldots + u = o$ gibt, heißt Wurzel der Gleichung. Wir werden die Gleichung (1), der Kürze wegen, häufig durch $f(x) = o$ bezeichnen.

Anmerkung. Jeder Ausdruck, welcher von einer veränderlichen Größe x auf irgend eine Weise abhängt, heißt eine Funktion von x. Algebraische Funktionen nennt man vorzugsweise diejenigen, in welchen sich auf die veränderlichen Größen bloß algebraische Operationen, nämlich Addition, Subtraction, Multiplikation, Division, Potenzirung mit ganzen oder gebrochenen, jedoch beständigen Exponenten beziehen. Sobald aber eine Funktion variable Exponenten, Logarithmen, Kreisbogen, trigonometrische Linien enthält, wird sie eine transcendente genannt.

Die algebraischen Funktionen zerfallen in rationale und irrationale Funktionen. Rational sind diejenigen, in welchen die Veränderliche nur auf ganze Potenzen erhoben vorkommt; im Gegentheil ist die Funktion irrational. Die rationalen Funktionen werden wieder in ganze und gebrochene getheilt, welche letztere Quotienten zweier ganzer Funktionen sind, ohne selbst einer ganzen Funktion gleich zu sein. Man drückt in einer Funktion nur die Größen aus, welche man nach dem jedesmaligen Zwecke gerade berücksichtigen will. $f(x)$, $\alpha(x)$ bezeichnen die Formeln, in denen der Buchstabe x auf verschiedene Weise combinirt ist. $f(x)$ und $f(z)$, welche das nämliche Zeichen haben, sagen aus, daß in dergleichen Ausdrücken x und z auf die nämliche Art verbunden vorkommen, so daß jene Funktionen identisch werden, wenn man x mit z vertauscht. So drückt $f(\sqrt{z+\alpha})$ aus, daß eine Funktion $f(x)$ existirt, in der $\sqrt{z+\alpha}$ statt x gesetzt worden ist. Ebenso zeigt $F(x^2+y^2)$ an, daß man x^2+y^2 für z in der Funktion $F(z)$ substituirt hat. Man nennt solche Funktionen, welche sich bloß in der Bezeichnung der veränderlichen Größen unterscheiden, auch ähnliche Funktionen.

§. 28. Es werde eine beliebige Zahl a genommen und das Polynom (1) durch $x-a$ dividirt; es sei R der numerische Rest und $kx^{n-1}+p'x^{n-2}+q'x^{n-3}+\ldots+t'$ der dabei gefundene Quotient. Dieser Quotient mit $x-a$ multiplicirt und R hinzugefügt, muß nothwendigerweise den Dividend (1) hervorbringen. Die Rechnung gibt sofort:

$$f(x) = \begin{array}{l|l|l|l|l} kx^n + p' & x^{n-1} + q' & x^{n-2} + r' & x^{n-3} \ldots + t' & x + R \\ \quad -ak & \quad -ap' & \quad -aq' & \quad\quad -as' & \quad -at' \end{array}$$

Da wir nun sämmtliche Glieder des Polynoms $f(x)$ hier wieder erhalten müssen, so wird der Faktor p von x^{n-1} nicht anders als $p'-ak$ sein, welche letztere Größe in dem Produkte ebenfalls der Coefficient von x^{n-1} ist; ebenso hat man $q=q'-ap', r=r'-aq' \ldots u=R-at'$. Durch Versetzung der negativen Glieder entsteht $p'=p+ak, q'=q+ap', r'=r+aq', \ldots R=u+at'$ (2). Diese Gleichungen, welche sämmtlich von der nämlichen Form sind, dienen dazu, nach und nach von einander die Coefficienten $p', q', r', \ldots$ des Quotienten und den Rest R abzuleiten: denn jeder dieser Coefficienten besteht aus dem gleichstelligen Coefficienten in $f(x)$, vermehrt um das Produkt des vorhergehenden Coefficienten mit a. Es mögen jetzt ein paar Beispiele über dergleichen Rechnungsarten folgen:

Bei der Division von $4x^5-10x^4+6x^3-7x^2+9x-11$ durch $x-2$ hat man den Quotienten $4x^4-2x^3+2x^2-3x+3$ und den Rest -5. Nachdem $4x^4$, das erste Glied des Quotienten, angesetzt worden, schreibt man $4\times2-10=-2$, was den Coefficienten von x^3 gibt; der Coefficient von x^2 ist $-2\times2+6=+2$; ferner $2\times2-7=-3$; u. s. w.

Nimmt man dagegen $x+2$ als Divisor, so hat man $4x^4-10x^3+42x^2-91x+191\ldots$ zum Quotienten und -393 zum Rest.

Es lassen sich übrigens die Coefficienten auch unabhängig einen vom andern finden; denn eliminirt man successive $p', q' \ldots$ mit Hülfe der Gleichungen (2), so kommt

$$p'=ka+p,\ q'=ka^2+pa+q,\ r'=ka^3+pa^2+qa+r \ldots,$$
$$R=ka^n+pa^{n-1}+qa^{n-2}+ra^{n-3}\ldots+ta+u=f(a).$$

Um also irgend einen Coefficienten von der iten Stelle in dem Quotienten zu erhalten, muß man die i ersten Glieder von $f(x)$ nehmen, a anstatt x setzen und die sämmtlichen Gliedern gemeinschaftlichen Potenzen von a weglöschen. Was den Rest der Division anlangt, so wird derselbe aus dem vorgelegten Polynom $f(x)$ unmittelbar dadurch abgeleitet, daß man $x=a$ setzt, was $f(a)$ gibt. Da nun dieser Rest verschwindet oder nicht verschwindet, je nachdem a eine Wurzel oder keine Wurzel der vorgelegten Gleichung $f(x)=o$ ist; so sieht man, daß das Polynom durch $(x-a)$ ohne Rest theilbar oder solches nicht wird, je nachdem a eine oder keine Wurzel der Gleichung $f(x)=o$ ist.

Die hier oben angegebene Rechnungsweise ist sehr bequem, um den Quotienten von $f(x)$ durch $x-a$ zu finden, desgleichen um zu

erkennen, ob a eine Wurzel sei, endlich, um das numerische Resultat der Substitution einer gegebenen Zahl a an die Stelle von x in einem Polynom $f(x)$ zu erhalten.

§. 29. Wir wollen den Satz, daß jede Gleichung wenigstens eine Wurzel haben muß, für völlig richtig annehmen, ein Gegenstand, auf welchen wir später zurückkommen werden. Wir machen überdieß $k=1$, was der Allgemeinheit nicht im mindesten Eintrag thut; weil sich die ganze Gleichung (1), ohne etwas daran zu ändern, durch k dividiren läßt. Ist nun a eine Wurzel der vorgelegten Gleichung, so ist solche ganz einerlei mit $(x-a)\,Q$, wobei Q ein Polynom vom $(n-1)$ten Grade darstellt. Ist ferner b eine Wurzel der Gleichung $Q=o$, so muß sich Q durch $x-b$ ohne Rest theilen lassen; wonach
$Q=(x-b)Q'$, $f(x)=(x-a)(x-b)Q'$. Ist ebenso c eine Wurzel von $Q'=o$, so hat man $Q'=(x-c)Q''$, $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q''$.

Da die Grade der Quotienten successive bei jedem zur Evidenz gebrachten Binomialfactor niedriger werden, so sieht man leicht ein, daß man nach $(n-1)$ Divisionen auf einen Quotienten $(x-l)$ vom ersten Grad kommen wird. Unter der Voraussetzung, daß jede Gleichung eine Wurzel haben muß, wird sich also das Polynom $f(x)$ vom $n$ten Grade in n Binomialfaktoren vom ersten Grade zerlegen lassen; d. h.

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l).$$

Diese Gleichung ist identisch; die Ungleichheit der beiden Glieder verschwindet, sobald die angezeigten Rechnungen ausgeführt werden. Weil $f(x)$ Null wird, wenn man für x eine der Größen $a, b, c\ldots$ setzt, so hat jede Gleichung $f(x)=o$ des $n$ten Grades n Wurzeln, welche mit entgegengesetzten Zeichen genommen, die zweiten Glieder ihrer n Binomialfaktoren sind.

Anmerkung. Es ist wohl zu merken, daß, wenn man sagt, $a, b, c\ldots$ seien die Wurzeln einer Gleichung, dieß nicht anders heißt, als $a, b, c\ldots$ seien solche Zahlen, wovon jede für sich geeignet ist, die Gleichung auf Null zu bringen, wenn man in ihr jene Zahl statt x setzt; nicht aber als hätten die Gleichungen $x=a, x=b, x=c$ u. s. w. zugleich statt, weil sonst $a=b=c=\ldots$ sein müßte.

§. 30. Wir wollen jetzt darthun, daß $f(x)$ nicht noch auf eine andere Art in einfache Faktoren $(x-a')(x-b')(x-c')\ldots$

zerlegbar ist, wobei die Größen a', b', c'... alle oder mehrere unter ihnen von $a, b, c \ldots$ verschieden sind. Zu diesem Behuf werden wir zuvörderst zeigen, daß, wenn das Binom $x-h$ das Produkt zweier in Bezug auf x ganzen und rationalen Polynomen A und B genau theilt, wenigstens eins dieser Polynome durch $x-h$ ohne Rest theilbar ist. Wir nehmen an, daß, bei der Division von A und B durch $x-h$, man die Quotienten A' und B' und die numerischen Reste α und β erhalten habe, oder

$$A = A'(x-h)+\alpha, \quad B = B'(x-h)+\beta.$$

Indem nun das Produkt AB gebildet wird, zeigt sich, daß $x-h$ als gemeinschaftlicher Faktor sämmtlicher Glieder, mit Ausnahme von $\alpha\beta$, erscheint. Die letztere Größe ist aber eine Zahl, kann mithin nicht durch $x-h$ theilbar sein, insofern nicht einer der Reste Null wird; woraus die Richtigkeit unserer Aussage erhellet. Dieß vorausgeschickt, muß $(x-a)Q$, oder vielmehr Q durch $x-a'$ genau theilbar sein, weil $fx=(x-a)Q$, und der Annahme zufolge $f(x)$ durch $x-a'$ ohne Rest getheilt wird. Das nämliche gilt von Q' in $Q=(x-b)Q'$, u. s. f. bis zum letzten Faktor $(x-l)$ herab, der, wegen seiner Nichttheilbarkeit durch $x-a'$, zeigt, daß das Polynom $f(x)$ sich durch $x-a'$ nicht ohne Rest dividiren läßt. Wir sind demnach zu folgenden Resultaten gelangt:

1. Jedes Polynom $f(x)$ ist nur auf eine Art in n Binomialfaktoren vom ersten Grade zerlegbar; und jede Gleichung $f(x)=0$ läßt nur n Wurzeln zu.

2. Jeder Bruch $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, welcher für $x=a$ die Form $\frac{0}{0}$ erhält, hat in seinen beiden Gliedern $f(x)$, $\varphi(x)$ den gemeinschaftlichen Faktor $(x-a)$, der darin selbst auf irgend eine Potenz erhoben vorkommen kann. Der wahre Werth des Bruches wird dadurch gefunden, daß man zuvörderst die im Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Faktoren wegstreicht und hierauf $x=a$ setzt. Der gesuchte Bruch wird dann endlich, Null oder unendlich, je nachdem $x-a$ sich in beiden Gliedern auf der nämlichen Potenz vorfindet, oder $x-a$ mit einem höhern Exponenten im Zähler oder Nenner behaftet ist.

3. Wenn zwei Gleichungen $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ die nämliche Wurzel a besitzen, so haben sie $x-a$ zum gemeinschaftlichen Faktor. Die Gleichungen $2x^3-3x^2-17x-30=0$, $x^3-37x-84=0$ haben $x+3$ zum Faktor, der nach der Methode des gemeinschaftlichen Theilers

gefunden wird. Das Zusammenbestehen dieser beiden Gleichungen würde ungereimt sein, wenn sie keinen gemeinschaftlichen Faktor besäßen. Wäre jener Faktor vom zweiten Grade, so würden die Gleichungen zwei Wurzeln haben, welche der Aufgabe Genüge leisteten, u. s. w.

4. Man kann durch die Division den Grad einer Gleichung um eben so viele Einheiten verringern, als man Wurzeln kennt. Das Aufsuchen der Wurzeln fällt mit dem der Binomialfaktoren zusammen. Die Anzahl der Faktoren vom zweiten Grade der vorgelegten Gleichung wird durch $\frac{n(n-1)}{1.2}$ angegeben, weil man dieselben dadurch erhält, daß man die Faktoren vom ersten Grade zu je zwei combinirt; die Anzahl der Faktoren vom dritten Grade der vorgelegten Gleichung wird sein $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$; u. s. fort.

§. 31. Da man die Gleichung $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots + u = o$ als das Produkt aus einer Anzahl Faktoren $(x-a)(x-b)x-c) \ldots$ ansehen kann, so werden die im §. 6 der niedern Algebra bewiesenen Eigenschaften im gegenwärtigen Fall in folgender Art statt haben:

1. Der Coefficient p des zweiten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen genommen, ist die Summe aller Wurzeln $a, b, c, \ldots$

2. Der Coefficient q des dritten Gliedes ist die Summe der Produkte je zweier dieser Wurzeln.

3. Der Coefficient r, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, ist die Summe aller Produkte von je drei verschiedenen Wurzeln; u. s. w.

4. Das letzte Glied drückt das Produkt aller Wurzeln aus, wenn der Grad der Gleichung gerade ist, dagegen dieses Produkt mit entgegengesetztem Zeichen, wenn n ungerade ist.

Anmerkung. Man könnte leicht glauben, daß die hier angegebene Eigenschaft der Coefficienten einer Gleichung ein Mittel darbiete, die Wurzeln derselben zu bestimmen, indem man eben so viele Gleichungen hat, als unbekannte Wurzeln vorhanden sind. Allein man findet sehr bald, daß die aus der

Elimination entstandene Endgleichung, welche nur noch eine der unbekannten Wurzeln enthält, der vorgelegten Gleichung völlig ähnlich ist, so daß die Schwierigkeit irgend eine der Wurzeln zu finden genau die nämliche ist, als x zu bestimmen.

§. 82. Um die Wurzel x einer Gleichung (1) sämmtlich hmal größer zu machen, setze man $x = \frac{y}{h}$; woraus

$$\frac{ky^n}{h^n} + \frac{py^{n-1}}{h^{n-1}} + \frac{qy^{n-2}}{h^{n-2}} + \ldots + \frac{ty}{h} + u = 0, \text{ und}$$

$$ky^n + phy^{n-1} + qh^2y^{n-2} \ldots + th^{n-1}y + uh^n = 0.$$

Diese Rechnung läuft dahin aus, die aufeinander folgenden Glieder von f(x) bezüglich mit h^0, h^1, $h^2 \ldots h^n$ zu multipliciren. Es ist hier zu bemerken, daß, im Fall die vorgelegte Gleichung (1) keine gebrochenen Coefficienten hat, wovon sie jedoch stets mittelst der Reduction auf einen gemeinschaftlichen Nenner befreit werden kann, die transformirte Gleichung durch k theilbar ist und in $y^n + py^{n-1} + qky^{n-2} + \ldots + uk^{n-1} = 0$ übergeht, wenn man h=k setzt, d. h. $x = \frac{y}{k}$ macht. Um also die etwa vorhandenen Brüche aus einer Gleichung wegzuschaffen, bringt man sie auf einen gemeinschaftlichen Nenner und entfernt dann den Coefficienten k des ersten Gliedes, indem man y=kx setzt, eine Rechnung, welche offenbar darauf zurückkommt, die Coefficienten vom zweiten Gliede an gerechnet, bezüglich mit k^0, k^1, k^2, ... k^{n-1} zu multipliciren. Es sei z. B. die Gleichung $x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} = 0$. Durch Multiplication mit 12 hat man $12x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 9x - 42 = 0$. Man setze jetzt $x = \frac{1}{12}y$, d. h. man multiplicire die Coefficienten 10, 9 und 42 beziehungsweise mit 12, 12^2, 12^3; hierdurch kommt

$$y^4 - 8y^3 + 120y^2 - 1296y - 72576 = 0.$$

Um die Wurzeln einer Gleichung hmal kleiner zu machen, setze man x=hy, d. h. man dividire die successiven Coefficienten durch h^0, h^1, h^2,...h^n. Der vorige Calcul gab der Gleichung größere Coefficienten, während der zweite solche vermindert und zu diesem Zwecke auch benutzt wird. Im Fall sich die Divisionen nicht genau bewerkstelligen lassen, erhält man dabei gebrochene Coefficienten. Es sei die Gleichung $x^3 - 144x = 10368$; wird $x = 12y$ gesetzt, so findet man die einfachere Gleichung $y^3 - y = 6$.

§. 33. Sollen sämmtliche Wurzeln um eine und dieselbe Größe i kleiner werden, so setze man $x = i + y$. Dieser Werth in die gegebene Gleichung (1) substituirt, gibt die transformirte Gleichung

$$k(i+y)^n + p(i+y)^{n-1} + q(i+y)^{n-2} \ldots + t(i+y) + u = o.$$

Ohne uns bei der Entwickelung der Potenzen von $i+y$ aufzuhalten, ergibt sich aus dem bekannten Gesetze, welchem die Glieder der Newtonschen Formel unterworfen sind, daß das nach den steigenden Potenzen von y geordnete Polynom von der Form ist:

$$A + By + Cy^2 + Dy^3 \ldots + ky^n = o;$$

wobei $A = fi$, oder gleich dem vorgelegten Polynom, in welchem i statt x gesetzt worden. B wird von A abgeleitet, wenn man jedes Glied des letztern durch den Exponenten von i multiplicirt und dann den Exponenten um eine Einheit vermindert. Die auf solche Art hergeleiteten Funktionen heißen auch derivirte Funktionen und werden durch $f'(i)$ bezeichnet. Ganz auf die nämliche Weise findet man C, indem die Derivirte von B genommen und durch 2 dividirt wird; wonach $C = \frac{1}{2} f''i$. Eben so ist D der dritte Theil der Derivirten von C; wonach $D = \frac{1}{2.3} f''' i$, u. s. f.. Wir wissen also, wie wir die Coefficienten successiv von einander herleiten können. Auf diese Art haben wir:

$$fi + y.\, f'i + \frac{y^2}{2} f''i + \frac{y^3}{2.3} f'''i + \ldots\ldots + ky^n = o,$$

$$fi = ki^n + pi^{n-1} + qi^{n-2} + \ldots + ti + u,$$

$$f'i = nki^{n-1} + (n-1)pi^{n-2} + (n-2)qi^{n-3} + \ldots + t,$$

$$f''i = n(n-1)ki^{n-2} + (n-1)(n-2)pi^{n-3} + \ldots; \text{ u. s. w.}$$

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Gleichung $x^3 - 5x^2 + x + 7 = o$ nehmen, und darin $x = y + 2$ setzen. Man hat hier

$$fx = x^3 - 5x^2 + x + 7,\; f'x = 3x^2 - 10x + 1,\; f''x = 6x - 10,\; f'''x = 6.$$

Setzt man $x = 2$, so kommt $fi = -3$, $f'i = -7$, $\frac{1}{2} f''i = +1$; woraus

$$-3 - 7y + y^2 + y^3 = o.$$

Sollen im Gegentheil sämmtliche Wurzeln x um i vermehrt werden, so muß man $x = y - i$ setzen, d. h. hier oben i mit $-i$ vertauschen, oder die ungeraden Potenzen von i mit entgegengesetztem Zeichen nehmen.

§. 34. Das in §. 8. angeführte Verfahren gewährt beim Aufsuchen der Zahlen fi, $f'i$, $\frac{1}{2}f''i$.... einige Bequemlichkeit. Wir dividiren mithin fx durch $x-i$, dabei seien T der Quotient und t der numerische Rest; hierauf dividiren wir T durch $x-i$, wobei U den Quotienten und u den Rest darstellt; ferner seien V und v der Quotient und der Rest bei der Division von U durch $x-i$, u. s. f. Auf solche Art haben wir

$fx=T(x-i)+t$, $T=U(x-i)+u$, $U=V(x-i)+v$, u. s. w.

Durch successives Eliminiren von T, V,... entsteht

$$fx=t+u(x-i)+v(x-i)^2+\ldots+k(x-i)^n;$$

woraus erhellet, daß die Coefficienten der transformirten Gleichung, deren Unbekannte $y=x-i$ ist, die Reste t, u, v,..k unserer successiven Divisionen sind. Da dem oben erwähnten Verfahren gemäß sich diese Reste leicht bestimmen lassen, so erhält die Rechnung folgende Darstellung, wie in nachstehendem Beispiele zu ersehen ist, wo $y=x-3$ gesetzt wird:

Vorgelegte Gleichung.... $2x^4-7x^3-12x^2+4x+129=0$

Faktor 3	2	−1	−15	−41	+6
	2	+5	0	−41	
	2	+11	+33		
	2	+17			

Transformirte Gleichung.... $2y^4+17y^3+33y^2-41y+6=0$

Die erste Linie 2, −1, −15, −41 entsteht aus den Coefficienten des ersten Quotienten T, die zweite Linie aus den Coefficienten des Quotienten U, die dritte aus denen von V; u. s. f.

Jede Linie enthält ein Glied weniger als die vorhergehende. Das letzte Glied jeder Linie ist der Rest der Division durch $x-3$, mithin $t=6$, $u=-41$, $v=33$...; es sind dieß folglich die verlangten Coefficienten in umgekehrter Ordnung. Oefters ist $i=1$, d. h. man sucht die transformirte Gleichung für den Fall, daß $x-1=y$; man hat alsdann bloße Additionen zu verrichten.

Zwei Beispiele hierüber:

$x^3-12x^2+41x-29=0$	$x^4-6x^3+7x^2-7x+7=0$
1 −11 +30 +1	1 −5 +2 −5 +2
1 −10 +20	1 −4 −2 −7
1 −9	1 −3 −5
	1 −2
$y^3-9y^2+20y+1=0$	$y^4-2y^3-5y^2-7y+2=0.$

Anmerkung. Im Fall i ein Bruch $\frac{h}{l}$ ist, gestaltet sich die Rechnung einfacher auf folgende Weise. Man setze

$$x = \frac{x'}{l},\ x' = x'' + h,\ x'' = ly.$$

Durch die Elimination von x' und x'' findet man $x = y + \frac{h}{l}$. Um also die transformirte Gleichung in y zu erhalten, verrichtet man successiv die drei auf jene drei Gleichungen Bezug habenden Rechnungen: die erste besteht darin, daß man die Wurzel $l$mal größer macht; die zweite zeigt an, daß man die transformirte Gleichung in $x' - h$ daraus herleiten soll; die dritte endlich verlangt, daß die Wurzeln $l$mal kleiner werden. Hiernach verfährt man auf solche Art, wie folgendes Beispiel lehrt, wo die transformirte Gleichung in $x - \frac{2}{3}$ für die Gleichung $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 2 = 0$ gesucht wird.

Coefficienten	2— 5+ 7— 4+ 2
Potenzen des Nenners	1 3 9 27 81
Produkte der übereinander stehenden Zahlen	2—15+63—108+162
Faktor 2	2—11+41— 26+110 (α)
	2— 7+27+ 28
	2— 3+21
Coefficienten der transformirten Gleichung in $x' - 2$ . . .	2+ 1+21+ 28+110
Transformirte Gleichung in $x - \frac{2}{3}$	$2y^4 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{21}{9}y^2 + \frac{28}{27}y + \frac{110}{81} = 0$.

Wir wollen noch bemerken, daß die Linie (α) durch die verschiedenen Potenzen von 3 dividirt, den Quotienten der vorgelegten Gleichung dividirt durch $x - \frac{2}{3}$, welcher ist: $2x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{41}{9}x - \frac{26}{27}$, so wie den Rest $+ \frac{110}{81}$ liefert, der zugleich das Resultat der Substitution von $\frac{2}{3}$ anstatt x in der vorgelegten Gleichung ist. Diese Rechnungsart wird vorzugsweise angewendet, wenn $l = 10$ oder eine Potenz davon ist. Um die transformirte Gleichung in $y = x - 0{,}2$ für die obige Gleichung zu finden, hat man

Produkte der Coefficienten durch die Potenzen von 10 . . . $2-50+700-4000+20000$

Faktor 2 . . . . $\left\{\begin{array}{l} 2-46+608-2784+14432 \\ 2-42+524-1736 \\ 2-38+448 \end{array}\right.$

Coefficienten der transformirten Gleichung in $x'-2$ . . . $2-34+448-1736+14432$

Transf. Gl. in $x'-0{,}2 \ldots 2y^4-3{,}4y^3+4{,}48y^2-1{,}736y+1{,}4432=0.$

§. 35. Die Substitution von $y+i$ statt x in der Gleichung (1) kann auch dazu gebraucht werden, das zweite Glied einer Gleichung wegzuschaffen, insofern man die willkührliche Größe i auf gehörige Weise bestimmt. Man hat, wenn das Resultat nach den fallenden Potenzen von y geordnet wird:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} hy^n + nik & y^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)i^2k & y^{n-2} \ldots\ldots + ki^n \\ +p & \quad + n(n-1)ip & \ldots\ldots\ldots + pi^{n-1} \\ & \quad +q & \ldots\ldots\ldots + qi^{n-2} \\ & & \quad \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Damit das zweite Glied verschwinde, setze man $nik+p=0$; woraus

$$i = -\frac{p}{nk},\quad x = y - \frac{p}{nk}.$$

Um also das zweite Glied aus einer Gleichung hinwegzuschaffen, muß man für x die neue Unbekannte y weniger dem Coefficienten des zweiten Gliedes, dividirt durch das Produkt des Coefficienten des ersten Gliedes aus dem Exponenten desselben, setzen. Es versteht sich von selbst, daß hier p und k ihre Zeichen beibehalten; das Zeichen $-$ vor dem Bruche wird demnach in $+$ verwandelt werden, wenn jene Zeichen verschieden sind. Die Summe der Wurzeln von y ist alsdann Null: man hat mithin sämmtliche Wurzeln um die nämliche Größe vermehrt in der Art, daß die Summe ihrer negativen Theile so groß wie die der positiven geworden ist.

Es sei z. B. die Gleichung $x^3-6x^2+4x-7=0$. Die Regel gibt $x=y+2$; und wenn man diesen Werth substituirt, so erhält man für die gesuchte Gleichung $y^3-8y-15=0$.

Es ergibt sich leicht, daß das zweite Glied von fx und der Coefficient von k zugleich hinweggeschafft wird, wenn man $x=\frac{y-p}{nk}$ setzt.

Um ebenso das dritte Glied der Gleichung wegzuschaffen, müßte man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)i^2k+(n-1)ip+q=o$$

aufstellen. Im Allgemeinen führt diese Relation auf irrationale oder imaginäre Werthe von i, welche sich nicht mit Nutzen brauchen lassen.

Man würde das letzte Glied der Gleichung wegschaffen, wenn man $ki^n+pi^{n-1}+\ldots+u=o$ setzte; d. h. man müßte alsdann die vorgelegte Gleichung selbst auflösen. Die transformirte Gleichung hätte in der That eine Wurzel gleich Null, woraus $x=i$.

§. 36. Zwei noch andere gebräuchliche Transformationen sind folgende:

1. Man setze $x=-y$; durch diese Umformung werden bloß die Zeichen der Wurzel geändert, d. h. die positiven Werthe von y werden mit den negativen von x einerlei sein, und umgekehrt.

2. Man setze $x=\frac{1}{y}$. Die Werthe von y sind die reciproken von x, der größte der erstern wird dem kleinsten von den zweiten entsprechen. Da für die Faktoren $x, x^2, x^3 \ldots$ die Divisoren $y, y^2, y^3 \ldots$ eingeführt sind, so werden an die Stelle jener Faktoren die Größen y^{n-1}, $y^{n-2}\ldots$ gesetzt, insofern das Ganze mit y^n multiplicirt wird. Diese Rechnung kommt also darauf zurück, neben die Coefficienten die Potenzen von y in umgekehrter Ordnung von derjenigen, in welcher die von x stehen, anzuschreiben; was sofort gibt:

$$\frac{k}{y^n}+\frac{p}{y^{n-1}}+\frac{q}{y^{n-2}}+\ldots+\frac{t}{y}+u=o, \text{ woraus}$$

$$uy^n+ty^{n-1}+\ldots+qy^2+py+k=o.$$

Will man überdieß den Coefficienten u des ersten Gliedes hinwegschaffen, so wird man $y=\frac{y'}{u}$, d. h. $x=\frac{u}{y'}$, setzen; durch welche Umformung beide Bedingungen zugleich erfüllt werden.

§. 37. Ueberhaupt heißt eine Gleichung $f(x)=o$ transformiren, daraus eine andere $F(y)=o$ herleiten, deren Wurzeln y zu denen von x in einer zwischen x und y gegebenen Relation stehen, $\varphi(x, y)=o$. Es handelt sich daher nur darum, aus dieser Gleichung mit Hülfe der vorgelegten x zu eliminiren, eine Aufgabe, mit welcher wir uns bald beschäftigen werden.

Von den Grenzen der Wurzeln.

§. 38. Eine obere Grenze der Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ heisst eine beliebige Größe, welche dieselben sämmtlich übertrifft. Diese Grenze würde Null sein, wenn kein Glied von fx negativ wäre, weil unter solcher Voraussetzung keine positive Wurzel vorhanden ist. Jede Zahl l, welche statt x in fx substituirt, ein positives Resultat gibt (das erste Glied kx^n allemal mit dem Zeichen $+$ versehen gedacht), ist eine obere Grenze, insofern jede größere Zahl als l sich in dem nämlichen Fall befindet, weil alsdann jeder größere Werth als l der Gleichung nicht Genüge leisten kann. Wir wissen, daß

$$\frac{x^i-1}{x-1}=x^{i-1}+x^{i-2}+x^{i-3}+\ldots x+1; \text{ woraus}$$

$$x^i=(x-1)x^{i-1}+(x-1)x^{i-2}+(x-1)x^{i-3}+\ldots+(x-1)+1.$$

Wenden wir diese Formel auf jedes positive Glied von $fx=kx^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots+u$ an, so entsteht:

$k(x-1)x^{n-1}+k$	$(x-1)x^{n-2}+k$	$(x-1)x^{n-3}\ldots+k$	$(x-1)+k$
$+p$	$+p$	$+p$	$+p$
	$+q$	$+q$	$+q$
		u. s. w.	u. s w.

Wir behalten die negativen Glieder unter ihrer ursprünglichen Form bei und setzen sie in diejenigen Columnen, wo x mit den nämlichen Exponenten behaftet ist. Ein Glied $-sx^h$ wird hiernach in die Columne $(x-1)x^h$ zu stehen kommen und der Coefficient daselbst $(k+p+q..)(x-1)-s$ sein: der Faktor von $(x-1)$ stellt die Summe der positiven Coefficienten, welche dem s vorhergehen, dar. Soll nun x einen Werth erhalten, welcher dieses Glied negativ macht, so muß nothwendigerweise $(k+p+q\ldots)(x-1)<s$ sein. Dieses negative Zeichen wird daher nicht mehr statt haben, wenn man

$$x \overset{=}{>} 1+\frac{s}{k+p+q\ldots} \quad (M)$$

setzt. Thut man das Nämliche mit jeder Columne, in der sich ein negativer Coefficient vorfindet, und nimmt dann unter den auf diese Art gebildeten Ausdrücken (M) den größten l davon; so ist klar, daß $x=$ oder $>l$ das ganze Polynom positiv macht: l ist folglich eine obere Grenze der Wurzeln von $fx=0$. Man dividire dem-

nach jeden negativen Coefficienten von fx durch die Summe aller demselben vorhergehenden positiven; der größte von den auf solche Weise erhaltenen Brüchen, um die Einheit vermehrt, wird die obere Grenze der Wurzeln der Gleichung $fx=0$ sein.

Es sei die Gleichung $4x^5-8x^4+23x^3+105x^2-80x+11=0$; man dividirt 8 durch 4, hierauf 80 durch $4+23+105$: der erste von diesen Quotienten 2 ist der größte, mithin sind sämmtliche Wurzeln $<2+1$ oder 3. Läßt man in dem Nenner von (M) die Größen p, q, ... weg, so reducirt sich dieser Ausdruck auf $x=$ oder $>1+\frac{s}{k}$. Da man berechtigt ist, diesen Bruch größer zu machen; so sieht man, daß der größte negative Coefficient einer Gleichung, mit dem Zeichen + genommen, und um 1 vermehrt, eine obere Grenze der Wurzeln abgibt, wenn man die Gleichung durch den Coefficienten ihres ersten Gliedes dividirt hat. Dieser Ausdruck ist einfacher und wird auf den bloßen Anblick der Gleichung gebildet; deßwegen erhält er auch jedesmal den Vorzug, wenn es nicht gerade Zweck ist, eine engere Grenze zu wählen. Die folgenden Lehrsätze bieten eine vortheilhaftere Grenze dar.

§. 39. Wir wollen nur das erste Glied und die negativen Glieder von fx in Betrachtung ziehen, wonach stehen mag

$$x^n - Fx^{n-f} - Gx^{n-g} - Hx^{n-h} \ldots \quad (1)$$

Es sei α eine Zahl, welche statt x gesetzt, diesen Ausdruck positiv macht, oder

$$\alpha^n > F\alpha^{n-f} + G\alpha^{n-g} + H\alpha^{n-h} \ldots \quad (2), \text{ oder auch}$$

$$1 > \frac{F}{\alpha^f} + \frac{G}{\alpha^g} + \frac{H}{\alpha^h} \ldots,$$

wenn man das Ganze durch α^n dividirt. Es ist klar, daß jede Zahl $>\alpha$ die nämliche Bedingung erfüllt. Da nun weder α, noch größere Zahlen als α das Polynom fx auf Null bringen können, indem α^n außerdem durch den positiven Theil von fx vermehrt wird; so sieht man, daß jede Zahl, welche das erste Glied von fx größer als die Summe der negativen Glieder macht, eine obere Grenze ist.

Wir wollen jetzt aus der Relation (2) einen Werth für α suchen.

Unter den Zahlen $\sqrt[f]{F}, \sqrt[g]{G}, \sqrt[h]{H}, \ldots.$ gibt es eine, welche die andere übertrifft; wir nehmen an, daß dieß die zweite sei, und stellen sie durch i dar. Hiernach

$$\sqrt[g]{G} = i > \sqrt[f]{F} \text{ und } \sqrt[h]{H} \ldots, \text{ woraus } G = i^g, F < i^f, H < i^h \ldots.$$

Setzen wir in (2) i^g für G, i^f für F, i^h für H...., so erlangt der Theil rechts von dem Ungleichheitszeichen einen größern Werth. Ist nun α^n größer als diese letztere Summe, so wird um so mehr der Bedingung (2) Genüge geschehen. Es handelt sich also darum,

$$x^n > i^f x^{n-f} + i^g x^{n-g} + i^h x^{n-h} \ldots.$$

zu machen. Man kann hier selbst diejenigen Glieder hinzufügen, welche das Polynom ergänzen, was sofort gibt

$$x^n > ix^{n-1} + i^2x^{n-2} + i^3x^{n-3} \ldots. + i^n, \text{ nämlich}$$

$$x^n > i\,\frac{x^n - i^n}{x - i}, \text{ oder } \frac{ix^n}{x - i} - \frac{i^{n+1}}{x - i}.$$

Unter der Voraussetzung daß $x > i$, ist das letztere Glied negativ; läßt man daher dasselbe weg, so wird der zweite Theil größer. Hierdurch erhält man

$$x^n \geqq \frac{ix^n}{x - i}, \text{ oder } x - i \geqq i, x \geqq 2i \text{ oder } 2\sqrt[g]{G}.$$

Das Doppelte der größten Zahl, welche man findet, indem man aus jedem negativen Coefficienten eine Wurzel zieht, deren Grad durch die Anzahl der ihm vorhergehenden Glieder angedeutet wird, ist folglich eine obere Grenze der Wurzeln.

Es sei die Gleichung $x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 3x - 11 = 0$. Unser erster Lehrsatz gibt 21 als Grenze. Nimmt man aber $\sqrt[1]{2}, \sqrt[2]{20}, \sqrt[4]{11}$, so ist die zweite dieser Zahlen, nahe an 5, die größte; mithin ist 10 die obere Grenze.

Anmerkung. Einige Schriftsteller sagen, daß, um eine obere Grenze der Wurzeln einer Gleichung zu erhalten, man für x eine Zahl l finden müsse, welche das erste Glied größer als die Summe aller übrigen mache; was nicht richtig ist, weil es heißen muß, größer als die Summe aller negativen Glieder. Nachstehendes Beispiel wird die Richtigkeit dieser Behauptung

zeigen. Die Zahlen 3 und 4 sind Wurzeln der Gleichung $x^4 + x^3 - 30x^2 - 2x + 168 = 0$. Macht man indessen $x = 2, 3$, was keine obere Grenze ist, so sieht man, daß x^4 die Summe der andern Glieder übertrifft, nämlich 27, 9841 > 180, 167 — 163, 3.

§. 40. Setzen wir $x = l + y$ in fx, wo l eine beliebige Zahl bedeutet, so entsteht, $fl + yf'l + \frac{1}{2}y^2 f''l + \ldots + ky^n = 0$.

Wählt man nun für l eine solche Zahl, daß fl, $f'l$, $f''l$, ... sämmtlich positiv sind, so wird keine positive Zahl für y genommen, der letztern Gleichung Genüge thun, weil die Coefficienten dieser transformirten Gleichung lauter positive Zeichen haben. Die reellen Werthe von x werden folglich den negativen Werthen von $y = x - l$ entsprechen; daher $l > x$. Jede Zahl also, welche anstatt x in fx und den derivirten Funktionen substituirt, positive Resultate gibt, ist eine obere Grenze von x.

In unserm letzten Beispiele sind die derivirten Funktionen

$$4x^3 - 6x^2 - 40x + 3, \quad 12x^2 - 12x - 40, \quad 24x - 12.$$

Da $x = 6$ diese sämmtlichen Polynome positiv macht, so ist $x < 6$, eine engere Grenze als die oben gefundene.

Wenn man erwägt, daß durch Vertauschung von y mit $-y$ die Wurzeln der transformirten Gleichung ihre Zeichen ändern, mithin sämtlich positiv werden, die vorher negativ waren; so kann man eine Gleichung $f(x) = 0$ in eine andere $F(y) = 0$, in welcher keine negative Wurzel vorkommt, dadurch umformen, daß man $x = l - y$ setzt, wobei l eine obere Grenze der Wurzeln x ist.

Anmerkung. Außer den drei oben angegebenen Verfahren, die obere Grenze der Wurzeln zu bestimmen, kann auch folgende Methode zu ähnlichem Zwecke benutzt werden.

Es sei s der größte negative Coefficient, r die Anzahl der Glieder, die dem ersten negativen Coefficienten vorhergehen. $f(l)$ wird positiv, wenn $Kl^n > Rl^{n-r} + R'l^{n-r-1} + \ldots Tl + U$, l behält seine bisherige Bedeutung bei. Der Ausdruck zur Rechten des Ungleichheitszeichens ist aber offenbar kleiner als

$$s(l^{n-r} + l^{n-r-1} + \ldots + 1) = s\,\frac{(l^{n-r+1} - 1)}{l - 1}.$$

Macht man daher $l^n K > s\,\frac{(l^{n-r+1} - 1)}{l - 1}$, so wird $f(l)$

positiv. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn $k(l-1)l^{r-1} \overset{=}{>} s$ genommen wird; was wieder statt hat, wenn $l \overset{=}{>} 1+\sqrt[r]{\frac{s}{k}}$. Ist ferner s' der kleinste Coefficient von dem dem ersten negativen Gliede vorhergehenden Coefficienten, so ist die Summe dieser r Glieder

$$> s'(l^n + l^{n-1} + \ldots + l^{n-r+1}), \text{ d. h. } > s' l^{n-r+1} \frac{(l^r-1)}{l-1}.$$

Macht man daher diesen Ausdruck größer als den vorhergehenden Ausdruck $s\frac{(l^{n-r+1}-1)}{l-1}$, so ist der hierdurch bedingte Werth von l eine obere Grenze. Man findet $l \overset{=}{>} \sqrt[r]{\left(1+\frac{s}{s'}\right)}$.

§. 41. Vertauschen wir x mit $-x$ in $f(x)$, so werden die positiven Wurzeln in negative umgewandelt und umgekehrt, während ihre numerischen Werthe dabei ungeändert bleiben. Suchen wir daher nach dieser Veränderung die obere Grenze l', so liegen die negativen Wurzeln zwischen o und $-l'$, und die positiven zwischen o und l. Auf diese Art finden wir, daß in unserm letzten Beispiele sämmtliche Wurzeln zwischen -4 und $+6$ enthalten sind.

§. 42. Wird $x=\frac{1}{z}$ in fx gesetzt, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln die reciproken der vorgelegten sind. Sucht man nun die obere Grenze h der positiven Wurzeln von z, so ist $\frac{1}{h}$ kleiner als der kleinste positive Werth von x. Es sei s der größte Coefficient von denjenigen, die ein mit dem Zeichen der letzten Gleichung $kx^n+px^{n-1}+\ldots+u=o$ entgegengesetztes Zeichen haben. Da nun in der transformirten Gleichung $uz^n+\ldots+pz+k=o$, insofern die obere Grenze genommen wird, $z<1+\frac{s}{u}$ ist; so hat man $x>\frac{u}{u+s}$. Zwischen dieser letzten Zahl und l sind also die positiven Wurzeln enthalten. Uebrigens lassen sich nach dem oben Gesagten, engere Grenzen finden. Dasselbe gilt auch für die negativen Wurzeln.

§. 43. Indem wir bloß das erste Glied und die negativen Glieder

von fx berücksichtigen, haben wir

$$kx^n - Fx^{n-f} - Gx^{n-g} \ldots = x^n \left(k - \frac{F}{x^f} - \frac{G}{x^g} \ldots\right).$$

Da wir nun einen Werth l für x kennen, der ein positives Resultat gibt und mit jeder größern Zahl als l es dieselbe Bewandtniß hat, überdieß die positiven Glieder von fx die Größe kx^n noch vermehren; so erhellet, daß in jedem ganzen, rationalen, nach den fallenden Potenzen von x geordneten Polynom fx durch immer zunehmende Werthe von x man bald zu einem solchen gelangen werde, welcher ein positives Resultat liefert, und über welchen hinaus die Resultate positiv und fortwährend im Steigen begriffen sind. Wenn das erste Glied kx^n negativ ist, so findet man, bei der Vergleichung desselben mit den positiven Gliedern, auf ähnliche Art zunehmende und negative Resultate. Ist endlich das Polynom nach steigenden Potenzen von x geordnet, wie $fx = u + tx + \ldots + px^{n-1} + kx^n$, so hat man, wenn $x = \frac{1}{z}$ gesetzt wird, $\frac{1}{z^n}(uz^n + \ldots + k)$. Der Werth von $z = l$, welcher dem Resultat das Zeichen von u gibt, entspricht dem Werthe $x = \frac{1}{l}$, von dem Aehnliches in Bezug auf fx gilt. **Es lassen sich also für jedes nach steigenden sowohl als fallenden Potenzen von x geordnetes Polynom fx Zahlen für x finden, durch welche dasselbe numerische Werthe erlangt, deren Vorzeichen mit dem des Anfangsgliedes des Polynoms übereinstimmt.**

§. 44. **Man kann jederzeit eine Reihe zunehmender hinlänglich nahe aneinander liegender Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ für x finden, damit die Werthe, welche das Polynom fx dadurch erhält, so nahe aneinander kommen, als man nur immer will.** Wir nehmen zu diesem Behuf zunächst an, daß das Polynom fx nur positive Glieder enthalte, und machen $x = \alpha$ und $= \alpha + i$. Die Resultate sind $f\alpha$ und $f\alpha + if'\alpha + \frac{1}{2}f''\alpha + \ldots$, deren Differenz $i(f'\alpha + \frac{1}{2}if''\alpha + \ldots)$ ist. Es handelt sich jetzt darum, dem i einen solchen Werth beizulegen, daß diese Differenz kleiner als jede angebliche Zahl h werde. Hier ist alles positiv, und i sehr klein und weniger als 1; machen wir daher $i = 1$ innerhalb der Parenthese, so wird die ver-

langte Bedingung erfüllt: man muß also $i \overset{=}{<} \frac{h}{f'\alpha + \frac{1}{2}f''\alpha..}$ nehmen. Setzt man hierauf $x = (\alpha + i) + i'$ und verfährt ähnlicherweise, so wird man zu einem dritten Resultat gelangen, welches von dem zweiten um weniger als h verschieden ist; u. s. f. Im Fall das Polynom auch negative Glieder enthält, wendet man das eben Gesagte auf die Gesammtheit der positiven Glieder an. Da nun die abzuziehenden Glieder die Größe der Resultate noch vermindern, so werden diese um so mehr um weniger als h von einander verschieden sein. Ueberträfe dagegen die Summe der negativen Glieder die der positiven, so würde auf die erstern die hier oben angeführte Schlußweise ihre Anwendung finden. Alles dieß zusammengenommen, zeigt, daß, wenn man x allmälig wachsen läßt, die Werthe von fx continuirlich (stetig) sind.

Von den commensurabeln Wurzeln.

§. 45. Es sei die vorgelegte Gleichung

$$fx = kx_n + px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots + tx + u = o\ (1).$$

Dieselbe kann, wenn ihre sämmtlichen Coefficienten ganze Zahlen sind und $k=1$ ist, keine durch einen Bruch genau ausgedrückten Wurzeln haben. Denn es sei $x = \frac{a}{b}$, wo $\frac{a}{b}$ einen solchen Bruch darstellt. Durch Substitution dieses Werthes von x in fx entsteht.

$$\frac{a^n}{b^n} + \frac{pa^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots \frac{ta}{b} + u = o,$$

oder, wenn man durchaus mit b^n multiplicirt,

$$a^n + b(pa^{n-1} + qba^{n-2} + \ldots + u\,b^{n-1}) = o.$$

Der zweite Theil ist durch b theilbar, es müßte daher auch a^n es sein, was nicht möglich ist, weil a und b keine gemeinschaftlichen Theiler haben. Setzt man mithin $y = kx$ und befreit so das erste Glied der Gleichung (1) von seinem Coefficienten k (§. 35.), ohne daß die übrigen Coefficienten aufhören ganzzahlig zu sein; so wird y keine Brüche zu Wurzeln haben. Die Werthe von x stellen sich dagegen als ganze oder gebrochene Zahlen dar, je nachdem die ganzen Wurzeln von y Vielfache von k oder keine solche sind. Das Auf-

suchen der gebrochenen Wurzeln von x ist folglich auf das der ganzen Wurzeln der transformirten Gleichung in y zurückgeführt. Man kann die Gleichung $fx = o$, sobald ihre Wurzeln $\alpha, \beta \dots$ gefunden sind, ohne weiters, in ihre Binomialfaktoren $k(x-\alpha)(x-\beta) \dots$ zerlegen.

§. 46. Nach §. 28 wird der Quotient der Gleichung (1) dividirt mit $x-a$ durch

$$kx^{n-1} + p'x^{n-2} + q'x^{n-3} + \dots + r'x^2 + s' + t'$$

dargestellt, wobei man hat: $ka + p = p'$, $ap' + q = q'$, ... $ar' + s = s'$, $as' + t = t'$ und Rest $R = at' + u$. Hieraus zieht man

$$-k = \frac{p-p'}{a}, \quad -p' = \frac{q-q'}{a}, \quad \dots\dots$$

$$-r' = \frac{s-s'}{a}, \quad -s' = \frac{t-t'}{a}, \quad -t' = \frac{u-R}{a}.$$

Anstatt unsere Gleichungen, wie früher geschehen, zur successiven Aufsuchung von $k, p', q', \dots t'$ zu benutzen, kann man in umgekehrter Ordnung zu Werke gehen, und $t', s', \dots p', k$ mit Hülfe dieser letztern Formeln berechnen. Da man jedoch zu diesem Behuf den Rest R kennen muß, so eignet sich dieses Verfahren nur für den Fall, in welchem a eine Wurzel ist, weil man alsdann $R = o$ hat, insbesondere aber, wenn a so wie die Coefficienten $k, p, q, \dots u$ der vorgelegten Gleichung ganze Zahlen sind. Aus der Division von fx durch $x-a$ ergibt sich von selbst, daß $p', q', t' \dots$ ebenfalls ganze Zahlen sind. Hieraus folgt unmittelbar:

1. a dividirt genau u; die ganzen Werthe von x können daher nur unter den Theilern des letzten Gliedes u gesucht werden.

2. a dividirt ohne Rest $t-t'$, $s-s'$, ... endlich $p-p'$, d. h. jeden Coefficienten der vorgelegten Gleichung, vermehrt um den Coefficienten, welcher bei der vorhergehenden Division gefunden wurde.

3. Diese Quotienten sind, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, die successiven Coefficienten des Polynoms fx dividirt durch $x-a$; der letzte gedachter Quotienten ist $-k$.

4. Leistet irgend eine Zahl a den eben vorgetragenen Bedingungen Genüge, so ist diese Zahl a eine Wurzel.

Denn sucht man nach dem im §. 28 angezeigten Verfahren den Quotienten von fx dividirt durch $x-a$, so erhält man die obigen Zahlen p', q' ... t' wieder und gelangt zum Rest Null.

§. 47. Die Methode, um die ganzen Wurzeln von $fx=0$ zu finden, ist hiernach folgende. Man nimmt alle Theiler des letzten Gliedes u sowohl mit dem Zeichen $+$ als mit dem Zeichen $-$, und die Quotienten dieser Divisionen; alsdann unterwirft man gedachte Quotienten den durch die obigen Gleichungen ausgesprochenen Bedingungen. Führt dabei einer der zu prüfenden Theiler auf keine ganzen Quotienten, so wird derselbe als unbrauchbar weggelassen, weil er keine Wurzel sein kann. Der versuchte Theiler ist in dem Fall eine Wurzel der Gleichung, in welchem $-k$ als letzter ganzzahliger Quotient gefunden wird. Die Reihe der auf diese Art erhaltenen ganzen, numerischen Quotienten, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, gibt die Coefficienten t', s', ... p', k des algebraischen Quotienten von fx, dividirt durch $x-a$.

Da ± 1 als Divisor von u genommen jedesmahl ganzzahlige Coefficienten liefert, so erkennt man erst beim letzten Gliede, ob ± 1 eine Wurzel ist. Es ist daher kürzer, den Divisor ± 1 geradezu durch Substitution zu versuchen.

Es sei z. B. die Gleichung $2x^5+3x^4-31x^3+3x^2-43x+210=0$. Da $210=2.3.5.7$, so findet man als Theiler des letzten Gliedes 210 die Zahlen $\pm$ (1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14 ....). Man erkennt zuvörderst, daß die Zahlen ± 1, desgleichen die Faktoren, welche außer den Grenzen -8 und $+7$ der Wurzeln liegen, der Gleichung nicht genügen. Die Rechnung läßt sich unter nachstehende Form anordnen, wo die zu beseitigenden Theiler mit dem Zeichen „ versehen sind, und man unterlassen hat, die Summen und Differenzen, welche die Dividenden geben, hinzusetzen.

$a=$	2	3	5	6	-2	-3	-5	-6	-7
$-t'=$	105	70	42	35	-105	-70	-42	-35	-30
$(-43-t'):a=-s'=$	31	9	„	„	$+74$	„	$+17$	$+13$	„
$(+3-s'):a=-q'=$	17	4			„		-4	„	„
$(-31-q'):a=-p'=$	-7	-9					$+7$		
$(+3-p'):a=-k=$	-2	-2					-2		

Die vorgelegte Gleichung hat daher nur die drei ganzen Wurzeln $+2$, $+3$ und -5. Die Coefficienten des Quotienten der Division durch $x-2$ sind die unter dem Divisor 2 stehenden Zahlen, wonach gedachter Quotient ist $2x^4+7x^3-17x^2-31x-105$. Dividirt man hierauf durch $x-3$ und dann noch durch $x+5$, so gelangt man zu dem Quotienten $2x^2+3x+7$. Diese Gleichung ist demnach das Produkt von den vier Faktoren $x-2$, $x-3$, $x+5$ und $2x^2+3x+7$.

Zwei andere Beispiele sind:

$x^3+3x^2-8x+10=0$

$a=$	2	−2	−5	−10
$-t'=$	5	−5	−2	−1
$-s'=$	»	»	2	»
$-k=$			−1	

$8x^3-7x^2-63x+36=0$

9	6	4	2	2	−2	−3	−4
4	6	9	12	18	−18	−12	−9
»	»	»	−17	»	»	+25	18
			−8			»	»

Für die erste Gleichung gibt der Faktor $x+5$ den Quotienten x^2-2x+2.

Für die zweite Gleichung versucht man bloß die Divisoren von 36, welche zwischen den Grenzen -5 und $+10$ liegen. Man findet den Faktor $x-3$ und den Quotienten $8x^2+17x-12$.

Anmerkung. Wenn ein oder mehrere Glieder fehlen, so ergänzen wir solche, indem wir ihnen die Coefficienten Null beilegen, und verrichten die Rechnung wie gewöhnlich. Es diene die Gleichung $x^3-17x-4=0$ als Beispiel.

Nachdem man sich überzeugt hat, daß die Werthe $+1$ und -1 dieser Gleichung nicht genügen, bildet man nach unserer Regel folgende Tabelle:

$a=$	+2	+4	−2	−4
$t'=$	−2	−1	2	1
$t'-17=$	−19	−18	−15	−16
$s=$	»	»	»	4
$a'+0=$	»	»	»	4
$r'=$	»	»	»	−1
$r'+s=$	»	»	»	0

Man findet also nur die einzige rationale Wurzel -4. Dividirt man durch den Faktor $x+4$, so entsteht die qua-

dratische Gleichung $x^2-4x-1=0$, welche die beiden Wurzeln $2\pm\sqrt{5}$ liefert.

§. 48. Nach der oben vorgetragenen Methode lassen sich folgende Aufgaben lösen.

I. Man soll eine mit drei Ziffern x, y, z geschriebene Zahl N nach folgenden Angaben suchen. Das Produkt der Ziffern beträgt 54; die mittlere Ziffer ist der sechste Theil von der Summe der beiden andern; zieht man von der gesuchten Zahl 594 ab, so bekommt man einen Rest, welcher die nämlichen Ziffern wie unsere Zahl, aber in umgekehrter Ordnung enthält.

Da $N=100x+10y+z$, so hat man

$$xyz=54,\ 6y=x+z,\ 100z+10y+x=N-594,$$

welche letztere Gleichung sich auf $x-z=6$ reducirt. Durch Elimination von y aus den beiden ersten entsteht, $x^2z+xz^2=324$; hieraus erfolgt, wenn man für x seinen Werth $z+6$ einführt: $z^3+9z^2+18z=162$. Nun sind x, y, x ganze Zahlen, und unsere Regel gibt sofort $z=3$, worauf $x=9$, $y=2$ und $N=923$.

II. Man soll die Basis x desjenigen Zahlensystems finden, in welchem die Zahl 538 durch die Ziffern (4123) ausgedrückt wird. Man muß zu diesem Behufe die ganze und positive Wurzel der Gleichung $4x^3+1x^2+2x+3=538$ suchen; die Wurzel x ist $=5$. Man vergleiche hiermit die Note 1 zur Arithmetik.

Im Allgemeinen wird, wenn die Zahl A durch die n Ziffern $a, b, c \ldots i$ ausgedrückt ist, die Basis x des Zahlensystems durch die Gleichung
$ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3} \ldots .=A-i$ bestimmt, eine Gleichung, die, wie wir sehen werden, nur eine positive Wurzel zuläßt, welche ganzzahlig und $>a, b, c \ldots i$ sein muß.

III. Es soll aus der Gleichung $8\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-5x^2+3x+3}=125$ der Werth von x ermittelt werden. Wegen $\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$ ist $(x^3-5x^2+3x+3)\log\frac{2}{5}=3\log\frac{5}{2}$, oder $x^3-5x^2+3x+3=-3$; hieraus findet man $x=2$ und $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{21})$.

IV. Für die Gleichung $6x^4 - 19x^3 + 28x^2 - 18x + 4 = 0$ macht man $x = \frac{1}{6}y$, was uns gibt

$$y^4 - 19y^3 + 168y^2 - 648y + 864 = o.$$

Es sind hier keine negativen Wurzeln vorhanden und die positiven sind < 20. Da $864 = 2^5 . 3^3$, so muß man die Divisoren 2, 3, 4, 6 ... 18 versuchen. Man findet $y = 3$ und 4, und $y^2 - 12y + 72 = o$; endlich $x = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ und $1 \pm \sqrt{-1}$. Man findet auf ähnliche Weise, daß

$$6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - x = x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1).$$

§. 49. Hat das letzte Glied u viele Faktoren zwischen den Grenzen der Wurzeln, so ziehen sich dergleichen Rechnungen in die Länge. Eine Methode, dieselben abzukürzen, besteht in Folgendem:

Wenn a eine ganze Wurzel der Gleichung $fx = o$ ist, welche, wie der Quotient von fx dividirt durch $x - a$, nur ganze Coefficienten besitzt; so hat man $Q = \frac{fx}{x-a} =$ einem Ganzen, welche Werthe auch x haben mag. Nimmt man nun für x eine beliebige ganze Zahl α an, so sieht man, daß $f\alpha$ durch $\alpha - a$ ohne Rest dividirbar ist. Um also zu erkennen, ob ein Theiler a des letzten Gliedes u eine ganze Wurzel sein kann, nehme man die Differenz zwischen α und gedachtem Divisor. Jedesmal nun, wenn a eine Wurzel ist, wird jene Differenz die Größe $f\alpha$ ohne Rest dividiren, d. h. diejenige Zahl, welche sich aus der Substitution von α für x in fx ergibt. Jeder Divisor, welcher diese Bedingung nicht erfüllt, ist sofort als Nichtwurzel wegzulassen; worauf das allgemeine Verfahren nur auf die übrigen Divisoren von u angewendet wird, unter denen man von Neuem andere dadurch beseitigen kann, daß man die Zahl α ändert. Da unsere Methode verlangt, die Faktoren ± 1 durch unmittelbare Substitution in fx zu versuchen, ob dieselben zu den Wurzeln gehören oder nicht; so kennt man schon die Werthe von $f\alpha$ für $\alpha = \pm 1$, und unsere Regel findet sofort ihre Anwendung.

In dem ersten Beispiel des Paragraphen 47 muß man 9 Divisoren zwischen den Grenzen der Wurzeln prüfen. Nun gibt $x = 1$ für $f\alpha$ den Werth 144 und für $a - \alpha$ die Werthe 1, 2, 4, 5 ....; woraus sich bald herausstellt, daß die Zahlen 2, 3, 5, -2, -3, -5 die einzigen sind, welche man der Rechnung zu unterwerfen hat.

§. 50. Wir wollen jetzt die commensurabeln Faktoren vom zweiten Grade der Gleichung $fx = o$ suchen. Es sei $x^2 + px + q$ einer

dieser Faktoren und $x^{n-2}+p'x^{n-3}+\ldots$. der Quotient. Hiernach hat man die identische Gleichung

$$fx=(x^2+px+q)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+q'x^{n-4}\ldots),$$

in welcher n unbekannte Coefficienten vorkommen. Wir verrichten die Multiplikation und setzen die Coefficienten der nämlichen Exponenten von x in den beiden Theilen (§. 28) einander gleich, wodurch wir n Gleichungen erhalten. Eliminiren wir p', q' ...., so bleiben nur zwei Gleichungen zwischen p und q übrig, und endlich nur eine Gleichung, welche bloß q enthält und vom $\frac{1}{2}n(n-1)$ten Grade ist, Zahl der Combinationen zu je zwei der Binomialfaktoren vom ersten Grade. Diese letztere Gleichung wird für q wenigstens eine commensurable Wurzel liefern, weil sonst fx keinen rationalen Faktor vom zweiten Grade haben würde. Hat man q gefunden, so gibt eine Gleichung zwischen p und q die andere Unbekannte p, und unser rationale Faktor x^2+px+q wäre bestimmt.

Für das Beispiel $x^4-3x^2-12x+5=(x^2+p'x+q)(x^2+p'x+q')$ hat man $p+p'=0$, $q+pp'+q'=-3$, $p'q+pq'=-12$, $qq'=5$. Die beiden ersten Gleichungen geben die Werthe von p' und q', welche, in die beiden andern substituirt, liefern

$$2pq+3p-p^3=12,\quad q^2+q(3-p^2)+5=0.$$

Durch Elimination von q findet man $p^6-6p^4-11p^2=144$; hieraus $p=3$ und -3, sodann $q=5$ und 1. Die gesuchten Faktoren sind folglich $(x^2+3x+5)(x^2-3x+1)$.

Von den gleichen Wurzeln.

§. 51. Ist $fx=(x-a)^p(x-b)^q(x-c)(x-d)\ldots.(A)$, so kommt in dem Polynom fx der Faktor $(x-a)$ pmal, jener $(x-b)$ qmal vor, und man sagt, die Gleichung $fx=0$ hat p Wurzeln $=a$, q Wurzeln $=b$. Es handelt sich jetzt darum, sich zu versichern, ob eine gegebene Gleichung auf die obige Form (A) gebracht werden kann. Wir nehmen zuvörderst an, daß $p=q=1$ sei. Da die Gleichung (A) zu den identischen gehört, so kann man auf beiden Seiten $y+x$ statt x setzen. Es entsteht dadurch, wenn man auf der linken Seite entwickelt,

$$fx+yf'x+\tfrac{1}{2}y^2f''x\ldots.=(y+x-a)(y+x-b)(y+x-c)\ldots.;$$

wo $f'x$ die derivirte Funktion von fx, desgleichen $f''x$ die von $f'x$ ist .....,

mithin bekannte Polynome sind. Der zweite Theil hingegen besteht aus Faktoren, welche sämmtlich y zum ersten Glied haben; das Produkt hat mithin die im §. 6 angegebene Form, d. h. der Coefficient von y^{n-1} ist die Summe der zweiten Theile $x-a$, $x-b$, ...; die Coefficienten von y^{n-2}, y^{n-3}.... sind die Summen der Produkte zu je 2, zu je 3.... dieser Binome.

Also: 1. fx ist das Produkt aller dieser Binome, oder die Gleichung (A).

2. f′x ist die Summe ihrer Produkte zu n—1 und n—1 genommen, welche man dadurch erhält, daß man in dem Produkte (A) jeden einzeln Binomialfaktor successive wegläßt und sämmtliche Resultate addirt. $\frac{1}{2}f''x$ ist die Summe der Produkte zu n—2 und n—2 genommen, u. s. f. Dieß vorausgeschickt, wenn $p=1$, so kommt in fx nur einmal der Faktor $x-a$ vor; sämmtliche Glieder von f′x enthalten gleichfalls diesen Faktor, mit Ausnahme desjenigen Gliedes, in welchem er weggelassen worden, nämlich, $R=(x-b)(x-c)$... Demnach ist f′x von der Form $R+(x-a)Q$, ein durch $x-a$ nicht genau theilbarer Ausdruck. Das, was wir von dem Faktor $x-a$ gesagt haben, läßt sich vollkommen von den übrigen ungleichen Faktoren von fx behaupten. Hat folglich das Polynom fx keine gleiche Faktoren, so haben fx und f′x keinen gemeinschaftlichen Theiler. Wenn aber (A) den Faktor $(x-a)^p$ enthält, so muß man, um das Polynom f′x zu bilden, aus fx nach und nach jeden der p Faktoren $x-a$ weglassen, wonach sich $(x-a)^{p-1}$ als Faktor von p gleichen Gliedern herausstellt; ferner muß man jeden der übrigen Faktoren $x-b$, $x-c$... successive wegstreichen, was Resultate liefert, in denen sämmtlich $(x-a)^p$ als Faktor erscheint. Alle Glieder werden daher durch $(x-a)^{p-1}$ genau theilbar sein, während ihre Summe solches nicht durch $(x-a)^p$ ist. Man sieht hieraus, daß fx und f′x den Ausdruck $(x-a)^{p-1}$ zum gemeinschaftlichen Theiler haben. Wiederholt man diese Schlußweise für die andern gleichen Faktoren $(x-b)^q$, so erkennt man leicht, daß, wenn fx gleiche Faktoren besitzt, alsdann die Polynome fx und f′x einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher das Produkt aller dieser gleichen Faktoren ausmacht, von denen jeder jedoch auf eine um einen Grad niedrigere Potenz erhoben ist, als in dem vorgelegten Polynom fx.

Ist also eine Gleichung $fx=0$ gegeben, so bildet man die derivirte Funktion $f'x$ und schreitet alsdann zur Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theiles zwischen fx und $f'x$. Ist ein solcher nicht vorhanden, so besitzt die vorgelegte Gleichung keine gleiche Wurzeln. Sie hat dagegen deren solche, wenn man einen gemeinschaftlichen Theiler F findet, welcher zwar auf die Form

$$F=(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}\dots$$

gebracht werden kann, sich aber unter der eines Polynoms darstellt. Dividirt man nun fx durch F, so wird der Quotient q mit dem Produkte sämmtlicher, von den Exponenten befreiten Faktoren von gleichem Werthe sein, oder

$$q=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\dots$$

§. 52. Es seien $\alpha, \beta, \gamma \dots$ die Produkte der Binomialfaktoren, welche bezüglich auf die erste, zweite, dritte, ... Potenzen, wie solche in fx vorkommen, erhoben sind, so daß man hat $fx=\alpha^1.\beta^2.\gamma^3.\delta^4.\varepsilon^5\dots$ Wir bezeichnen durch F den größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen fx und $f'x$, ferner durch G den zwischen F und F', durch H den zwischen G und G', u. s. f.; endlich durch $q, r, s, t, \dots$ die vollständigen successiven Quotienten jedes gemeinschaftlichen Theilers durch den darauf folgenden, nämlich:

$$\begin{array}{llll}
fx = \alpha^1.\beta^2.\gamma^3.\delta^4.\varepsilon^5\dots, & q = \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon\dots, & \alpha = 0 \\
F = \beta.\gamma^2.\delta^3.\varepsilon^4\dots, & r = \beta.\gamma.\delta.\varepsilon\dots, & \beta = 0 \\
G = \gamma.\delta^2.\varepsilon^3\dots, & s = \gamma.\delta.\varepsilon\dots, & \gamma = 0 \\
H = \delta.\varepsilon^2\dots, & t = \delta.\varepsilon\dots, & \delta = 0 \\
\text{u. s. f.} & \dots & \dots
\end{array}$$

Indem jetzt jeder der Quotienten $q, r, s\dots$ durch den darauf folgenden dividirt wird, findet man zu Resultaten die abgesonderten Faktoren $\alpha, \beta, \gamma\dots$, jeden auf der ersten Potenz erhoben. Wenn in fx irgend ein Faktor, z. B. β, fehlen sollte, so läuft dieß dahin aus, $\beta=1$ zu setzen, wodurch $r=s$ und der entsprechende Quotient $=1$ entsteht, was die Abwesenheit der Faktoren vom zweiten Grad anzeigt. Die dabei zu verrichtende Rechnung wäre demnach folgende:

Jedes der Polynome aus der ersten Columne ist der gemeinschaftliche Theiler zwischen dem vorhergehenden und seinem derivirten, das so weit fortgesetzt, bis man zu demjenigen M gelangt, welches mit

seinem derivirten M' nur $1 = N$ als gemeinschaftlichen Theiler hat; es sind dieß die letzten Polynome gedachter Columne. Hierauf dividirt man jedes dieser Polynome durch das nächstfolgende, was uns die vollständigen Quotienten $q, r, s, \ldots M$ gibt. Endlich dividirt man noch jedes der letztern durch das nächstkommende; man erhält alsdann zu vollständigen Quotienten Functionen von x, welche die abgesonderten Produkte der verschiedenen Gattungen der Faktoren vom ersten, zweiten, dritten... Grade bilden, jeden derselben jedoch auf den ersten Grad reducirt. Das Polynom M, welches mit M' nur die Einheit als gemeinschaftlicher Theiler hat, ist das Produkt der Faktoren, die in fx mit dem höchsten Exponenten behaftet sind. Findet man einen der Quotienten $q, r, s\ldots$ gleich dem darauf folgenden, so zeigt der Quotient Eins die Abwesenheit des Faktors von der entsprechenden Ordnung in fx an.

Wir wollen jetzt zur Erläuterung dieser Methode einige Beispiele durchführen:

I. Es sei $fx = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4$; hieraus

$$f'x = 5x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 8x + 4,$$ welche

$F = x^2 + 2$ zum gemeinschaftlichen Theiler haben. Es ist ferner $F' = 2x$, woraus der gemeinschaftliche Theiler $G = 1$ folgt: die erste Columne ist mithin hier geschlossen. Indem wir zur zweiten Columne übergehen, gibt fx, dividirt durch F den Quotienten

$$q = x^3 - x^2 + 2x - 2; \text{ ferner } r = x^2 + 2.$$

Bei der Division von q durch r hat man $\alpha = x - 1$, $\beta = x^2 + 2$, woraus folgt, daß $fx = (x-1)(x^2+2)^2$.

Anmerkung. Die etwas langwierige Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers wird durch folgende Regel, welche sofort den Rest der Division von fx durch $f'x$ gibt, abgekürzt: Man multiplicire nämlich den Coefficienten von fx, vom dritten an gerechnet, mit $2, 3, 4\ldots$ mal dem Coefficienten des ersten Gliedes von $f'x$; multiplicire ferner den Coefficienten von $f'x$, vom zweiten an gerechnet, mit dem Coefficienten des zweiten Gliedes von fx; ziehe alsdann diese Produkte, je zwei und zwei, von einander ab, und man erhält die Coefficienten des Restes vom $n-2$ten Grade.

Es sei	$fx = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 4$,
	$f'x = \quad +5 - 4 + 12 - 8 + 4$
Produkt v. fx mit +10, 15, 20, 25 . . .	$+40 - 60 + 80 - 100$
Produkt von f'x mit -1	$+4 - 12 + 8 - 4$
Unterschiede	$+36 - 48 + 72 - 96$
Rest der Division (nach Hinweglassung des Faktors 12)	$3x^3 - 4x^2 + 6x - 8$

Wenn das zweite Glied in fx fehlt, so ist der subtraktive Theil Null und die Regel reducirt sich auf die Multiplikation der Coefficienten von fx durch 2, 3, 4...

Es sei	$fx = 3x^4 + 0x^3 - 35x^2 + 44x + 4$
	$f'x = \quad +12 + 0 \quad -70 \quad +44$
Produkt von fx mit 2, 3, 4	$-70 \quad +132 + 16$
Hiernach der Rest der Division	$35x^2 - 66x - 8$,

wenn man den gemeinschaftlichen Faktor -2 wegläßt.

Wird die Rechnung vollendet, so findet man $x-2$ als gemeinschaftlichen Faktor und das vorgelegte Polynom $=(x-2)^2 (3x^2+12x+1)$.

Die eben angeführte Regel wird dadurch bewiesen, daß man die Division von $kx^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots$ durch $mkx^{m-1} + (m-1) px^{m-2} \ldots$ bewerkstelligt, nachdem man zuvor den Dividend mit mk multiplicirt hat, um einen ganzzahligen Quotienten zu erhalten.

II. $fx = x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9$; hieraus $f'x = 6x^5 + 20x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 22x + 12$. Der gemeinschaftliche Theiler

$$F = x^3 + x^2 - 5x + 3, \text{ woraus } F' = 3x^2 + 2x - 5.$$

Der gemeinschaftliche Theiler $G = x - 1$; hiernach $G' = 1$ und $H = 1$.

Um die zweite Columne zu bilden, dividirt man fx durch F, F durch G, G durch H. Um die dritte zu erhalten, dividirt man q durch r, und r durch s. Man findet so

$q = x^3 + 3x^2 - x - 3$, $r = x^2 + 2x - 3$, $s = x - 1$; endlich
$\alpha = x + 1$, $\beta = 3 + x$, $\gamma = x - 1$, und
$fx = (x+1)(x+3)^2(x-1)^3$.

III. Für $fx = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$ hat man $f'x = 4x^3 - 12x^2 + 16$, und

$F = x^2 - 4x + 4$, $q = x^2 - 4$, $\alpha = x + 2$,
$G = x - 2$, $r = x - 2$, $\beta = 1$,
$H = 1$, $s = x - 2$, $\gamma = x - 2$: endlich
$fx = (x+2)(x-2)3$.

IV. Für $fx=x^8-12x^7+53x^6-92x^5-9x^4+212x^3-153x^2-108x+108$ ist,

$F=x^4-7x^3+13x^2+3x-18$, $q=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$, $\alpha=x-1$
$G=x-3$, $r=x^3-4x^2+x+6$, $\beta=x^2-x-2$,
$H=1$, $s=x-3$ $\gamma=x-3$; mithin
$fx=(x-1)(x-2)^2(x+1)^2(x-3)^3$.

V. Für $fx=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$ hat man

$F=x^4+x^3-3x^2-5x-2$, $q=x^2-x-2$, $\alpha=1$,
$G=x^2+2x+1$, $r=x^2-x-2$, $\beta=x-1$,
$H=x+1$, $s=x+1$, $\gamma=1$,
$J=1$, $t=x+1$, $\delta=x+1$; woraus
$fx=(x-2)^2(x+1)^4$.

Um sich zu versichern, ob eine ganze Wurzel 2mal, 3mal... vorkommt, ist es hinreichend, die Division durch $x-a$ mehreremal hinter einander nach dem im §. 28 gegebenen Verfahren zu versuchen. Man unternimmt indessen diese Rechnung nur in dem Fall, in welchem die Coefficienten in umgekehrter Ordnung genommen, durch a^i, a^{i-1}, a^{i-2}... ohne Rest dividirbar sind, wobei i den Exponenten von $x-a$ in fx darstellt. Es ist dies eine unmittelbare Folge von dem, daß a^i das letzte Glied, und a^{i-1}, als Wurzel der derivirten Gleichung, das vorletzte Glied von fx theilen muß, u. s. f.

Anmerkung. Jede Gleichung, deren letztes Glied und der Coefficient des vorletzten Primzahlen unter einander sind, kann demnach nur lauter ungleiche Wurzeln haben.

Von der Elimination.

§. 53. Es seien A, a, B, b, ... Faktoren von y; und

$$Z=Ax^m+Bx^{m-1}\ldots;\quad T=ax^n+bx^{n-1}+\ldots.$$

zwei Polynome, von denen verlangt wird, daß man sie durch Paare zusammengehöriger Werthe für x und y gleichzeitig auf Null bringen soll. Um sich zu versichern, ob β einer von den Werthen ist, welche y haben kann, machen wir $y=\beta$: unsere Polynome Z und T enthalten dadurch nur noch x und müssen sich für den nämlichen Werth α von x auf Null reduciren, sie haben daher $x-\alpha$ zum gemeinschaftlichen Faktor. Man suche demnach den gemeinschaftlichen Theiler D; die Gleichung $D=0$ liefert sofort die Werthe von x, welche in Verbindung mit den zugehörigen Werthen von $y=\beta$ den beiden

Gleichungen $Z=o$ und $T=o$ genügen. Ist der in Frage stehende Theiler nicht vorhanden, so kann β kein Werth von y sein. Man muß also auf die Polynome Z und T das im §. 11 der niedern Algebra angegebene Verfahren des gemeinschaftlichen Theilers anwenden, als ob y bekannt wäre, und dieß Verfahren so lange fortsetzen, bis man zu einem Reste Y gelangt, der bloß noch eine Funktion von y ist. Setzen wir also diesen Rest Y gleich Null, so wird man eine Gleichung erhalten, deren sämmtliche Wurzeln die gesuchten Werthe von y sind, indem solche einen gemeinschaftlichen Theiler zwischen T und Z zur Folge haben. Die Gleichung $D=o$ wird, wenn man nach und nach darin für y die aus der Finalgleichung gefundenen Werthe setzt, die correspondirenden Werthe für x liefern. Wir wollen dieß gleich noch deutlicher machen.

Es sei $m =$ oder $> n$. Wir dividiren Z durch T, multipliciren dabei, insofern dieß zur Vermeidung der Brüche erforderlich sein sollte, Z mit einem passenden Faktor M, damit A M durch a genau theilbar werde; im Allgemeinen ist M eine Funktion von y. Bezeichnen wir durch Q den ganzen Quotienten und durch R den Rest, welche beide Funktionen von x und y sind; so haben wir

$$MZ=QT+R \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Diese Gleichung ist identisch, enthält weder Brüche noch irrationale Größen; alle beliebige Werthe für x und y substituirt, leisten ihr folglich Genüge. Setzen wir $x=\alpha$, $y=\beta$, von denen wir annehmen, daß es geeignete Werthe sind, um Z und T auf Null zu bringen; so werden diese Werthe auch R gleich Null machen. Es werden ferner diejenigen Werthe von x und y, welche die Polynome R und T auf Null bringen, auch $MZ=o$, d. h. entweder $M=o$ oder $Z=o$ geben. Die Auflösung des Systems $Q=o$ und $R=o$ kommen also auch entweder dem Systeme $Z=o$ und $T=o$, oder dem Systeme $M=o$ und $T=o$ zu; und umgekehrt. Wenn man folglich anstatt der Gleichungen $Z=o$, $T=o$ die Gleichungen $T=o$, $R=o$ behandelt, so wird man alle gesuchten Wurzelpaare erhalten, überdieß aber auch die der Aufgabe fremdartigen Auflösungen, welche $M=o$ und $T=o$ geben. Uebrigens gestaltet sich das Problem einfacher, obschon es diese fremden Auflösungen zuläßt, weil der Grad von R weniger als n beträgt.

Wir dividiren ebenso T oder vielmehr $M'T$ durch R, wobei

M' der durch Erzielung eines ganzen Quotienten Q' eingeführte Faktor ist, und haben, wenn R' den Rest darstellt:

$$M'T = Q'R + R' \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Aus dieser Gleichung folgt ebenfalls, daß alle zusammengehörige Werthe von x und y, welche T und R Null machen, auch $R'=0$ und $R=0$ geben. Es enthalten mithin die letztern Gleichungen die sämmtlichen gesuchten Auflösungen, dabei werden sie aber noch jene des Systems $M'=0$ und $R=0$ in sich schließen. Behandelt man daher die Gleichungen $R=0$, $R'=0$ anstatt der vorgelegten, so hat man alle gesuchten Auflösungen, zugleich aber auch die fremdartigen Auflösungen der beiden Systeme $M=0$, $T=0$ und $M'=0$, $R=0$.

Wir dividiren ferner $M''R'$ durch R': woraus

$$M''R = Q''R' + R' \;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Wird diese Rechnung des gemeinschaftlichen Theilers zwischen Z und T auf solche Art weiter fortgesetzt, so sieht man, daß das Nullmachen zweier auf einander folgender Reste nicht nur die sämmtlichen verlangten Auflösungen, sondern zugleich auch jene, welche einem der eingeführten Faktoren und dem entsprechenden Divisor genügen, in sich schließt. Die Grade der nach und nach entstehenden Reste werden in Bezug auf x immer niedriger, so daß man zuletzt auf einen Rest Y kommt, der kein x mehr enthält. Ist mV der hierhergehörige Dividend, und D der Divisor, der im Allgemeinen vom ersten Grade in Bezug auf x sein wird; so hat man

$$mV = Dq + Y \;.\;.\;.\;.\; (4),\ \text{woraus}$$

$$D = 0, \quad Y = 0 \;.\;.\; (5);$$

welche Gleichungen alle gesuchten Auflösungen, zugleich aber auch jene in sich schließen, welche die eingeführten Faktoren und die entsprechenden Divisoren auf Null bringen, nämlich M und T, M' und R, M'' und R', u. s. f.

Die Unbekannte y kommt allein in der Finalgleichung $Y=0$ vor, deren sämmtliche Wurzeln man zu bestimmen und solche alsdann in $D=0$ zu substituiren hat, um die correspondirenden Werthe von x zu erhalten. Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Wurzeln der Gleichung $Y=0$, welche dem System $Z=0$, $T=0$ fremd sind, zu beseitigen.

Anmerkungen. I. Das oben auseinander gesetzte Verfahren hat also zum Zweck, anstatt des Systems der vorgelegten

Gleichungen ein anderes vollkommen gleichgeltendes, jedoch einfacheres System aufzufinden, kurz zuletzt ein System von Gleichungen zu erhalten, von denen die eine $Y=0$ nur noch eine Unbekannte in sich schließt, in der Art, daß gedachte Gleichung genau oder wenigstens näherungsweise aufgelöst werden kann, und die andere im Allgemeinen die Form $Kx+L=0$ hat, wo K und L bloß noch Funktionen von y sind.

II. Unsere obige Schlußweise hat nur insofern Gültigkeit, als die sämmtlichen Quotienten in Bezug auf x und y ganz sind. Denn es sei z. B. $Z=\frac{QT}{N}+R$, wo y in N, hingegen x und y in Q vorkommt. Machte nun ein Werth von y, der zu dem System $Z=0$ und $T=0$ gehörte, auch N gleich Null; so würde man haben $\frac{QT}{N}=\frac{0}{0}$, welcher Ausdruck Null, endlich oder unendlich sein kann. Für den Fall, daß $\frac{QT}{N}$ endlich oder unendlich ist, läßt sich also nicht mehr folgern, daß R verschwinde, da es ebenfalls endlich oder unendlich sein muß.

III. Eine algebraische höhere Gleichung zwischen x und y, heißt vom mten Grade, wenn die Summe der Exponenten von x und y in jedem einzelnen Gliede die Zahl m nicht übersteigt, und wenigstens in einem Gliede erreicht.

IV. Sind die Grade m und n einander gleich, so wird $M=a$ oder bloß ein Faktor von a sein, welcher in A nicht vorkommt. Für den Fall, daß $m=n+1$, wird M das Quadrat von a oder das des gedachten Faktors sein; für $m=n+2$ wird M der Cubus von a sein, u. s. f. Auf diese Weise ist man der Mühe überhoben, jedesmal die Partialreste von neuem zu multipliciren, und man gelangt zu einem letzten Reste, in welchem sich x höchstens auf dem $(n-1)$ten Grade befindet. In dem Fall also, wo $m=n+1$ und $M=a^2$, ist der Quotient

$$Q=Aax+(aB-Ab)=a(Ax+B)-Ab.$$

Setzt man unmittelbar diesen Ausdruck des Quotienten an, multiplicirt ihn hierauf mit T und zieht das Resultat von a^2Z ab; so verschwinden die beiden ersten Glieder und man

erhält auf der Stelle den Rest R. Die hier gegebene Regel erhält eine Modifikation, insofern bei T das zweite Glied fehlt oder a ein Faktor dieses Gliedes ist: denn es reicht alsdann hin, Z bloß mit a anstatt mit a^2 zu multipliciren, wenn $m = n + 1$ ist.

Beispiele: I. Es seien die Gleichungen

$$2x^2 - y^2 + 1 = 0,\quad x^2 - 3xy + y^2 + 5 = 0.$$

Bei der Division des ersten Polynoms durch das zweite erhält man den Quotienten 2 und den vom Faktor 3 befreiten Rest $D = 2xy - y^2 - 3$. Multiplicirt man hierauf den Divisor durch $4y^2$ und dividirt dann durch D: so erhält man den Quotienten $2xy - 5y^2 + 3$ und den Rest $Y = -y^4 + 8y^2 + 9$. Derselbe annullirt und $y^2 = z$ gesetzt, gibt $z^2 = 8z + 9$; woraus $z = 9$ und -1, mithin $y = \pm 3$ und $\pm\sqrt{-1}$. Substituirt man endlich in D die für y gefundenen Werthe, so hat man die correspondirenden Werthe $x = \pm 2$ und $\mp\sqrt{-1}$.

II. Für die Gleichungen $x^2 + 2xy - 3y^2 + 1 = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ findet man den ersten Rest $D = 2xy - 2y^2 + 1$, und den zweiten $Y = 4y^2 - 1$; hieraus $y = -x = \pm\frac{1}{2}$.

III. Die Gleichungen $x^2 + Px + Q = 0$, $x^2 + px + q = 0$ wo P, Q, p, q Funktionen von y sind, geben

$$(P - p)x + Q - q = 0,\quad (Q - q)^2 + q(P - p)^2 = p(Q - q)(P - p).$$

IV. Für die Gleichungen $x^3 + x^2 - xy^2 - y^2 = 0$, $2x^2 - x(4y - 1) - 2y^2 + y = 0$ findet man als ersten Rest $D = (16y^2 - 2y + 1)x + 8y^3 - 6y^2 - y$. Nachdem man den Divisor durch $(16y^2 - 2y + 1)^2$ multiplicirt hat, findet man nach seiner Division durch D die Finalgleichnung . . . $32y^3(4y^3 - 12y^2 + 3y + 1) = 0$. Hieraus ergibt sich $y = 0$ und $\frac{1}{2}$; man vermindert hierauf ihren Grad und findet $y = \frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{33})$. Endlich gibt D die entsprechenden Werthe $x = 0$, $\frac{1}{2} - 1$ und -1.

§. 54. Wir wollen jetzt die Modifikationen, welche die Methode des gemeinschaftlichen Theilers hier erleidet, auseinander setzen.

Wir nehmen an, daß Z das Produkt zweier Faktoren, also von der Form $P \times Q$ ist. Da nun Z nicht Null sein kann, ohne daß es nicht wenigstens P oder Q ist, so zerfällt das Problem in zwei andere: nämlich $P = 0$ und $T = 0$, ferner $Q = 0$ und $T = 0$. Diese beiden Systeme schließen alle Auflösungen in sich ein, zugleich sind sie ein-

facher als das vorgelegte. Können beide Polynome Z und T in verschiedene Faktoren zerlegt werden, so erhält man eben soviele Systeme von Auflösungen, als sich jeder Faktor von Z mit jedem Faktor von T kombiniren läßt.

Das Gesagte ist auch auf den Fall anwendbar, in welchem der Faktor bloß y enthält; jedes Glied von Z muß alsdann einzeln durch P theilbar sein (niedere Algebra, §. 11). Setzt man $P=0$ und $T=0$, so bekommt man einen Theil der Auflösungen, die andern liefern die Gleichungen $Q=0$ und $T=0$. Man darf also hier nicht, wie bei dem Verfahren des gemeinschaftlichen Theilers, die bloß y enthaltenden Faktoren wegstreichen; oder mit andern Worten, man läßt dieselben weg, indem man sie besonders behandelt.

Beispiele. I. Für die beiden Gleichungen $x^2-2yx-3y^2+y=0$, $x^2-y^2=0$, wo die letztere mit $(x+y)(x-y)=0$ einerlei ist. Nimmt man zuvörderst $y=x$, so gibt die erstere $x=0$ und $\frac{1}{4}$; aus $y=-x$ entsteht auf ähnliche Weise $x=0$: es sind dieß die gesuchten Auflösungen.

II. Für die Gleichungen $x^2+x(y-3)+y^2-3y+2=0$, $x^2-2x+y^2-y=0$ erhält man den Rest $(y-1)(x-2)$. Bevor wir zu der zweiten Division schreiten, setzen wir den Faktor $y-1$ bei Seite, jedoch nicht unterlassend, in dem Divisor $y=1$ zu machen, woraus sich $x=0$ und 2 ergibt. Wir fahren hierauf in unserer Rechnung mit dem Rest $x-2$ fort, wodurch wir die Finalgleichung $y^2-y=0$ erhalten; daraus $y=0$ und 1 mit $x=2$.

Bevor wir mithin einen Dividend durch irgend einen Faktor M, M' . . . multipliciren, müssen wir vorerst mittelst der Methode des gemeinschaftlichen Theilers uns vergewissern, ob nicht M oder seine Faktoren Theiler sämmtlicher Glieder des Divisors sind: in diesem Falle muß man jenen Faktor des Divisors weglassen und ihn, wie so eben gesagt, besonders behandeln.

III. In Bezug auf die Gleichungen $x^3-x^2y+x(y-6)+y^2-4=0$, $x^2-xy-4=0$ gibt eine erste Division den Quotienten x und den Rest $x(y-2)+y^2-4$, welcher $y-2$ als gemeinschaftlichen Faktor enthält. Man setzt daher in dem Divisor $y=2$, wodurch x^2-2x-4 entsteht: hieraus $x=1\pm\sqrt{5}$. Der Rest, der sich auf $x+y+2$ reducirt, als Divisor genommen, liefert die Finalgleichung $y^2+3y=0$, woraus $y=0$ und -3 mit $x=-2$ und $+1$.

IV. Es seien noch die Gleichungen

$$x^3-(3y-6)x^2+(3y^2-12y+8)x-y^3+6y^2-8y=0,$$
$$x^2+(2y+2)x+y^2+2y=0;$$

Die erste Division gibt den Rest $3xy(y-1)+y^3+3y^2-4y$. Bevor wir denselben zum Divisor nehmen, müssen wir die Faktoren y und $y-1$ weglassen, welche $y=0$ und 1 liefern. Es folgt dann $x=0$ und -2 für $y=0$, und $x=-1$ und -3 für $y=1$. Der in $3x+y+4$ übergegangene Rest zum Divisor genommen, gibt die Finalgleichung $y^2-y-2=0$, woraus $y=2$ und -1 mit $x=-2$ und -1: es sind dieß die sechs Auflösungen des Problems.

§. 55. Ereignet es sich endlich, daß die Polynome Z und T einen gemeinschaftlichen Faktor D haben, mithin von der Form $Z=P\times D$, $T=Q\times D$ sind; so ist klar, daß diesen beiden Gleichungen zugleich Genüge gethan wird, wenn man zuerst $D=0$ setzt. Diese Gleichung wird nur eine der Unbekannten geben, selbst wenn beide darin vorkommen; die andere Unbekannte wird daher ganz unbestimmt bleiben. Die Frage wird unter dieser Ansicht also eine unendliche Anzahl von Auflösungen zulassen oder unbestimmt sein. Die Auflösungen der Gleichungen $P=0$, $Q=0$, welche in bestimmter Anzahl vorhanden sind, werden gleichfalls der Aufgabe genügen: in diesem Sinne wird die Frage also bestimmt sein.

Beispiele. I. Die Gleichungen $(y-4)x^2-y+4=0$, $x^3-x^2-xy+y=0$ haben $x-1$ zum gemeinschaftlichen Faktor, wie die angegebene Ausführung der Rechnung zeigt. Der Werth $x=1$ bringt demnach die vorgelegten Gleichungen auf Null, welche Größe auch y haben mag. Läßt man jenen gemeinsamen Faktor weg, so gelangt man zu den Gleichungen $(y-4)(x+1)=0$, $x^2-y=0$. Außer der eben gefundenen, unbestimmten Anzahl von Auflösungen hat man daher noch $y=1$ und 4, zu denen die Werthe $x=-1$ und ± 2 gehören.

II. Das System der Gleichungen

$$(x^2-y^2)(yx-6)(x-1)=0,\ (x^2-y^2)(2x-3y)(x-y)=0$$

gibt eine unendliche Anzahl von Auflösungen, wenn man den gemeinsamen Faktor x^2-y^2 gleich Null setzt. Die andern Auflösungen sind:

$$y=+2 \text{ und } x=+3;\ y=-2 \text{ und } x=-3;\ y=x=\pm\sqrt{6};$$
$$y=+\tfrac{2}{3} \text{ und } x=1;\ y=x=+1.$$

§. 56. Wir wollen jetzt suchen, die Endgleichung $Y=0$ von den fremdartigen Wurzeln zu befreien. Da diese Wurzeln einige der ein-

geführten Faktoren M, M' ...., welche bloß y enthalten, Null machen; so ist es hinreichend, Y durch M, M' .... zu dividiren, um jene Wurzeln zu entfernen. Kürzer ist es übrigens, sie aus den successiven Resten wegzuschaffen, wie wir sogleich auseinander setzen werden.

Anmerkung. Wir müssen jedoch auf eine zufällige Ausnahme aufmerksam machen, wo nämlich $y=\lambda$, eine Wurzel der Gleichung $M=o$, das Polynom T auf einen numerischen Werth reducirt. Es existirt alsdann kein Werth von x, welcher M und T gleichzeitig auf Null bringen kann. Y ist daher nicht durch $y-\lambda$, mithin auch nicht durch M theilbar, und die Einführung der fremden Wurzel $y=\lambda$ durch den Faktor M hat keineswegs statt. Dasselbe gilt von M' in Bezug auf R, von M'' und R', u. s. f. Man erkennt vorliegenden Fall bald, wenn man zufällig findet, daß Y nicht durch M, oder M', u. s. w. theilbar ist.

Zu bemerken ist zuvörderst, daß der Faktor m der letzten Division zu keiner fremden Auflösung Anlaß gibt. Denn wenn $y=\lambda$ zugleich eine Wurzel von $m=o$ und $Y=o$ ist, so geht die identische Gleichung (4) in $qD=o$ für diesen Werth von y über. Man hat aber nicht $q=o$, weil der Faktor m dergestalt gewählt wurde, daß die Division von V durch D möglich werde; es muß daher D für $y=\lambda$ verschwinden, oder $y-\lambda$ Faktor von D sein. Nach dem oben Gesagten ist dieser Faktor aber wegzulassen und besonders zu behandeln.

Der Faktor M enhält kein x; es sei $q=\lambda$ eine Wurzel der Gleichung $M=o$. Indem man λ für y in die identische Gleichung (1) substituirt, entsteht $o=QT+R$, oder $R=-QT$, eine andere identische Gleichung in x. Da M ein Faktor des ersten Coefficienten a von T ist, so verschwindet dieses Glied für $y=\lambda$, und der Grad von T wird auf $n-1$ herabgebracht, welcher zugleich der von R ist. Denn in der That haben, dem Gange der Rechnung zufolge, die den Quotienten Q ausmachenden Glieder in x, x^2 ...., bezüglich a, a^2 .... zu Faktoren, die für $y=\lambda$ verschwinden. Q ist daher ein Zahlenausdruck, und die Polynome T und R sind für $y=\lambda$, abgesehen vom numerischen Faktor, einerlei geworden. Machen wir in der Gleichung (2) auch $y=\lambda$, so entsteht

$$R'=M'T-Q'R=T(M'+QQ').$$

R' und T sind bezüglich von den Graden $n-2$ und $n-1$, was ein

Identischsein der beiden Glieder nicht gestattet. Die vorstehende Gleichung würde demnach absurd sein, wenn man nicht $QQ'+M'=o$ hätte, welchen Werth auch x haben mag, das übrigens darin nicht vorkommt. Der zweite Rest R' verschwindet also für $y=\lambda$, oder ist durch $y-\lambda$ theilbar. Da jede Wurzel der Gleichung $M=o$ die nämliche Folgerung zuläßt, so sieht man, daß der in dem ersten Dividend eingeführte Faktor M den zweiten Rest R' genau dividiren muß. Substituirt man daher statt des, bei der Rechnung des gemeinschaftlichen Theilers, gefundenen Restes R' den genauen Quotienten von R' dividirt durch M; so scheidet man aus der Operation die fremden Auflösungen, welche dieser Faktor M herbeigeführt hat, aus. Jener Quotient, und nicht mehr R', ist es also, welcher zum Divisor von R, oder vielmehr von $M'R$ genommen werden muß.

Man zeigt ganz auf die nämliche Art, daß der zweite Faktor M' genau den dritten Rest R'' theilt, und daß der hier gewonnene Quotient bei der folgenden Division statt R'' gebraucht werden muß, wenn man die durch M' eingeführten fremden Wurzeln entfernen will; u. s. f.

Die auf diese Weise gefundene Endgleichung $Y=o$ enthält also keine fremde Wurzeln.

Beispiele. I. Es seien die Gleichungen

$$x^3y-3x+1=o\,,\ x^2(y-1)+x-2=o.$$

Wir dividiren die erste, nachdem sie vorerst mit $(y-1)^2$ multiplicirt worden, durch die zweite. Wir finden dabei als

erſten Rest . . $-x(y^2-5y+3)+y^2-4y+1$ . . . D.

Indem die zweite mit $(y^2-5y+3)^2$ multiplicirt und nachher durch D dividirt wird, haben wir als

zweiten Rest . . $y^5-10y^4+37y^3-64y^2+52y-16$,

der durch $(y-1)^2$ theilbar sein muß. Der Quotient ist die gesuchte Endgleichung in y ohne fremde Wurzeln, nämlich

$$y^3-8y^2+20y-16=o.$$

Die Auflösungen sind $y=4$, 2 und 2; $D=0$ gibt die entsprechenden Werthe $x=-1$, 1 und 1.

II. Für $x^3y-4x^2y^2+x+6=o$, $x^2(y-2)+xy+2=o$, multiplicirt man die erste mit $(y-2)^2$ und dividirt sie dann durch die zweite. Die Division liefert den Rest

$Ax+B$, wo $A=4y^4-7y^3-y^2+4$, $B=8(y^3-y^2-3y+3)$ gesetzt ist. Da $y-1$ ein gemeinschaftlicher Faktor von A und B ist, so läßt man denselben weg, indem man ihn besonders behandelt; er gibt uns $y=1$ und $x=2$ und -1. Man setzt hierauf

$$A=4y^3-3y^2-4y-4,\ B=8(y^2-3).$$

Der Rest der zweiten Division ist $A^2-\tfrac{1}{2}By(A-B)-B^2$, oder

$$20y^5-23y^4-220y^3+376y^2+272y-560=0.$$

Dividirt man durch $(y-2)^2$, so erhält man die Endgleichung

$$20y^3+57y^2-72y-140=0;$$

hieraus $y=-\tfrac{5}{4}$ und $x=-1$; ferner $5y^2+8y^2=28$.

Uebrigens kann es sich ereignen, daß die Wurzel $y=\lambda$ von $M=0$ das Polynom höchstens auf den $(n-2)$ten Grad bringt: R' ist dann durch M nicht mehr theilbar; denn die Gleichungen $R=0$, $R'=0$ befinden sich hier mit T auf einem und demselben Grade, was nicht mehr gestattet, die obige Schlußfolge anzuwenden. Y ist demnach von der fremden Wurzel λ nicht befreit, ein Umstand der sich jedoch bald erkennen läßt. In dem nachstehenden Beispiele theilt der bei der ersten Division eingeführte Faktor den zweiten Rest nicht; derselbe findet sich jedoch in dem letzten Rest wieder, aus welchem er auszuscheiden ist.

Es seien nämlich die Gleichungen

$$(y-1)x^4-1=0,\ yx^3-x+1=0.$$

Erster Rest . . . $(y-1)x^2-x(y-1)-y$,
Zweiter Rest . . . $(2y^2-2y+1)x+y^2+y-1$,
Dritter Rest . . . $y(y^4-7y^3+14y^2-9y+2)$.

Trifft es sich, daß irgend eine Verbindung der Gleichungen $Z=0$, $T=0$ ein einfaches Resultat darbietet, so muß man letzterem bei der Anwendung den Vorzug einräumen. So kann es auch bequemer sein, die Polynome Z und T nach y statt nach x zu ordnen. Indem man die Gleichungen unsers ersten Beispiels im §. 53 addirt, und in Bezug auf y auflöst, welches im Resultat nur auf dem ersten Grad vorkommt, gelangt man auf der Stelle zu den Auflösungen. Sind die Polynome Z und T von dem nämlichen Grade m, so eliminirt man x^m als einfache Unbekannte, wodurch der Grad einer Gleichung auf $m-1$ gebracht wird.

§. 57. Die im §. 53 gegebene Regel bietet vier Ausnahmsfälle dar, je nachdem nämlich Y oder D von selbst Null ist oder einen numerischen Werth hat.

I. Fall. Der Rest Y reducirt sich auf Null. Z und T haben alsdann einen gemeinschaftlichen Faktor D. Es wurde dieser Fall in §. 55 erörtert; die Aufgabe ist alsdann unbestimmt.

II. Fall. Y ist eine Zahl. V und D (Gleichung 4) können hier nicht gleichzeitig verschwinden. Kein Werth von x und y kann also den vorgelegten Gleichungen Genüge thun; dieselben sagen alsdann sich widersprechende Bedingungen aus: das Problem ist folglich ungereimt. Man sieht dieß an nachstehenden Gleichungen.

$$3x^2-6xy+3y^2-1=0,\quad 2x^2-4xy+2y^2+1=0.$$

Man setze zwei Gleichungen, deren gleichzeitige Existenz unmöglich ist, und welche einerlei Unbekannte z haben, an, wie z. B. $3z^2-1=0$, $2z^2+1=0$. Hierauf mache man $z=x+y$ oder $x-y$, oder irgend einer andern Funktion von x und y. Es ist klar, daß die beiden Gleichungen mit einander unvereinbar sind.

III. Fall. Der Divisor D verschwindet für eine Wurzel $y=\lambda$ der Gleichung $Y=0$. Alsdann ist $y-\lambda$ ein Faktor von D. Wir haben in §. 54 gesehen, daß man einen solchen Faktor ausscheiden und besonders behandeln muß. So würden wir in dem letzten Beispiele des erwähnten Paragraphen, wenn vergessen worden wäre, die Faktoren y und $y-1$ des ersten Restes auszuscheiden, die Gleichung

$$y^6-3y^5+y^4+3y^3-2y=0$$

gefunden haben, deren Wurzeln $y=0, 1, 1, -1$ und 2 sind: die drei ersten geben zum vorliegenden Umstand Anlaß.

IV. Fall. Der letzte Divisor reducirt sich für $y=\lambda$ auf eine Zahl δ. Dividirt man D durch $y-\lambda$, so hat man, wenn K den Quotienten und L den Rest bezeichnet, $D=(y-\lambda)K+L$. Weil $y=\lambda$ das Polynom D auf eine Zahl δ bringt, und in L kein x vorkommt, so entspricht, da man gleichzeitig $D=0$, $Y=0$ haben soll, dem Werthe $y=\lambda$ ein unendliches x, die einzig mögliche Weise D Null zu machen. Für die Gleichungen

$$y^3x^3+xy^3(y-1)-1=0,\quad y^2x^2+y^3-y^2-1=0$$

erhält man die Finalgleichung $y^2(y-1)=0$ und den letzten Divisor

$xy-1=0$. Dem Werthe $y=1$ entspricht $x=1$, und $x=\frac{1}{0}$ dem Werthe $y=0$.

Anmerkung. I. Das System $y=\lambda$ und $x=\frac{1}{0}$ liefertt eigentlich keine wirkliche Auflösung der Aufgabe. Jedenfalls sind auch die beiden gegebenen Gleichungen miteinander unvereinbar, und es gibt gar keine eigentliche Auflösung, wenn für sämmtliche Wurzeln der Endgleichung der Divisor eine numerische Größe wird.

II. Ist der letzte Divisor von der Form $Ax+B$, wo A und B einerlei Funktionen von y sind, abgesehen von einem oder dem andern numerischen Faktor; so entspricht allen Wurzeln der Finalgleichung ein und derselbe Werth von x.

§. 58. Nachstehendes Beispiel zeigt, wie man zwischen drei Gleichungen mit den Unbekannten x, y, z eliminirt. Es seien nämlich

$$x+z^2-2y=0,\ x^2+y^2=2,\ z^2x=1.$$

Es wird zuvörderst y aus diesen Gleichungen weggeschafft, indem man sie zu je zwei mit einander verbindet. Dadurch erhält man zwei Finalgleichungen in x und z, aus welchen z eliminirt wird, was uns endlich eine Gleichung liefert, in der bloß noch x vorkommt. Man hat auf diese Weise

$$z^4+2xz^2+5x^2=8,\ z^2x=1;\ 5x^4-6x^2+1=0$$

Man findet $x=\pm 1$, $5x^2=1$, mithin die vier Wurzeln von x bekannt; hierauf bestimmt man z mittelst der Gleichung $z^2x=1$ u. s. f.

Anmerkung. Man wird leicht einsehen, daß derlei Rechnungen bei einer einigermaßen großen Anzahl von Gleichungen äußerst weitläufig, ja fast unausführbar sind, wenn ihre Grade höher aufsteigen. Wünschenswerth wäre es daher, wenn man sämmtliche Systeme der Werthe unserer Unbekannten finden könnte, ohne zu dieser Elimination seine Zuflucht zu nehmen. Die Hauptschwierigkeit läuft offenbar dahin aus, ohne Auflösung irgend einer der gegebenen Gleichungen, erstens die äußersten Grenzen der Wurzeln jeder Unbekannten, zweitens eine Grenze zu bestimmen, unter welche die Differenz der Werthe jeder dieser Unbekannten nicht fallen kann.

Ueber die Existenz der Wurzeln.

§. 59. Wir bezeichnen das Polynom $kx^n + px^{n-1} + \ldots + u$, wo k positiv angenommen wird, der Kürze halber durch fx, und construiren über den rechtwinkligen Achsen Ax, Ay (Fig. 1) die Curve MM′M″... die y=fx zur Gleichung hat. Jeder Abscisse AP entspricht eine Ordinate PM, und zwar nur eine einzige: Jede zur Achse Ay parallel gelegte Gerade schneidet mithin die Curve bloß in einem Punkte. Dieselbe bildet einen fortlaufenden Zug, erstreckt sich auf beiden Seiten ins Unendliche, keine Knotenpunkte darbietend und nur aus einem Zweig bestehend; übrigens kann sie verschiedenartige Wendungen machen. Diese Linie heißt parabolische Curve, wie wir schon im §. 158 der analytischen Geometrie in der Ebene angeführt haben.

Wenn die Curve die Achse der x in irgend einem Punkte k schneidet, so entspricht die Abscisse Ak dieses Punktes dem Werth y=o, ist mithin eine Wurzel der Gleichung fx=o. Die positiven Wurzeln stellen sonach die Abscissen der auf der rechten Seite des Ursprungs A befindlichen Durchschnittspunkte dar, während die negativen auf der linken Seite desselben liegen. Die positive Ordinate PM gibt einen oberhalb der Achse Ax befindlichen Punkt M der Curve, die negative Ordinate P′M′ hingegen liefert einen Punkt M′ unterhalb jener Achse. Damit auf eine Abscisse Ak, Wurzel der Gleichung fx=o, eine andere Wurzel Ak′ folgen könne, muß die Curve auf ihrem Wege sich wenden und der Achse Ax sich nähern, wodurch jene Windungen entstehen, wie sie in der Figur 1 zu sehen sind; hierbei liefern die Wendungen, welche sich nicht bis zur Achse erstrecken, keine reelle Wurzel. Da nun die Wurzeln aus der Gestalt der Curve sich ergeben, und an den verschiedenen Punkten der letztern die Richtung des Bogens mit jener der Berührenden zusammenfällt; so wollen wir die Neigung dieser Berührenden gegen die Abscissenachse aufsuchen.

Es sei BMM′ (Fig. 2) ein Bogenstück der durch die Gleichung y=fx gegebenen Curve; ferner seien M und M′ zwei Punkte dieses Bogens, x und y die Coordinaten von M, x+h und y+k die von M′: nämlich AP=x, PM=y, PP′=h, QM′=k. Setzt man x+h

für x, und y+k für y in die Gleichung $y = fx$, so hat man

$$y + k = fx + hf'x + \tfrac{1}{2}h^2f''x + \tfrac{1}{6}h^3f'''x \text{ 2c. } (\S. 33) \ldots\ldots (1),$$

woraus, da $y = fx$ ist,

$$\frac{k}{h} = f'x + \tfrac{1}{2}hf''x + \tfrac{1}{6}h^2f'''x \text{ 2c. } \ldots (2).$$

Das rechtwinklige Dreieck QMM′ gibt uns aber, wenn wir den Winkel, welchen die Secante M′MS mit der Achse Ax bildet, durch S darstellen; $\operatorname{tang} S = \frac{QM'}{QM} = \frac{k}{h}$, woraus folgt, daß der Ausdruck (2) der Werth von tang S ist. Je kleiner nun h wird, um so mehr nähert sich dieser Ausdruck der Größe $f'x$; gleichzeitig strebt dabei S dem Winkel T, welchen die Berührende im Punkt M mit Ax macht, gleich zu werden: man hat folglich $\operatorname{tang} T = f'x$ = der derivirten Funktion des Polynoms fx. Nimmt man also für x alle möglichen zwischen AP und AP′ enthaltenen Größen, so drücken die verschiedenen Werthe von $f'x$ jene der Tangenten sämmtlicher Winkel T aus, welche die auf einander folgenden Berührungslinien des Bogens MM′ mit der Achse Ax bilden. Dergleichen Winkel sind spitz (nach der rechten Seite zu, wenn $f'x$ das Zeichen + hat, wie es für den Bogen CM (Fig. 2) der Fall ist, hingegen stumpf, wenn $f'x$ das Zeichen — hat, wie es für den Bogen OM′ (Fig. 1) zutrifft. Die in den Punkten O, o, o′, O′, O″ gezogenen Berührungslinien, wo $f'x = o$ ist, laufen zur Abscissenachse parallel; die Wendungen der Curve sind eine Folge der Zeichenänderungen, welche das Polynom $f'x$ erfährt. Da wegen der Zusammensetzung des Polynoms kein Werth von x dasselbe unendlich groß machen kann, so steht die Berührungslinie auf der Abscissenachse nirgends senkrecht; die fragliche Curve kann daher keinen sogenannten Rückkehrpunkt oder eine Spitze, wie Figur 3, besitzen.

Anmerkung. Es läßt sich leicht zeigen, daß man durch den Punkt M zwischen der Curve und der Berührenden, welche $y' - y = f'(x)(x' - x)$ zur Gleichung hat, keine andere Gerade ziehen kann. In der That, die Gleichung einer andern durch den Punkt M gehenden Geraden ist $y' - y = \alpha(x' - x)$, wo α die Tangente des Winkels dieser Linie mit der Abscissenachse, x und y die Coordinaten, welche dem Punkte M der Curve insbesondere zukommen, x′ und y′ dagegen diejenigen der beliebi-

gen Punkte unserer geraden Linie bezeichnen. Ist nämlich δ die Ordinatendifferenz der gegebenen Curve und der Berührenden, dagegen δ' die Differenz der Ordinaten unserer Curve und der Geraden; so hat man

$$\delta = \tfrac{1}{2} h^2 f''x \text{ ic.}, \quad \delta' = h(f'x - \alpha) + \tfrac{1}{2} h^2 f''x + \text{ ic.},$$

in welchen Ausdrücken sich die Größe h offenbar immer so klein nehmen läßt, daß der absolute Werth von δ' größer als der von δ werde, daß also zwischen der Curve und der Berührenden die gedachte Gerade nicht durchgehen kann, außer wenn auch für sie $\alpha = f'x$ hat, in welchem Falle dieselbe mit der Berührenden zusammenfällt.

§. 60. Das Dreieck HMQ (Fig. 2) gibt $HQ = hf'x$, mithin $P'H = fx + hf'x =$ der Tangentenordinate des Punktes H, welcher $x+h$ zur Absciffe hat. Die Curvenordinate wird aber durch den Ausdruck (1) bestimmt, dessen beiden ersten Glieder den Werth von $P'H$ ausmachen; nan hat nämlich:

$$P'M' = y + k = P'H + \tfrac{1}{2} h^2 f''x + \tfrac{1}{6} h^3 f'''x \ldots,$$

wo h so klein, als man nur will, werden kann; das Zeichen der zu $P'H$ hinzugefügten Größe hängt daher von dem des ersten Gliedes $\tfrac{1}{2} h^2 f''x$ ab, d. h. von demjenigen, mit welcher die Größe $f''x$ behaftet ist, weil der Faktor h sich auf dem Quadrat vorfindet. Die Curvenordinate $P'M'$ übertrifft folglich die Tangentenordinate $P'H$, oder wird von derselben übertroffen in den an M nahe liegenden Punkten, je nachdem die Größe $f''x$ positiv oder negativ ist; und da dieß statt hat, welches Zeichen h auch haben mag, so gilt das eben Gesagte sowohl für die rechte als linke Seite des Berührungspunktes M. Der Bogen unserer Curve kehrt also an dieser Stelle seine hohle (concave) oder erhabene (convexe) Seite nach oben zu, je nachdem, für den dem x gegebenen Werth, fx das Zeichen + oder − hat.

Das Vorhergehende gilt auch durchaus für den Fall, wo der Bogen der Curve unter der Absciffenachse liegt, wie sich durch die nämliche Schlußfolge zeigen läßt. Vertauscht man übrigens y mit $y, -i$, so verwandelt sich die Gleichung $y = fx$ in $y, = fx + i$; das letzte Glied u von fx ist auf solche Weise bloß in $u + i$ übergegangen, was keineswegs die Derivationen $f'x$, $f''x$ ... ändert. Diese Transformation läuft offenbar dahin aus, die Absciffenachse sich selbst parallel zu verlegen, um sie in der will-

führlichen Entfernung i aufzutragen, wobei uns alsdann nichts hindert, die Biegungen unserer Curve sämmtlich über der neuen Abscissenachse liegend anzunehmen, und den oben aufgestellten Lehrsatz in Anwendung zu bringen. Will man die Lage des Bogens gegen die Abscissenachse hin vergleichen, so ist leicht ersichtlich, daß unsere Regel mit folgender gleichlautend ist: die Curve wendet ihre hohle oder erhabene Seite der Abscissenachse zu, je nachdem fx und $f''x$ verschiedene oder einerlei Zeichen haben.

§. 61. Derjenige Punkt I (Fig. 5) der Curve, wo die Concavität derselben in eine Convexität übergeht, heißt Flexions- oder Beugungspunkt. Da für dergleichen Punkte der Werth $f''x$ vom positiven Zustand in den negativen übergeht, so muß die Abscisse x eines solchen Punktes eine Wurzel der Gleichung $f''x = 0$ sein. Es durchschneidet und berührt daselbst die Tangente zu gleicher Zeit die Curve, wie man aus der des dritten Gliedes entbehrenden Entwicklung (1) sieht, welche in diesem Falle wird

$$y + k = fx + hf'x + \tfrac{1}{6}h^3 f'''x + \text{rc.}$$
$$= \text{der Ordinate } P'H \text{ der Tangente } + \tfrac{1}{6}h^3 f'''x + \text{rc.}$$

Da man nun wieder h sehr klein wählen kann, in der Art, daß das Zeichen der letzten Reihe das Zeichen ihres ersten Gliedes erhält, jenes aber mit h sich ändert, je nachdem man die nächsten Punkte an M rechts oder links von demselben nimmt; so wird die Tangente auf der einen Seite des Punktes M oberhalb und auf der andern Seite unterhalb der Curve liegen, was nicht statt finden würde, wenn $f''x$ nicht Null wäre. Um also die Abscissen, denen Beugungspunkte entsprechen, zu erhalten, muß man die Gleichung $f''x = 0$ auflösen; die reellen Wurzeln derselben werden die Punkte bestimmen, wo ein solcher Umstand eintritt. Sucht man die diesen Wurzeln zugehörigen Werthe von $f'x$, so erhält man die Richtungen der Berührenden für jene Punkte.

§. 62. Bei jeder Wendung der Curve existirt ein Punkt O, O'..., in welchem die Tangente zur Abscissenachse parallel läuft und die Ordinate ein Maximum oder ein Minimum wird, d. h. größer oder kleiner ist als diejenigen, welche ihr unmittelbar vorangehen oder nachfolgen. Die Wurzeln der Gleichung $f'x = 0$ sind also die

Abscissen für derlei Punkte. Um das Maximum von dem Minimum zu unterscheiden, stelle man folgende Betrachtung an. Der Punkt, dessen Ordinate ein positives oder negatives Maximum ist, gehört einem Bogen an, der die hohle Seite der Abscissenachse zukehrt, und in diesem Falle haben, wie wir wissen, fx und $f''x$ verschiedene Zeichen; diese Zeichen sind hingegen gleichartig, im Fall ein Minimum statt findet, das einem der Achse die convexe Seite zukehrenden Bogen entspricht. In der That entbehrt, weil $f'x=o$, die Reihe (1) ihres zweiten Gliedes, und die Curvenordinate $P'M'$ (Fig. 2) reducirt sich auf

$$P'M' = fx + \tfrac{1}{2}h^2 f''x + \text{ꝛc.} = \text{Ordinate } PM + \tfrac{1}{2}h^2 f''x \;.\;.\;.\;.\; (4).$$

Für h sehr klein erhält aber diese Reihe das Zeichen von $f''x$, h mag positiv oder negativ sein: die der Ordinate PM unmittelbar vorangehenden oder nachfolgenden Ordinaten übertreffen also die erstern, sobald fx und $f''x$ das nämliche Zeichen haben; das Gegentheil findet statt, wenn diese Zeichen verschieden sind. Für das positive oder negative Maximum besitzen folglich fx und $f''x$ entgegengesetzte Zeichen; dieselben sind dagegen gleichartig im Fall des Minimums.

Um diesen Satz an einem Beispiele zu erläutern, sei

$$y = x^4 - \frac{16x^3}{3} + \frac{19}{2}x^2 - 6x + \frac{5}{6} = fx; \text{ hieraus}$$

$$f'x = 4x^3 - 16x^2 + 19x - 6, \quad f''x = 12x^2 - 32x + 19.$$

Wird $f'x=o$ gesetzt, so entsteht $x=\tfrac{1}{2}$, $\tfrac{3}{2}$ und 2. Diese Wurzeln sind auf der Achse Ax von A nach P, P' und P'' getragen worden (Fig. 4); die ihnen entsprechenden Ordinaten sind die fraglichen Maxima oder Minima, nämlich

$$PO = -\frac{19}{48}, \quad P'O'' = +\frac{13}{48}, \quad P''O'' = +\frac{1}{6}.$$

Für $x=o$ findet man $AB=\tfrac{5}{6}$, die Curve geht demnach durch die Punkte $BOO'O''$. Die Gleichung $f''x=o$ liefert $x=o, 89\ldots$ und $1, 77\ldots$ für die Abscissen AQ, AQ' der Beugungspunkte I, I'. In O existirt ein negatives, in O' dagegen ein positives Maximum, in O'' endlich ein posititives Minimum. Die beiden Durchschnittspunkte der Curve mit der Achse liegen in C und D. $AD=1$ und AC sind die reellen Wurzeln der Gleichung $fx=o$, deren zwei andere imaginär ausfallen.

§. 63. Die Wurzeln der Gleichung $f'x=0$ stellen die Abscissen derjenigen Punkte der Curve dar, in denen die Tangente parallel zur Achse der x läuft, und wir haben gesehen, daß für dergleichen Punkte die Ordinate ein Maximum oder Minimum wird, je nachdem die Zeichen von fx und $f''x$ beschaffen sind. Verschwindet aber für irgend eine dieser Wurzeln außerdem noch $f''x$, so existirt kein Maximum oder Minimum mehr, es findet vielmehr daselbst eine zur Achse parallel laufende Biegung statt, wie Fig. 5 zeigt. In der That ist der Theil der Entwicklung (4), welchen man der Ordinate PM noch hinzuzufügen hat, alsdann $\frac{1}{6}h^3 f'''x + \ldots.$, woraus sich ergibt, daß, weil das erste Glied mit h sein Zeichen ändert, der Bogen auf der einen Seite des Berührungspunktes M concav, auf der andern Seite dagegen convex ist. Da dieser Werth von x gleichzeitig $f'x=0$ und $f''x=0$ Null macht, so hat die erstere dieser Gleichungen zwei gleiche Wurzeln (§. 51). Ein solcher Fall ergibt sich, wenn zwei successive Wendungen sich in eine zusammenziehen, indem der Bogen, welcher ein Maximum mit dem nächstfolgenden verbindet, verschwindet, und die Tangenten daselbst zusammenfallen. Ebenso kann auch $f'''x$ noch Null werden. Der unserer Ordinate hinzuzufügende Theil würde in dem Ausdruck (4) sich dann auf $\frac{1}{24}h^4 f^{IV}x + \ldots$ reduciren, welcher einerlei Zeichen mit $f^{IV}x$ auf beiden Seiten des Berührungspunktes behielte; es findet folglich daselbst ein Maximum oder Minimum statt, je nachdem fx und $f^{IV}x$ entgegengesetzte oder gleichartige Zeichen haben, und drei Wendungspunkte unserer Curve ziehen sind alsdann in einen einzigen zusammengezogen. Im Allgemeinen, wenn ein Maximum oder Minimum statt haben soll, wobei die Tangente eine zur Abscissenachse parallele Lage annimmt, muß die erste, für die Wurzel von $f'x=0$ nicht Null werdende Derivation von einer geraden Ordnung sein; das Zeichen dieser Derivation dient, um das Maximum vom Minimum zu unterscheiden. Damit ferner die Wurzel von $f''x=0$ einem Beugungspunkt angehöre, muß die erste nicht Null werdende Derivation von $f''x$ von einer ungeraden Ordnung sein.

Aus der Form der parabolischen Curve ergibt sich, daß auf eine Convexität eine Concavität kommen muß, und umgekehrt; ferner folgt ein positives Maximum auf ein negatives Maximum, wenn der Bogen die Abscissenachse schneidet oder ein positives Minimum, wenn er dieselbe nicht trifft; auf gleiche Weise folgt dem negativen Maximum ein negatives Minimum oder ein positives Maximum. Ereignet es

sich indessen, daß die Curve in dem Beugungspunkt selbst eine zur Abscissenachse parallel laufende Tangente hat (Fig. 5), ein Fall, in welchem $f'x$ und $f''x$ gleichzeitig Null werden; so haben jene Umstände nicht mehr statt, und es entsteht ein besonderer Punkt, indem nun Maximum und Minimum gleichzeitig in eins zusammenfallen. Findet man außerdem noch $f'''x=o$, so hat man den vorigen Fall wieder mit dem Unterschiede, daß drei Punkte dieser Gattung sich in einem einzigen zusammengezogen haben, u. s. f.

In sofern die Berührende mit der Abscissenachse einen Winkel macht, ist $f'x$ nicht mehr Null. Die Curve hat, wie wir gesehen, einen Beugungspunkt, wenn $f''x=o$ ist; diese Beugung verschwindet aber, wenn die nämliche Wurzel der letztern Gleichung auch der Gleichung $f'''x=o$ Genüge thut und zwei Wendungspunkte reduciren sich auf einen einzigen. Wird außerdem auch $f^{IV}x$ Null, so kehrt die Beugung wieder; u. s. f. Kurz, sämmtliche für den Fall, daß die Tangente eine zur Abscissenachse parallele Lage hat, angegebene Umstände können ebenfalls eintreten, wenn diese Lage eine schiefe ist, wofern einige Wendungspunkte zum Verschwinden gebracht werden.

§. 64. Aus Allem diesem zusammengenommen folgt, daß, wenn zwei Abscissen AP, AP′ (Fig. 1) für fx zwei Resultate mit entgegengesetztem Zeichen PM, P′M′ liefern, die Punkte M und M′ der Curve auf verschiedenen Seiten der Abscissenachse liegen; wegen des stetigen Zusammenhangs der Curve muß es daher in einem Zwischenpunkt k einen wirklichen Durchschnitt derselben mit der Abscissenachse geben. Doch kann dieß in dem Intervall PP′ auch 3, 5 ... mal geschehen, wenn die Curve Biegungen darbietet, wie wir sie in dem punktirten Bogen der 8ten und 9ten Figur sehen, wo die Linie von m nach M gelangt, indem sie die Achse eine ungerade Anzahl mal schneidet.

Dagegen zeigen zwei Abscissen AP, AP″, welche für fx Resultate mit einerlei Zeichen PM, P″M″ liefern, an, daß die zwei Punkte M, M″ der Curve auf der nämlichen Seite der Abscissenachse liegen. Der Bogen, welcher diese beiden Punkte vereinigt, kann daher die Achse nicht treffen; oder, wenn die Umstände es gestatten, daß sie von ihm geschnitten wird, so muß dieß in 2, 4 ... Punkten geschehen, wie man es an dem punktirten, von m nach M gehenden Bogen in der 6ten und 7ten Figur sieht.

Bei einer weder geraden noch ungeraden Anzahl von Durchschnitts-

punkten der Curve mit der Achse xx' ist der Fall, wo letztere von der erstern berührt wird, als Ausnahme zu betrachten (Fig. 10). Denn alsdann werden fx und $f'x$ für die Abscisse $x=a$ des Berührungspunktes k gleichzeitig Null sein, was eintrifft, wenn die Gleichung $fx=o$ die doppelte Wurzel a hat: zwei Durchschnittspunkte des Bogens MkM' haben sich alsdann in einen einzigen vereinigt und es muß dieser Berührungspunkt k für zwei Durchschnittspunkte gelten. Brächte $x=a$ außerdem noch die Derivation $f''x$ zum Verschwinden, so würde der einzige Durchschnitts- und Berührungspunkt einen Beugungspunkt darstellen, und wegen des Faktors $(x-a)^3$ für drei Wurzeln gelten. Ueberhaupt wird, wenn fx den Faktor $(x-a)^m$ enthält, die Wurzel $x=a$ für m Durchschnittspunkte zählen, weil sämmtliche Derivationen bis $f^{m-1}x$ Null sein werden, und wirklich m Punkte und m Krümmungen sich in eins zusammen gezogen haben.

Setzt man also für x in fx nach und nach zwei verschiedene Werthe, und erhält dadurch Resultate mit entgegengesetzten Zeichen; so liegt zwischen jenen Werthen eine ungerade Anzahl von Wurzeln, wenigstens immer eine Wurzel. Haben dagegen die Resultate einerlei Zeichen, so liegt zwischen den substituirten Werthen keine Wurzel, oder es sind dieselben in gerader Anzahl vorhanden.

§. 65. Wir wollen jetzt die beiden Fälle, in welchen die Gleichung von einem geraden oder ungeraden Grade ist, näher untersuchen.

I. Wenn die Gleichung von einem geraden Grade ist, so wird, indem man für x die Grenze AP (Fig. 6 und 7) der positiven Wurzeln nimmt, oder das erste Glied kx^n des Polynoms positiv und größer als die Summe der negativen Glieder macht, die Ordinate PM positiv sein. Unter den nämlichen Umständen werden sich auch $f'x$ und $f''x$ positiv herausstellen; unsere Curve wendet mithin vom Punkte M an bis ins Unendliche ihre Convexität der Abscissenachse zu, von welcher sie sich immer mehr und mehr entfernt; dabei bilden ihre verschiedenen Berührenden mit jener Achse spitze Winkel. Ist Ap die Grenze der negativen Wurzeln, so bleiben fx und $f''x$ noch positiv, weil die Exponenten n und $n-2$ des ersten

Gliedes gedachter Polynome gerade sind; die Curve kehrt daher gleichfalls bis ins Unendliche fort ihre Convexität der Achse zu, von welcher sie sich oberhalb derselben immer mehr und mehr entfernt.

Die Derivation $f'x$ wird aber negativ, weil $n-1$ ungerade ist; die Berührenden unserer Curve machen mithin von dem Punkte m an bis ins Unendliche stumpfe Winkel mit der Achse der x.

Ist das letzte Glied u von fx negativ, so wird $y=-u$ für $x=o$, und man muß die Länge $AB=-u$ (Fig. 6) unterhalb des Ursprungs A tragen: die Curve geht daher durch die drei Punkte m, B und M und schneidet nothwendigerweise mindestens einmal auf der Linken in k', und einmal auf der Rechten in k die Achse; es kann jedoch dieselbe auf jeder Seite in 3, 5 ... Punkten von der Curve geschnitten werden, insofern diese hinlänglich ausgedehnte Einbiegungen macht, um jene erreichen zu können, wie an der punktirten Linie ersichtlich ist. Jede Gleichung von geradem Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat also eine ungerade Anzahl sowohl positiver als negativer Wurzeln, mindestens aber immer eine von jeder Gattung.

Ist das letzte Glied von fx positiv, so wird für $x=o$ die Ordinate $y=+u$, welche man auf AB oberhalb des Ursprungs A zu tragen hat (Fig. 7). Die Curve geht durch die drei, oberhalb der Achse xx' liegenden Punkte m, B und M; man ist jedoch in der Ungewißheit, ob sie sich hinlänglich genug senkt, um jene Achse zu erreichen. Gibt es aber Durchschnittspunkte, so sind solche sowohl auf der rechten als der linken Seite in gerader Anzahl vorhanden, wie man es an der punktirten Linie sieht. Jede Gleichung von geradem Grade, deren letztes Glied positiv ist, hat also entweder keine reelle Wurzel oder eine gerade Anzahl sowohl positiver als negativer Wurzeln.

II. Wenn fx von ungeradem Grade ist, so gilt das eben Gesagte in seiner ganzen Ausdehnung für die Gestalt der Curve auf der Seite der positiven x. Von dem Punkte M an (Fig. 8 und 9) ist dieselbe ebenfalls nach oben zu concav; ins Unendliche sich erstreckend entfernt sie sich fortwährend von der Abscissenachse, indem ihre Tangenten mit dieser Achse spitze Winkel bilden. Nimmt man

für x die Grenze Ap der negativen Wurzeln, so wird, weil der Exponent n des ersten Gliedes von fx und der Exponent $n-2$ von $f''x$ ungerade ist, das erste Glied negativ sein, und man hat eine negative Ordinate pm und einen nach oben zu seine Convexität kehrenden Bogen. Außerdem macht die durch den unterhalb der Achse liegenden Punkt m geführte Tangente einen spitzen Winkel mit der Achse der x, weil der Exponent $n-1$ des ersten Gliedes von $f'x$ gerade ist.

Ist nun das letzte Glied u von fx negativ, so entsteht für $x=o$ die Ordinate $y=-u$, welche man auf AB unterhalb A tragen muß; die Curve geht daher von m nach B, und dann nach M. Hieraus ist ersichtlich, daß dieselbe die Achse in dem Intervall Ax' nicht schneiden kann, solche aber gewiß einmal zwischen A und P trifft. Die durch Einbiegungen etwa entstehenden Durchschnittspunkte werden übrigens in gerader Anzahl von x' nach A und in ungerader von A nach P vorkommen. Jede Gleichung von ungeradem Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat also immer eine ungerade Anzahl von positiven Wurzeln, wenigstens eine. Besitzt die Gleichung auch negative Wurzeln, so hat sie deren eine gerade Anzahl.

Ist das letzte Glied u von fx positiv, so trägt man $AB=u$ (Fig. 9) oberhalb des Ursprungs A: die Curve geht von m nach B und M und schneidet die Achse zwischen A und p in einer ungeraden Anzahl von Punkten. Dabei kann sie die Achse zwischen A und P schneiden oder auch nicht; trifft sie dieselbe, so muß dieß in einer geraden Anzahl von Punkten geschehen. Jede Gleichung von ungeradem Grade, deren letztes Glied positiv ist, hat also eine ungerade Anzahl von negativen Wurzeln, zum wenigsten eine; dabei kann sie entweder keine positive Wurzel oder eine gerade Anzahl derselben besitzen.

Der Fall, in welchem die Curve von der x Achse berührt wird, macht von jenen Regeln keine Ausnahme, weil, wie wir gesehen, die Gleichung $fx=o$ alsdann gleiche Wurzeln hat, und man solche Wurzeln als einer gleichen Anzahl von der Curve und Achse gemeinschaftlichen Punkten entsprechend ansehen muß.

§. 66. Folgen in einer geordneten Gleichung auf die ersten positiven Glieder lauter negative Glieder, so hat dieselbe nur eine einzige positive Wurzel, die übrigen sind negativ oder imaginär.

Denn die Gleichung $kx^n + \ldots + qx^i - rx^{i-1} - sx^{i-2} \ldots - u = o$ verwandelt sich in $kx^{n-i} \ldots + q = \frac{r}{x} + \frac{s}{x^2} \ldots + \frac{u}{x^i}$, wenn man durch x^i dividirt. Nun hat die vorgelegte Gleichung eine positive Wurzel α, weil das letzte Glied negativ ist; $x = \alpha$ macht daher die beiden Glieder der vorigen Gleichung einander gleich. Durch einen anderweitigen Werth von x die Gleichheit dieser Glieder zu bewerkstelligen, ist aber nicht möglich, weil, x mag wachsen oder abnehmen, das eine Glied vermehrt, das andere dagegen vermindert wird.

§. 67. Da eine Gleichung von geradem Grade die reellen Wurzeln immer in gerader Anzahl, und eine Gleichung von ungeradem Grade die reellen Wurzeln stets in ungerader Anzahl besitzt; so folgt hieraus, daß die Gesammtzahl der imaginären Wurzeln immer gerade sein wird. Eine Gleichung, welche keine einzige reelle Wurzel hat, ist nothwendigerweise von einem geraden Grad, mit einem letzten, positiven Gliede. Sind sämmtliche Wurzeln der Gleichung $f'x = o$ reelle, so hat die Curve $(n-1)$ zur Achse der x parallel laufende Tangenten, und $n-1$ Wendungspunkte. Im Fall, daß jeder dieser Bogen die Achse erreicht, sind auch die n Wurzeln der Gleichung $fx = o$ reell. Da es alsdann abwechselnd positive und negative Maxima gibt: so haben fx und $f''x$ immer verschiedene Zeichen für alle Wurzeln von $f'x = o$, und ihr Produkt bleibt negativ.

Die reellen Wurzeln werden aber durch zusammengehörige imaginäre Wurzelpaare ersetzt, wenn derlei doppelte Durchschnittspunkte fehlen, d. h. wenn Minima an die Stelle der Maxima treten, in welchem Fall die Biegung nicht die erforderliche Ausdehnung erhält, um die Achse zu erreichen.

Wenn die Gleichung $f'x = o$ imaginäre Wurzelpaare hat (denn dergleichen Wurzeln sind immer in gerader Anzahl vorhanden), so verliert die Curve, deren Gleichung $y = fx$ ist, eine gleiche Anzahl von Wendungen, und die Gleichung $fx = o$ eben soviele reelle Wurzelpaare. Im Allgemeinen hat die Gleichung $fx = o$ eben soviele imaginäre Wurzeln als die Gleichung $f'x = o$, oder eine größere Anzahl, nämlich eben soviel als $f'x = o$ deren besitzt, und außerdem noch eben soviel als diese letzte Gleichung reelle Wurzeln hat, welche den Größen fx und $f''x$ einerlei Zeichen geben, oder das Produkt $fx \times f''x$

$fx \times f''x$ positiv machen; denn die Durchschnittspunkte der Curve mit der Achse der x fehlen paarweise, wenn in der Curve Minima vorkommen.

Sind sämmtliche Wurzeln der Gleichung $fx=o$ reell, so sind es auch die der Gleichung $f'x=o$, $f''x=o$, u. s. w.; das Umgekehrte findet jedoch nicht statt.

§. 68. Ist eine Gleichung gegeben, so kann man leicht die Gestalt der durch die Gleichung $y=fx$ dargestellten Curve erkennen. Es diene als Beispiel zuvörderst die Gleichung vom dritten Grade $y=kx^3+px^2+qx+r$. Die ins Unendliche laufenden Curvenäste haben die in Fig. 8 und 9 angegebene Lage. Sind die Wurzeln der Gleichung $f'x=o$, welche vom zweiten Grad ist, reell; so hat die Curve zwei der x Achse parallelgehende Berührenden und zwei Wendungen. Wenn die Achse xx' (Fig. 11) diese beiden Wendungen schneidet, so hat die Gleichung ihre drei Wurzeln reell. In dem Fall aber, daß gedachte Achse, wie AA' oder BB', dieß nicht thut, hat unsere Gleichung nur eine reelle Wurzel, welche positiv oder negativ ist, je nachdem das letzte Glied r das Zeichen — oder + hat. Zwischen diesen beiden Zuständen liegt der, wo die Achse xx' eine der beiden Wendungen berührt; es tritt ein solcher Fall ein, wenn $fx=o$ und $f'x=o$ eine gemeinsame Wurzel α haben; $(x-\alpha)^2$ ist alsdann ein Faktor von fx. Hat man $fx=(x-\alpha)^3$, so vereinigen sich die zwei Wendungen in eine; die Curve liegt dann da, wie MkM'' (Fig. 10) zeigt, in welchem Falle sie von der Achse im Wendepunkt k berührt wird.

Sind die beiden Wurzeln der Gleichung $f'x=o$ imaginär, so gibt es keine Wendungspunkte; die Curve hat die in der Fig. 12 angegebene Gestalt, und die vorgelegte Gleichung besitzt nur eine reelle Wurzel, deren Zeichen dem des letzten Gliedes r entgegengesetzt ist.

Für die Gleichung vom 4ten Grade $y=kx^4+\ldots$ ist die Derivation $f'x=o$ vom 3ten Grade. Sind die Wurzeln der letztern reell, so hat die Curve drei Wendungen (Fig. 13); die Achse der x kann dieselben alle treffen, in welchem Falle die Gleichung $fx=o$ dann ihre 4 Wurzeln reell hat. Schneidet dagegen die Achse, wie AA', nur eine jener Wendungen, oder, wie BB', gar keine; so hat die vorgelegte Gleichung nur zwei reelle Wurzeln, oder bloß imaginäre. Die Curve hat zwei Beugungspunkte, welche mittelst der Gleichung $f''x=o$ bestimmt werden. Besitzt die Gleichung $f'x=o$ nur eine reelle Wurzel, so kommt in der Gleichung $f''x=o$ keine solche vor, und die Curve hat

keine Beugungspunkte, und bietet nur eine Wendung dar, welche die Achse in zwei Punkten schneiden, oder auch nicht schneiden, kann; es gibt also zwei reelle Wurzeln, oder vier imaginäre.

Für die Gleichung vom 5ten Grade hat die Curve eine von den in Figuren 14 oder 11 oder 12 angedeuteten Formen.

Ohne uns auf den im §. 30 aufgestellten Lehrsatz zu stützen, haben wir erkannt, daß jede Gleichung eine reelle Wurzel zuläßt, den Fall ausgenommen, wo der Grad derselben gerad und das letzte Glied positiv ist. Wir behalten uns vor, später nachzuweisen, daß selbst in diesem Fall, zum wenigsten ein algebraisches Symbol, eine Funktion der Coefficienten, existirt, welches für x substituirt, das Polynom fx auf Null bringt. Wir wären demnach vergewissert, daß jede Gleichung eine reelle oder imaginäre Wurzel besitzt, und zwar hat sie nach dem erwähnten Paragraphen immer genau n dergleichen Wurzelwerthe.

§. 69. Es seien $a, b, c \ldots -a', -b' \ldots$ die reellen Wurzeln einer Gleichung $fx = T(x-a)(x-b)\ldots(x+a')(x+b')\ldots$ Man setzt hierbei voraus, daß $T=0$ keine reellen Wurzeln zuläßt; das Polynom T ist daher von einem geraden Grad mit einem positiven letzten Gliede. Da das letzte Glied von fx das Produkt aus dem letzten Gliede von T mit den Größen $-a, -b \ldots +a', +b' \ldots$ ausdrückt; so wird sein Zeichen nur von der geraden oder ungeraden Anzahl der negativen Faktoren bedingt. Das letzte Glied einer Gleichung ist also positiv oder negativ, je nachdem die Zahl der positiven Wurzeln gerade oder ungerade ist, die Zahl der imaginären und negativen mag übrigens sein, welche sie wolle.

§. 70. Wir nehmen an, daß man die Gleichung $f'x=0$ aufgelöst, und die Maxima und Minima der Curve $y=fx$ von einander unterschieden habe, indem die Zeichen von fx und $f''x$ für die Werthe von x, welche der Gleichung $f'x=0$ genügen, mit einander verglichen worden sind. Dabei wollen wir ferner annehmen, daß diesen Wurzeln M Maxima und m Minima entsprechen. Dieß vorausgesetzt, stellen wir uns nun vor, daß ein beweglicher Punkt vom negativen Unendlichen ausgehend diese Curve beschreibe, indem er bis ins positive Unendliche fortläuft. Da nun in der Nähe des Ursprungs die Wendungen ihren Anfang nehmen, so wird der bewegliche Punkt, während einer bedeutend großen Ausdehnung seines Laufes, die Achse nicht treffen. Nach jedem Maximum wird er gegen die Achse zu gehen, und dieselbe

schneiden, es sei denn, daß die Curve sich zurückwendet, und dadurch die Entstehung eines Minimums veranlaßt. Jedes Minimum wird sonach den durch das benachbarte Maximum angezeigten Durchschnittspunkt vernichten. Eine nothwendige Folge hiervon ist, daß $M - m + 1$ die Zahl der Durchschnittspunkte, d. h. die der reellen Wurzeln der Gleichung $fx = 0$, angibt: wir fügen hier das Glied $+ 1$ deßhalb noch hinzu, weil wir, bei der Bewegung unseres Punktes, den Durchschnitt, welcher dem ersten Maximum vorangeht oder dem letzten folgt, nicht mitgezählt haben. Gibt es eben soviele Maxima als Minima, oder ist $M = m$, so ist nur eine reelle Wurzel vorhanden, und die Gleichung ist alsdann von einem ungeraden Grade. Gibt es kein Minimum, so ist nur ein Maximum möglich, und die Gleichung hat zwei reelle Wurzeln; dieselbe ist von einem geraden Grade, und das Maximum negativ. Gibt es endlich kein Maximum, so findet man nur ein Minimum und keine reelle Wurzel; die Gleichung ist von einem geraden Grade, und das Minimum positiv.

Anmerkung. Wie die Gleichung $y = fx$ eine Curve repräsentirt, so können auch die Derivationen $y = f'x$, $y = f''x$ u. s. w. durch Curven dargestellt werden. Die erste dieser Curven veranschaulicht die Lagen der Berührenden, die zweite die Wendungen der ursprünglichen Curve $y = fx$. Aehnliches gilt von den, durch je drei aufeinander folgenden Derivationen, repräsentirten drei Curven, von denen die erste als ursprüngliche angesehen wird.

Das Aufsuchen der incommensurabeln Wurzeln.

§. 71. Newtons Methode. Nachdem man die rationalen, ferner auch die gleichen Wurzeln aus einer vorgelegten Gleichung weggeschafft hat, handelt es sich darum, die irrationalen Wurzeln derselben zu finden. Wir nehmen deßhalb an, daß man dahin gelangt sei, einen Näherungswerth γ von einer dieser Wurzeln anzugeben, in der Art daß zwischen den Größen α und ϑ nicht noch eine andere Wurzel liege. Aus dem Zeichen des Resultats, was die Substitution von $x = \gamma$ in fx liefert, werden wir beurtheilen, ob die gesuchte Wurzel zwischen α und γ, oder zwischen γ und ϑ enthalten ist: wir nehmen an, daß sie zwischen α und γ liege. Setzen wir hierauf $x = \beta$, eine

Zahl, welche zwischen die beiden letztgenannten fällt; so werden wir erfahren, ob unsere Wurzel zwischen α und β, oder zwischen β und γ sich befindet. Auf solche Weise werden die Grenzen immer näher an einander gerückt, und der gesuchte Wurzelwerth beliebig genau bestimmt. Dieses Verfahren würde jedoch für große Annäherungen unausführbar sein; man wendet es daher nur an, um eine Zahl α zu erhalten, welche von dem wahren Werthe der Wurzel um weniger als $\frac{1}{10}$ abweicht. Macht man $x=\alpha+y$, wo y den noch fehlenden Theil der Wurzel bedeutet, und substituirt in $fx=0$; so hat man

$$f\alpha+y\,f'\alpha+\tfrac{1}{2}\,y^2\,f''\alpha+\ldots+k\,y^n=0.$$

Hier ist y ein eigentlicher Bruch, und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y stellen das Polynom, fx, und die daraus abgeleiteten in der Art dar, daß überall α statt x zu setzen ist.

Die Newton'sche Methode besteht nun darin, die Potenzen y^2, $y^3\ldots$, als sehr klein, außer Acht zu lassen; die transformirte Gleichung geht hierdurch in $f\alpha+y\,f'\alpha=0$ über, woraus

$$y=-\frac{f\alpha}{f'\alpha}=-\frac{k\alpha^n+p\,\alpha^{n-1}+\ldots t\,\alpha+u}{nk\alpha^{n-1}+p(n-1)\alpha^{n-2}\ldots+t}$$

Setzen wir diesen Bruch, oder vielmehr seinen Näherungswerth $=s$, so gibt $y=s$ als zweite Annäherung $x=\alpha+s$. Macht man dann $\alpha+s=\alpha_1$, und bedeutet y_1 die neue Verbesserung; so wird dieselbe durch den vorigen Ausdruck, in welchem α_1 statt α gesetzt ist, dargestellt werden. Hieraus ergibt sich ferner $x=\alpha+s+y_1$, u. s. f.

Es diene als Beispiel die Gleichung $x^3-2x-5=0$. Für $x=2$ und 3 findet man die Resultate -1 und $+16$, woraus ersichtlich ist, daß zwischen 2 und 3 eine Wurzel, welche der ersten Zahl näher liegt, eingeschlossen ist. Für $x=2,1$ erhält man das Resultat $0,061$; also ist die Zahl $2,1$ größer als x, von welchem sie weniger als 2 abweicht. Setzt man $\alpha=2,1$, so bekommt man

$$s=-\frac{\alpha^3-2\alpha-5}{3\alpha^2-2}=-\frac{0,061}{11,23}=-0,0054.$$

Indem wir nicht über die Zehntausendtheile hinausgehen, erhalten wir als erste Annäherung $x=2,0946$. Nehmen wir diese Zahl für den Werth von α, so entsteht

$$s=-\frac{0,000541550536}{11,16204748}=-0,00004851.$$

Unsere vierte Decimalstelle war also nicht richtig, und man findet $x = 2,09455149$. Diese Verfahrungsweise wird nun weiter fortgesetzt, um die letzten Decimalstellen zu verbessern, und dem wahren Werthe von x näher zu kommen. Behält man in der Entwicklung das Glied y^2 bei, so hat man

$$y = -\frac{f\alpha}{f'\alpha + \frac{1}{2} y f''\alpha}.$$

Nachdem also die erste Correction s gefunden worden, substituirt man dieselbe statt y in den Nenner, wodurch ein genauerer Werth erhalten wird. So gibt in unserm Beispiele $s = -0,0054$ in $\frac{1}{2} y f''\alpha$ eingeführt, das Resultat $-0,034$; der Nenner verwandelt sich in 11,196 und man findet $y = 0,0054483$, eine Größe, deren letzte Decimalstelle bloß fehlerhaft ist.

Als zweites Beispiel sei die Gleichung $x^3 - x^2 + 2x = 3$, deren eine Wurzel zwischen 1, 2 und 1, 3 liegt, da diese Zahlen $-0,312$ und $+0,107$ als Resultate geben. Machen wir $\alpha = 1,3$, so kommt

$$y = -\frac{0,107}{4,47} = -0,02, \text{ und } x = 1,28.$$

Aus $\frac{1}{2} y f''\alpha = (3\alpha - 1) y = 2,9y$ entsteht der um $-0,058$ vermehrte Nenner 4,412; woraus $y = -0,0242$, und $x = 1,2758$. Man nimmt hierauf $\alpha = 1,276$ und setzt die Annäherung so weiter fort.

§. 72. Die Newton'sche Methode ist jedoch nur unter gewissen Bedingungen genau. Um dieß zu erläutern, construiren wir die parabolische Curve, die $y = fx$ zur Gleichung hat. Die Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ stellen die Abscissen der Durchschnittspunkte k, k'... unserer Curve mit der Achse Ax dar. Es sei nun $x = AP = \alpha$ ein genäherter Werth der Wurzel $Ak = a$ (Fig. 15 und 16); wir wissen, daß $PM = f\alpha$ die Ordinate, und $f'\alpha$. die Tangente des Winkels T ist, den die Berührende in M mit Ax bildet. Die Auflösung des Dreiecks TPM liefert $TP. \operatorname{tg} T = PM = f\alpha$, woraus sich der Werth der Subtangente $s = TP$

$$= \frac{f\alpha}{f'\alpha}, \text{ und } AT = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha} \text{ ergibt.}$$

Es ist dieß der neue genäherte Werth von $Ak = a$ nach der Newtonschen Methode, welche, wie man sieht, zum Zweck hat, bei dem Aufsuchen des Durchschnittspunktes k mit der Achse, statt des Bogens

Mk seine Tangente MT zu nehmen. Diese zweite Annäherung AT dient dazu, eine andere Tangente M′T′ und hierauf einen neuen, mehr genäherten Werth AT′ zu bestimmen, und dieß so weiter fort. Die eben angegebene Methode erfordert übrigens, daß die gefundenen Punkte T, T′ ... sich fortwährend dem Punkte k nähern. Hätte man nämlich als Annäherung α den Theil Ap (Fig. 15) gewählt, welcher dem, bei dem Maximumpunkt liegenden, Punkt m O entspricht; so ist einleuchtend, daß die dahin gehörige Tangente mt, anstatt einen mehr genäherten Werth von Ak zu liefern, eine fast unendlich große Subtangente geben könne; für den Berührungspunkt m′ wird gedachte Subtangente sogar eine entgegengesetzte Richtung annehmen. Die Form und die Lage des Bogens mM in Bezug auf die Achse können demnach eine solche Beschaffenheit haben, daß die Regel fehlerhaft wird: wir müssen dieselbe daher besonderen Bedingungen unterwerfen, um über ihre Anwendbarkeit versichert zu sein.

1. Es ist deßhalb nöthig, zwei Zahlenwerthe α und β zu kennen, zwischen denen nur eine Wurzel eingeschlossen ist. Denn schnitte die Curve die Achse in mehreren zwischen α und β liegenden Punkten, so würde die Linie Wendungen machen, und es ist zweifelhaft, ob der Berührungspunkt sich eignet, einen mehr genäherten Werth von a als α es ist, zu liefern. Man kann dieß an der Fig. 1 sehen, wo die Grenzen Ap, Ap′ uns nicht gestatten, den Werthen Ak und Ak′ näher zu kommen.

2. Kein Werth von x zwischen α und β darf die Derivationen $f'x$, $f''x$ auf Null bringen. Denn geschähe dieß, so würde es ein Maximum oder Minimum oder auch einen Beugungspunkt geben, lauter Umstände, welche Newtons Methode unsicher machen können.

Wir werden in der Folge Mittel zeigen, um dergleichen Grenzen α und β zu bestimmen, und sonach versichert zu sein, daß die vorige Bedingung erfüllt ist.

3. Hat man die beiden Grenzwerthe α und β gefunden, so gebrauche man, um die Annäherung weiter zu treiben, nur denjenigen, für welchen die Funktionen fx und $f''x$ einerlei Zeichen haben. Die Figuren 15, 16, 17 und 18 stellen die verschiedenen möglichen Lagen des Bogens, je nachdem er seine erhabene oder hohle Seite nach oben zu kehrt, dar. Ak ist die Wurzel a; AP, Ap sind die

Grenzwerthe α, β, zwischen denen keine andere Wurzel mehr liegt; die Subtangente PT ist die durch unsere Methode angedeutete Correction s für den Werth $AP=\alpha$. Die Sicherheit des Verfahrens erfordert nun nothwendigerweise, daß der Fußpunkt T der Berührenden, zwischen dem Fußpunkte P der Ordinate, und dem Durchschnittspunkte k der Curve mit der Achse liege: von dem Punkte P aus muß man demnach die erhabene Seite des Bogens erblicken, was bekanntlich erheischt, daß die Funktionen fx und f''x einerlei Zeichen für die Abscisse $AP=x=\alpha$ haben. Dieser Grenzwerth ist mithin für die weiter gehende Annäherung zu gebrauchen.

Wenn man bei der Betrachtung der Zeichen die obere Grenze $\alpha>a$ gewählt hat, so zeigt der Anblick der Figuren 15 und 18, daß sämmtliche successive Approximationen stets größer als a sein werden, wobei man dieser Wurzel a immer näher kommt. Hat man im Gegentheil $\alpha<a$ genommen, so nähert man sich immer mehr und mehr dem letztern durch eine Reihe von Approximationen, welche alle kleiner als a sind (Fig. 16 und 17).

§. 73. Der hier einzuschlagende Gang wäre demnach folgender:

1. Man suche zwei Grenzen α und β, zwischen denen nicht noch eine andere Wurzel eingeschlossen wird.

2. Man rücke diese Grenzen so nahe an einander, bis man vergewissert ist, daß zwischen ihnen keine Wurzel der Gleichung $f'x=0$, $f''x=0$ liegt.

3. Von den beiden Grenzen nehme man als ersten Näherungswerth diejenige α an, bei der die Polynome fx und f''x einerlei Zeichen haben.

4. Die Rechnung wird alsdann die Größe s kennen lehren, welche, mit dem gehörigen Zeichen versehen, zu α hinzuzufügen ist, um einen zweiten Näherungswerth zu bekommen. Dieser letztere gilt als neuer Werth für α, um einen dritten Näherungswerth zu finden, u. s. f.

Es ist einleuchtend, daß man sich der Mühe überheben kann, den vollständigen Werth von s, wie ihn die Rechnung darbietet, zu nehmen, und daß nichts hindert, dafür einen weniger zusammengesetzten Ausdruck zu substituiren, insofern derselbe einem zwischen P und k liegenden Punkt T entspricht. Indem man also s in einen Decimalbruch verwandelt, wird man nur die der Wurzel zukommenden Zif-

fern beibehalten, um nicht unnöthigerweise die nachfolgenden Rechnungen zu verwickeln. Es ist daher durchaus nothwendig, zu erfahren, wie weit der jedesmal gefundene Näherungswerth genau ist. Zu diesem Ende ziehe man durch den Punkt m, welcher der zweiten Grenze $Ap=\beta$ entspricht, die Linie mq der Berührenden MT parallel. Diese Grenze wird in dem concaven Theil der Curve, und der Punkt k offenbar zwischen den Fußpunkten T und q sich befinden: Das Dreieck mpq gibt $pq=\frac{pm}{\tang q}=-\frac{f\beta}{f'\alpha}$, wo das Zeichen — gesetzt wird, da $f\beta$ negativ ist. Hieraus folgt $Aq=\beta-\frac{f\beta}{f'\alpha}$. Man kennt also zwei Grenzen, zwischen denen die wahre Wurzel liegt: nämlich

$$\alpha'=\alpha-\frac{f\alpha}{f'\alpha},\ \beta'=\beta-\frac{f'\beta}{f'\alpha}.$$

Von dem Werthe von α' wird man nur diejenigen ersten Decimalstellen beibehalten, welche in diesen beiden Ausdrücken übereinstimmen, und sonach den zweiten Näherungswerth erhalten. Es versteht sich von selbst, daß man bei dergleichen Rechnungen Sorge trägt, die Größen mit den Vorzeichen zu versehen, welche der Calcul mit sich bringt. Diese Annäherung geht anfangs langsam vor sich, nimmt aber hierauf rasch gegen a zu, sobald man drei bis vier Decimalstellen der Wurzel gefunden hat. Fourier hat in seiner analyse des équations déterminées das Gesetz dieser Annäherungen näher entwickelt.

Anmerkung. Ein anderweitiger Näherungswerth wird erhalten, wenn man die den beiden Grenzen zugehörigen Punkte m, M (Fig. 15) durch eine Gerade verbindet, und die Abscisse ihres Durchschnitts D mit der x Achse berechnet. Die Aehnlichkeit der Dreiecke pmD und DPM gibt

$$pm+PM:Pp=pm:pD,\ \text{d. h.}$$

$$f\beta-f\alpha:\beta-\alpha=-f(\alpha):pD;\ \text{hieraus}$$

$$AD=Ap+pD=\alpha-\frac{f\alpha(\beta-\alpha)}{f\beta-f\alpha}.$$

Ferner auch, da $pm+MP:Pp=MP:PD$,

$AD=\beta-\frac{f\beta(\beta-\alpha)}{f\beta-f\alpha}$. Setzen wir $\beta-\alpha=h$, so bekommen wir

$$AD=\alpha-\frac{f\alpha}{f'\alpha+f''\alpha\frac{h}{1.2}+\text{etc.}}\text{ oder }AD=\beta-\frac{f\beta}{f'\alpha+f''\alpha\frac{h}{1.2}+\text{etc.}}.$$

Je kleiner h wird, desto weniger weichen diese Näherungswerthe von dem oben angeführten ab.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, nehmen wir unsere obige Gleichung $x^3-2x-5=0$ wieder vor. Wir fanden, daß die Wurzel zwischen 2 und 2, 1 eingeschlossen ist. Da $f'x=3x^2-2$, $f''x=6x$, so sieht man, daß die Funktionen fx und $f''x$ für $x=\alpha=2,1$ positiv werden. Man hat demnach die Werthe, welche größer als x sind, zu wählen. Ferner liegen die Wurzeln der Gleichung $3x^2-2=0$ nicht zwischen $\alpha=2,1$ und $\beta=2$. Endlich hatte man gefunden

$f\alpha=+0{,}061$, $f'\alpha=+11{,}23$ und $s=-0{,}00543$; also $a=2{,}09457$. Wir nehmen jetzt $\beta=2{,}09<a$, was man daran erkennt, daß $f\beta=-0{,}050671$; und dividiren $f\alpha$ durch $f'\alpha$, was $-0{,}00451$ gibt: die zweite Grenze von a ist $\beta'=2{,}0945$. Die vier ersten Decimalstellen sind also genau, d. h. $x=2{,}0945$. Wir nehmen nun diesen Werth für α, woraus $f\alpha=+0{,}00054155$; das Zeichen + deutet an, daß diese Grenze größer als a ist. Ferner ist $f'\alpha=11{,}16204748$, was den Quotienten 0,000048517 gibt; folglich $a=2{,}094551483$.

Um die fehlerhaften Decimalstellen auszuscheiden, setzen wir $\beta=2{,}0945$, woraus $f\beta=-0{,}00057459$; das Zeichen — weist nach, daß diese zweite Grenze von a übertroffen wird. Indem wir durch $f'\alpha$ dividiren, erhalten wir den Quotienten $-0{,}00005148$, woraus $\beta'=2{,}09455148$. Die acht ersten Decimalstellen sind also genau.

Die Rechnung zieht sich in die Länge, wenn α eine mehr zusammengesetzte Zahl ist; man kann übrigens einigermaßen abkürzend, wie folgt, verfahren: Die Annäherung α lehrte uns schon $f\alpha$ und $f'\alpha$ kennen, woraus sich die Correktion $s=-\frac{f\alpha}{f'\alpha}$ ergab. Um die Rechnung weiter fortzusetzen, muß man $\alpha_{,}=\alpha+s$ statt x in fx, $f'x$, $f''x$ substituiren, was uns die nachstehende Entwickelung liefert, in welche, wegen der Kleinheit der Zahl s nur die ersten Glieder aufgenommen wurden, nämlich:

$$f\alpha_{,}=f\alpha+sf'\alpha+\tfrac{1}{2}s^2f''\alpha,\ f'\alpha_{,}=f'\alpha+sf''\alpha.$$

Die Rechnung bietet keine weitere Schwierigkeiten dar.

In unserm Beispiele war für $\alpha=2,1$ die Funktion

$$f\alpha=+0{,}061;\; f'\alpha=11{,}23;\; f''\alpha=12{,}6;\; s=-0{,}0054.$$

Um die Annäherung weiter zu treiben, muß man $\alpha_{,}=\alpha-0{,}0054$ setzen; folglich

$$f\alpha_{,}=0{,}061-0{,}0054\times 11{,}23+(0{,}0054)^2\times 6{,}1;$$
$$f'\alpha_{,}=11{,}23-0{,}0054\times 12{,}6;$$
$$f\alpha_{,}=0{,}0005417;\; f'\alpha_{,}=11{,}16196;\; s'=-0{,}00004853.$$

§. 74. **Lagrange's Methode.** Um die Wurzeln einer Gleichung zu finden, ist es vor allen Dingen von Wichtigkeit, den Ort der Wurzeln, d. h. eine Reihe von Zahlen anzugeben, zwischen denen nur eine Wurzel vorkomme: die Hauptschwierigkeit liegt mithin darin, eine solche Werthreihe im voraus, bevor man nämlich die Wurzeln kennt, zu ermitteln. Wenn man für x successive die Zahlen ... -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... substituirt, und bei den auf einander folgenden Ergebnissen eben soviel Zeichenwechsel, als Einheiten in dem Grad n der Gleichung enthalten sind, findet; so sind sämmtliche Wurzeln reell, und der Ort einer jeden derselben ist bekannt. Diesen Fall ausgenommen, bleibt man jedoch über die Zahl der reellen Wurzeln und ihrer Grenzen in Ungewißheit, weil man nicht weiß: erstens ob zwischen den Zahlen, welche für x substituirt, Resultate mit verschiedenen Zeichen geben, nicht 3, 5... Wurzeln liegen; ferner ob zwischen den Zahlen, welche Resultate mit einerlei Vorzeichen herbeiführten, nicht 2, 4... Wurzeln vorkommen. Wählte man hingegen eine Reihe von successiven, hinlänglich nahe aneinander gerückten Substitutionen, von der Art, daß zwischen zwei solchen nur eine Wurzel liegt; so ist man sicher, daß jeder Zeichenwechsel bei den Resultaten das Dasein einer einzigen Wurzel zwischen den substituirten Zahlen andeutet, währenddem keine Wurzel zwischen den Zahlen, welche Resultate von einerlei Vorzeichen lieferten, vorhanden ist.

Wenn die beiden Wurzeln a und b zwischen α und λ liegen, so bilden diese vier Zahlen, der Ordnung ihrer Größe nach, von der kleinsten angefangen, folgende Reihe: α, a, b, λ; woraus $\lambda-\alpha > b-a$. Die Wurzeln a und b liegen also nicht zwischen α und λ, wenn die eben ausgesprochene Bedingung nicht erfüllt wird. Es reicht ihr hin, α und λ weniger von einander entfernt, als diese Wur-

zeln a und b es sind, zu wählen, um versichert zu sein, daß zwischen α und λ nur eine von den Zahlen a und b, oder keine davon vorkomme. Wäre mithin δ geringer als die kleinste Differenz der Wurzeln der vorgelegten Gleichung, und bedeutet l' die untere Grenze und l die obere Grenze der Wurzeln; so ist klar, daß, wenn die Zahlen l', $l'+\delta$, $l'+2\delta$, ... l' der Reihe nach in fx substituirt werden, man ebensoviele Ergebnisse von verschiedenen Vorzeichen erhält, als die Gleichung reelle Wurzeln hat. Jeder Zeichenwechsel zeigt eine einzige Wurzel zwischen den substituirten Zahlen an, während zwischen denjenigen, welche einerlei Vorzeichen geben, keine Wurzel eingeschlossen wird.

Um unsere Zahl δ zu erhalten, suchen wir die Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen aus je zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Es bedeute y die Differenz zwischen einer Wurzel x und jeder andern. Aendert man nun x in x + y in der Gleichung $fx=0$, so erhält man

$$fx+yf'x+\tfrac{1}{2}y^2f''x+\ldots=0;$$

oder wenn man durch y dividirt,

$$fx=0;\ f'x+\tfrac{1}{2}yf''x+\ldots+ky^{n-1}=0,$$

wo x und y zwei Unbekannte sind.

Eliminiren wir x aus diesen beiden Gleichungen, so entsteht eine Gleichung $Fy=0$, deren Unbekannte y die Differenz zwischen allen Wurzeln der vorgelegten ist. $Fy=0$ ist die Differenzen-Gleichung, d. h. y ist die Differenz zwischen irgend einer Wurzel und allen andern. Der Grad dieser Gleichung ist $n(n-1)$, Zahl der Anordnungen der n Wurzeln von x zu je zwei. Da die Differenzen $a-b$, $b-a$, $c-b$, $b-c$ ... paarweise gleich, in Ansehung der Zeichen aber verschieden sind; so muß, wenn α eine Wurzel der Differenzen-Gleichung ist, auch $-\alpha$ eine solche sein. Es folgt hieraus, daß Fy nur gerade Potenzen von y enthalten kann. Weiter ergibt sich daraus, daß Fy sich in Faktoren von der Form $(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)$.... zerlegen läßt. Man kann daher $y^2=z$ setzen, ohne Wurzelgrößen hierdurch einzuführen. Die daraus entstehende Gleichung $\varphi z=0$ heißt die Gleichung der quadrirten Differenzen, da die Wurzeln y die Quadrate von den Differenzen der Wurzeln x in der ursprünglichen Gleichung sind.

§. 75. Nun können wir aber (§. 42) eine Zahl i finden, welche kleiner als sämmtliche positive Werthe von z ist, d. h. $i<z$ oder y^2.

Hiernach kann $\sqrt{i}$, oder eine noch kleinere positive Größe, als Differenz δ gelten, welche die für x zu substituirenden Zahlen haben müssen. Je kleiner δ ist, desto mehr Substitutionen hat man, von l' bis zu l hinauf, zu machen; man muß demnach δ möglichst groß nehmen, damit die Rechnungen abgekürzt werden. Wenn $i > 1$, so nimmt man $\delta = 1$, oder substituirt, wenn man will, die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . Wenn $i < 1$, so muß man $\delta = \sqrt{i}$ setzen.

Die Substitutionen der gebrochenen und irrationalen Zahlen werden übrigens auf folgende Art vermieden:

1. Man bestimme die Größe $\sqrt{i}$ wenigstens bis auf einen gegebenen Bruch genau, wie z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . . Alsdann nehme man den bis auf $\frac{1}{h}$ kleineren Werth von $\sqrt{i}$, und setze $\delta = \frac{g}{h}$. Die Zahl h wird stets dergestalt gewählt, daß man nicht bedeutend unter $\sqrt{i}$ herab zu steigen braucht, und keine sehr zusammengesetzte Zahl erhält.

2. Anstatt für x die Zahlen 0, $\frac{g}{h}$, $\frac{2g}{h}$, . . . zu substituiren, macht man die Wurzeln, folglich auch ihre Differenzen hmal größer, indem man $hx = t$ setzt. Man hat alsdann nur nöthig, nach und nach für t die Zahlen 0, g, 2g, 3g . . . ., oder wenn man will, 0, 1, 2, 3 . . . zu substituiren. Wir können also eine Gleichung in eine andere umwandeln, die nicht mehr als eine Wurzel zwischen zwei aufeinander folgenden beliebigen ganzen Zahlen hat.

Man kann beiläufig noch Folgendes bemerken:

1. i läßt sich aus Fy ableiten; die Bildung des Polynoms φz ist also nicht gerade nöthig.

2. Durch Hinwegschaffung des zweiten Gliedes aus $fx = 0$ werden sämmtliche Wurzeln um die nämliche Größe vermehrt; sie behalten mithin ihre Differenzen bei. Etwas leichter wird aus dieser transformirten Gleichung die Funktion Fy hergeleitet, die dadurch keine Aenderung erleidet.

Anmerkung. Die Wurzeln der Gleichung $\varphi z = 0$ werden nur dann negativ sein, wenn die Gleichung $fx = 0$ imaginäre Wurzeln besitzt. Hat die letztere aber reelle, so hat die Gleichung $\varphi z = 0$ positive Wurzeln. Sind auf diese Weise die Grenzen jeder einzelnen reellen Wurzel, und mithin zugleich die Anzahl

der reellen Wurzeln bestimmt, so erhält man die Menge der imaginären Wurzeln, indem man jene Anzahl von dem Grad der Gleichung abzieht.

§. 76. **Beispiele:** I. Man nehme die Gleichung $x^3-2x=5$, deren eine Wurzel wir im §. 71 bestimmt haben. Um zu erfahren, ob die beiden andern Wurzeln reell sind, verwandeln wir x in $x+y$, was uns gibt $3x^2-2+3xy+y^2=0$.

Durch die Elimination von x erhält man

$$y^6-12y^4+36y^2+643=0.$$

Um die untere Grenze von y zu finden, setzen wir $y^2=\frac{1}{v}$. Daraus entsteht

$$643\,v^3+36\,v^2\ldots=0;\ v<1+\tfrac{12}{679}$$

oder $v<1$; folglich $y>1=\delta$. Indem man also nach und nach $x=-1, 0, 1, 2\ldots.$ setzt, findet man ebensoviele Zeichenwechsel, als x reelle Wurzeln hat.

II. Die Gleichung $x^3-12x^2+41x-29=0$ gibt

$$3x^2-24x+41+(3x-12)\,y+y^2=0:$$

Durch Elimination von x entsteht $y^6-42y^4+441y^2=49$. Setzt man $y=\frac{1}{v}$, so kommt $49v^6-441v^4+\ldots.=0$; woraus man zieht: $v<10, y>\sqrt{\frac{1}{10}}$, oder $\frac{1}{4}=\delta$. Macht man $x=\frac{1}{4}t$, so hat man $t^3-48t^2+656t=1856$, eine Gleichung, in der nur eine Wurzel zwischen zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen liegt. Indem wir $t=0, 1, 2\ldots.$ setzen, sehen wir, daß t zwischen 3 und 4, zwischen 21 und 22 und zwischen 22 und 23 fällt. Es liegt also eine Wurzel von x zwischen $\frac{3}{4}$ und 1, eine zweite zwischen $\frac{21}{4}$ und $\frac{22}{4}$, eine dritte zwischen $\frac{22}{4}$ und $\frac{23}{4}$. Zwischen 5 und 6 befinden sich demnach zwei Wurzeln, die wir ohne diese Rechnung nicht entdeckt hätten.

Die Wurzeln von x sind 0,95108 ...; 5,35689 ... und 5,69203 ...

III. Die Gleichung $x^3-7x+7=0$ gibt uns $y^6-42y^4+441y^2=49$; woraus $v<9, y^2>\frac{1}{9}$ $\delta=\frac{1}{3}$. Wir werden bald sehen, daß

eine Wurzel zwischen -3 und $-\frac{10}{3}$, eine zweite zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{3}$, eine dritte endlich zwischen $\frac{5}{3}$ und 2 liegt; nämlich

$$x = -3,04892\ldots;\ x = 1,35689\ldots;\ x = 1,69203.$$

IV. In der Gleichung $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ bekommen wir für $x = 0, 1, 2$ die Resultate $+1, -1, +1$; ferner durch Umänderung von x in $-x$ Ergebnisse von entgegengesetzten Zeichen für die Zahlen 1 und 2.

Der Ort der drei Wurzeln ist hier sofort bekannt, und die Gleichung der quadrirten Differenzen daher nicht nöthig. Uebrigens ist $y^6 - 14y^4 + 49y^2 = 49$. Diese Gleichung lehrt uns, daß $y > 1$, $\delta = 1$, was mit dem eben Gesagten völlig übereinstimmt.

Dergleichen Rechnungen sind immer ausführbar; nur Schade, daß ihre Anwendung äußerst langwierig wird, namentlich wenn die Gleichung von etwas hohem Grade ist. Die Methode an und für sich ist übrigens klar, vollständig und für alle Fälle gültig. Es bleibt nun nur noch übrig, den verschiedenen Wurzeln vermittelst des oben angegebenen Verfahrens näher zu kommen; zur Auffindung der approximativen Werthe der Wurzeln hat uns Lagrange ebenfalls eine leichte Methode überliefert, die wir in der Folge mittheilen werden.

§. 77. Regel des Descartes. In einer geordneten Gleichung läßt sich, aus dem bloßen Anblick der Zeichen, die mögliche Zahl der positiven sowohl als negativen Wurzeln vermuthen. Haben die auf einander folgenden Glieder einer Gleichung einerlei Zeichen, so nennt man dieß eine Folge (Permanenz); haben sie ungleiche Zeichen, so wird dieß ein Wechsel (Variation) genannt. Die Regel des Descartes lautet sonach folgendermaßen: Eine vollständige Gleichung kann nicht mehr positive Wurzeln, als Zeichenwechsel, und nicht mehr negative Wurzeln haben, als Zeichenfolgen anzutreffen sind.

In der That kann man jede Gleichung $fx = 0$ als das Produkt aus einem Polynom, dessen sämmtliche Binomialfaktoren imaginär sind, mit die den reellen Wurzeln $a, b \ldots, -a', -b' \ldots$ zugehörigen Faktoren $x-a, x-b, \ldots x+a', x+b' \ldots$ betrachten.

Wir wollen nun untersuchen, in wiefern die entsprechenden Binomialfaktoren in dem Produkte theils Zeichenfolgen, theils Zeichen-

wechsel hervorbringen können. Um die Jdeen zu fixiren, nehmen wir an, daß ein Polynom Fx folgende Anordnung hinsichtlich der Zeichen darbiete:

$$+ - - + - - - + - + + + + - + - +.$$

Um gedachtes Polynom mit x+a′ zu multipliciren, was eine neue negative Wurzel —a′ einführt, operiren wir zuvörderst mit x, hierauf mit a′, und addiren dann beide Produkte, in denen die nämlichen Zeichen vorkommen, indem wir dabei das zweite, des Ordnens halber, um eine Stelle weiter gegen die Rechte rücken. Hiernach ergibt sich folgende Darstellung:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
+ & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & + & + & - & + & - & + & \\
 & + & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & + & + & - & + & - & + \\
\hline
+ & i & - & i & i & - & - & i & i & i & + & + & + & i & i & i & i & +
\end{array}$$

Wenn die beiden über einander stehenden Zeichen einerlei sind, so bleiben sie in dem Produkte ungeändert; der entgegengesetzte Fall wird durch den Buchstaben i angedeutet, um auszudrücken, daß das Zeichen unbestimmt ist, insofern auf die Größe der Coefficienten keine Rücksicht genommen wird.

Da die beiden Partialprodukte die nämlichen Zeichen haben, so werden die i sich nur dort vorfinden, wo ein Wechsel statt hatte. Eine gerade Anzahl von successiven Wechseln gibt eine gerade Menge von i, welche zwischen ähnlichen Zeichen gestellt sind; ist dagegen die Zahl der Wechsel ungerade, so ist es auch die der auf einander folgenden i, welche zwischen verschiedenen Zeichen stehen. Wollen wir jetzt diese sämmtlichen i dergestalt wählen, daß dadurch die größtmögliche Zahl von Wechseln in dem Produkte zu Stande komme; so müssen wir alle diese i abwechselnd mit + und — vertauschen. Nun steht aber jede dieser Abtheilungen von i zwischen ähnlichen oder verschiedenen Zeichen, je nachdem die Anzahl derselben gerade oder ungerade ist; woraus offenbar erhellet, daß man nicht mehr Abwechslungen herbeiführen kann, als Zeichen von i vorhanden sind, d. h. nicht mehr Wechsel, als das ursprüngliche Polynom enthielt. Ueberdieß hat das Produkt ein Glied mehr, folglich hat es auch wenigstens eine Zeichenfolge mehr. Jm Falle nicht alle i Abwechslungen liefern sollten, wird das Produkt 2, 4... Zeichenfolgen mehr als Fx zählen. Die Einführung der negativen Wurzeln bringt also für jede derselben wenigstens eine Zeichenfolge mit sich.

Wir multipliciren jetzt das Polynom Fx mit x—a, was eine positive Wurzel a begründet. Das zweite Partialprodukt, welches um eine Stelle gegen die Rechte gerückt ist, wird die entgegengesetzten Zeichen von Fx erhalten, in der Art, daß die i bei jeder Folge angeschrieben werden. Hiernach steht:

$$\begin{array}{l} + - - + - - - + - + + + + - + - + \\ \quad - + + - + + + - + - - - - + - + - \\ \hline + - \; i \; + - \; i \; \; i + - + \; i \; \; i \; \; i - + - + - \end{array}$$

Da eine Aufeinanderfolge von ähnlichen Zeichen von Fx sich hier mit einer Abwechslung endigt, so wird jede Abtheilung der i zwischen + und — zu stehen kommen. Bestimmen wir nun diese i, indem wir sie theils mit + theils mit — vertauschen, um die größtmögliche Anzahl von Zeichenfolgen zu erhalten; so wird man deren nur eben soviele finden, als in Fx vorhanden sind. Das Produkt zählt aber ein Glied mehr, folglich wird es auch wenigstens eine Abwechslung mehr als das ursprüngliche Polynom haben. Aendern sich nicht alle i in Zeichenfolgen um, so gibt es 2, 4 . . . Abwechslungen mehr als in Fx.

Die Einführung der positiven Wurzeln bringt also für jede derselben wenigstens einen Zeichenwechsel mit sich. Setzt man diesen Schluß mit dem vorigen in Verbindung, so wird man einsehen, daß in jeder geordneten Gleichung die Anzahl der positiven Wurzeln nicht größer (aber wohl kleiner) sein kann, als die der Zeichenwechsel, und die Anzahl der negativen Wurzeln nicht größer (aber wohl kleiner) als die Anzahl der Zeichenfolgen.

Anmerkung. Es wurde im vorstehenden Satze angenommen, daß Fx ein vollständiges Polynom darstellt. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß die in Bezug auf die positiven Wurzeln gewonnene Folgerung ihre Gültigkeit beibehält, wenn eins oder mehrere Glieder in dem Polynom fehlen; dasselbe kann man jedoch nicht von den negativen Wurzeln behaupten. Will man demnach in einer unvollständigen Gleichung Fx=0 die mögliche Anzahl der negativen Wurzeln angeben, so muß man x mit — x vertauschen, und nachsehen, wie viel positive Wurzeln der transformirten Gleichung möglich sind; die gefundene Zahl entspricht alsdann den negativen Wurzeln der vorgelegten.

§. 78. Es bezeichne P die Zahl der positiven, N die der negativen Wurzeln einer Gleichung vom nten Grade; ferner p die Menge der Zeichenfolgen, und v die der Zeichenwechsel. Es ist bewiesen, daß P = oder < v (1), und N = oder < p (2).

Hat die Gleichung lauter reelle Wurzeln, so ist

$$P + N = n, \; n = p + v, \; P + N = v + p,$$

weil $n + 1$ Glieder vorkommen. Vergleichen wir nun P mit v, so können drei Fälle statt finden, nämlich P > oder < oder = v. Die Unmöglichkeit des ersten Falles haben wir dargethan (1). Was den zweiten Fall anlangt, so erfordert das Bestehen der letzteren obiger Gleichungen, daß N > p sei, was dem Satze (2) widerstreitet. Man hat folglich P = v und N = p.

Eine Gleichung, deren Wurzeln sämmtlich reell sind, besitzt also gerade so viele positive Wurzeln, als Zeichenwechsel, und so viele negative, als Zeichenfolgen.

Anmerkung. Da die Anzahl der positiven Wurzeln gleich oder kleiner als v, und die Anzahl der negativen gleich oder kleiner als p ist; so ist offenbar die Anzahl der imaginären Wurzeln der Gleichung vom nten Grade gleich oder größer als $n - p - v$.

§. 79. Die Descartes'sche Regel zeigt uns in einigen Fällen an, ob eine Gleichung imaginäre Wurzeln hat, und macht sonach die beschwerliche Rechnung unnöthig, welche zur Erlangung der Gleichung der quadrirten Differenzen erfordert wird.

1. Fehlt in einer Gleichung eins der Glieder, so kann man dasselbe durch $\pm 0x^i$ ersetzen, und darnach die Folgen und Wechsel in beiden Fällen beurtheilen, wenn man einmal $+0$, und dann -0 mit den übrigen einfachen Zeichen der Gleichung verbindet. Haben die benachbarten Glieder x^{i-1} und x^{i+1} verschiedene Zeichen, so wird man, welches Zeichen auch genommen werden mag, die nämliche Anzahl von Abwechslungen und Folgen finden; die Uebereinstimmung dieser Resultate läßt reelle Wurzeln vermuthen. Haben jene Nebenglieder dagegen einerlei Zeichen, so weist der Widerspruch der beiden Resultate auf das Dasein imaginärer Wurzeln hin.

Für die Gleichung $x^3 + 2x - 5 = 0$, welche man auch folgendermaßen schreiben könnte $x^3 \pm 0x^2 + 2x - 5 = 0$, würde man nach

Belieben 2 Folgen und eine Abwechslung, oder 3 Abwechslungen erhalten, was in Bezug auf die Menge der reellen Wurzeln ein Widerspruch ist. Fehlt also in einer Gleichung zwischen zwei Gliedern von einerlei Zeichen, ein Glied; so besitzt die Gleichung imaginäre Wurzeln.

2. Fehlen in einer Gleichung mehrere successive Glieder, so können nicht alle Wurzeln reell sein: es ist dieß eine unmittelbare Folge des eben Gesagten.

3. Die drei Zeichenwechsel in der Gleichung $x^3-3x^2+12x-4=0$ lassen die Existenz dreier positiven Wurzeln vermuthen. Multipliciren wir dieselbe mit $(x+a)$, so entsteht

$$x^4+(a-3)x^3+(12-3a)x^2+(12a-4)x-4a=0.$$

Wir versuchen jetzt, in der letzteren, durch ein schickliches Wählen von a, Zeichenfolgen hervorzubringen. So z. B. macht $a=3\frac{1}{2}$ die vier ersten Glieder positiv. Die Gleichung hat daher zwei imaginäre Wurzeln, weil sonst die Gleichung vom vierten Grade, nach Belieben, 3 negative, oder 4 positive Wurzeln haben würde.

4. Aendert man x in $y+h$ und $y'+h'$ um, so verwandelt sich $fx=0$ in $Fy=0$ und $\varphi y'=0$. Wir nehmen an, daß in $\varphi y'$ einige Zeichenwechsel weniger als in Fy vorkommen. Wenn nun alle Werthe von x reell sind, so wird $Fy=0$ eine ihrer positiven Wurzeln α mit einer negativen $-\alpha'$ in $\varphi y'=0$ vertauscht haben; hieraus $x=\alpha+h=-\alpha'+h'$, d. h. x hat eine Wurzel zwischen h und h'. Da Aehnliches für jeden verloren gegangenen Zeichenwechsel gilt, so hat x für jeden derselben eine Wurzel zwischen h nnd h'. Ist man nun im Stande, mit Hülfe der Lehre von den Grenzen, zu beweisen, daß alle diese Wurzeln von x nicht existiren; so wird man versichert sein, daß imaginäre Wurzeln vorhanden sind.

Aus der Gleichung $x^3-4x^2-2x+17=0$ erhält man, wenn $x=y+2$ und $y'+3$ gesetzt wird,

$$y^3+2y^2-6y+5=0,\ y'^3+5y'^2+y'+2=0.$$

Die zwei Zeichenwechsel, welche vermuthen lassen, daß zwei positive Wurzeln von y für y' in negative umgewandelt worden, zeigen an, daß zwischen 2 und 3 zwei Wurzeln von x liegen können. Einerseits aber hat man für die untere Grenze von y die Größe $\frac{5}{11}$, während man andrerseits für die Grenze von y' die Größe $-\frac{2}{5}$ findet. Wegen

$y = y' + 1$ entsteht $1 - y > \frac{1}{3}$, oder $y < \frac{2}{3}$. Da diese beiden Grenzen mit einander im Widerspruch stehen, so schließt man daraus, daß x 2 imaginäre Wurzeln hat. Wären gedachte Grenzen in Uebereinstimmung, so würde man zwar noch keine Gewißheit haben, daß zwei Wurzeln von x zwischen 2 und 3 fallen; der Zwischenraum, in welchen dieselben eingeschlossen sind, ist jedoch auf solche Weise kleiner geworden.

5. Sind alle Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ reell, so sind die Quadrate ihrer Differenzen sämmtlich positiv. Die Wurzeln der Gleichung der quadrirten Differenzen sind dann sämmtlich ebenfalls positiv, was in derselben lauter Zeichenwechsel begründet.

6. Aus der Natur der Wurzeln einer Gleichung folgt, daß eine gegebene Gleichung nicht mehr Paare von imaginären Wurzeln haben kann, als Zeichenfolgen in der Gleichung der quadrirten Differenzen anzutreffen sind.

§. 80. Fouriers Methode. Es sei $fx = 0$ eine Gleichung vom $n$ten Grade; wir nehmen davon die succesiven Derivationen, die wir in umgekehrter Ordnung schreiben, und abgekürzt durch $f^{(n)}, f^{(n-1)}, \ldots f', f$ ausdrücken wollen. Setzen wir in diesen Polynomen $x = a$, wo a eine willkührliche, positive oder negative Zahl bedeutet; so gibt jedes derselben ein numerisches Resultat, dessen Zeichen entweder + oder — sein wird. Wir schreiben diese consecutiven Zeichen, ihrer Ordnung nach, beziehungsweise unter die Funktionen, aus denen sie entstanden sind, was eine Zeichenreihe liefert, die durch A dargestellt sein mag.

Setzen wir hierauf $x = b > a$, so bilden wir eine zweite Reihe von Zeichen, welche wir unter die vorhergehenden schreiben, und deren Gesammtheit wir durch B bezeichnen; u. s. f.

Wir wollen nun die Zeichenveränderungen dieser verschiedenen Reihen näher betrachten. Es sei deßhalb φx irgend eines unserer Polynome. Indem wir für x drei sehr nahe an einander liegende Werthe $a - \delta$, a und $a + \delta$ gelten lassen, haben wir:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a-\delta) &= \varphi a - \delta\varphi' a + \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a - \tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a \ldots \\ \varphi a &= \varphi a \\ \varphi(a+\delta) &= \varphi a + \delta\varphi' a + \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a + \tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a \ldots \end{aligned}\right\} (1)$$

Wir nehmen an, daß δ sehr klein sei, und φa nicht Null werde. Die

drei vorstehenden Resultate werden das Zeichen von φa erhalten, da das erste Glied die Gesammtheit der darauf folgenden übertrifft. *Läßt man demnach x stetig wachsen, so wird eine jede unserer Funktionen $f^{(n)} \ldots f'', f', f$ ihr ursprüngliches Zeichen behalten, so lange sie nicht Null wird.* Ist aber a eine Wurzel der Gleichung $\varphi x = 0$, so werden die Reihen (1) ihr erstes Glied verlieren, und die Resultate das Zeichen des nächstkommenden Gliedes $\mp \delta \varphi' a$ bekommen; d. h. so lange $x < a$ ist, wird das Zeichen von φx mit dem des Produktes $-\delta \times \varphi' a$ übereinstimmen, mithin das entgegengesetzte das von $\varphi' a$ sein, während für $x > a$ das Zeichen einerlei mit dem von $\varphi' a$ ist; die beiden Zeichen sind daher für diese beiden Resultate verschieden. *Der Durchgang, einer unserer Funktionen, durch Null begründet folglich sofort einen Zeichenwechsel in den, von ihr gelieferten, Resultaten.*

§. 81. Der vorstehende Satz möge nun seine Anwendung auf unsere Polynome $f^{(n)} \ldots f'', f', f$ finden. Für $x = a$ geben dieselben eine Zeichenreihe, und es werden, wenn x nach dem Gesetze der Stetigkeit fortschreitet, die Zeichen einer jeden Reihe die nämlichen bleiben, bis man auf einen Werth $x = a$ kommt, welcher irgend eine dieser Funktionen, die durch φx dargestellt sein mag, auf Null bringt; für diese allein wird alsdann eine Zeichenänderung eingetreten sein. Hiernach haben wir eine der vier nachstehenden Zeichenverbindungen:

$f^{(n)}$	φ'	φ	....
$x < a$	$+$	$-$	$+$ ...
$x = a$	$+$	0	$+$ ...
$x > a$	$+$	$+$	$+$ ...;
oder	$+$	$-$	$-$ ...
......	$+$	0	$-$ ...
......	$+$	$+$	$-$ ...;
oder	$-$	$+$	$-$ ...
......	$-$	0	$-$ ...
......	$-$	$-$	$-$ ...;
oder	$-$	$+$	$+$ ...
......	$-$	0	$+$ ...
......	$-$	$-$	$+$ ....

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, daß beim stetigen Durchgang von x durch einen Werth a, der eine mittlere Funktion φa verschwinden macht, die Funktionenreihe zwei oder keinen Zeichenwechsel verliert, je nachdem die beiden, der verschwindenden, nächstliegenden Funktionen für $x=a$ einerlei, oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Läßt man x über a hinaus allmählich weiter wachsen, so wird die neue Zeichenreihe unverändert bleiben, bis man zu einer nullwerdenden Funktion gelangt; u. s. f.

In Bezug auf die Stammfunktion fx hat das Vorhergehende nur theilweise statt, indem auf dieselbe kein Zeichen mehr folgt. Ist nämlich $x=a$ eine Wurzel von $fx=0$, so haben wir folgende Zusammenstellung:

	f′	f		f′	f
$x<a$	+	—	oder	—	+
$x=a$	+	0		—	0
$x>a$	+	+		—	—;

d. h. beim stetigen Durchgange von x durch einen Werth a, der eine reelle Wurzel der Gleichung $fx=0$ ist, verliert die Funktionenreihe einen Zeichenwechsel.

§. 82. Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem zwei aufeinander folgende mittlere Funktionen gleichzeitig für $x=a$ verschwinden, nämlich $\varphi' a=0$, $\varphi a=0$. Die Reihen (1) sind alsdann

$$\begin{aligned} \varphi(a-\delta) &= \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a - \tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a + \text{etc.} \\ \varphi a &= 0 \qquad\qquad\qquad (2) \\ \varphi(a+\delta) &= \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a + \tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Zeichen der Resultate, nach unserer Voraussetzung von denen des ersten Gliedes abhängend, stimmen mit denen von $\varphi'' a$ sowohl für $x<a$ als für $x>a$ überein. Dagegen befinden sich φ' und φ'' in dem nämlichen Fall, in welchem vorher φ und φ' waren; in der That reducirt sich $\varphi'(a\mp\delta) = \varphi' a \mp \delta\varphi'' a +$ etc. auf $\mp\delta\varphi'' a +$ etc., weil der Annahme zufolge $\varphi' a=0$: also bekommt φ' für $x<a$ das ungleichartige, und für $x>a$ das gleichartige Zeichen von φ''.

Hienach steht eine oder die andere folgender Zeichenreihen:

	$f^{(n)}$	φ''	φ'	φ		. . . . . .
$x < a$	. . . . . .	+	−	+	+	. . . . . .
$x = a$	. . . . . .	+	0	0	+	. . . . . .
$x > a$	. . . . . .	+	+	+	+	. . . . . . ;
oder	. . . . . .	−	+	−	−	. . . . . .
	. . . . . .	−	0	0	−	. . . . . .
	. . . . . .	−	−	−	−	. . . . . . ;
oder	. . . . . .	+	−	+	−	. . . . . .
	. . . . . .	+	0	0	−	. . . . . .
	. . . . . .	+	+	+	−	. . . . . . ;
oder	. . . . . .	−	+	−	+	. . . . . .
	. . . . . .	−	0	0	+	. . . . . .
	. . . . . .	−	−	−	+	. . . .

Beim stetigen Durchgang von x durch einen Werth a, der zwei aufeinander folgende mittlere Funktionen φ und φ' Null macht, verliert also die Funktionenreihe zwei Zeichenwechsel.

Wenn drei successive mittlere Funktionen für $x = a$ Null werden, nämlich φ, φ' und φ'', so findet man durch ähnliche Betrachtungen, daß in der Funktionenreihe 2 oder 4 Zeichenwechsel verloren gehen, je nachdem für $x = a$ die Zeichen, der den verschwindenden nächstvorhergehenden und folgenden, Funktionen entgegengesetzt oder einerlei sind.

Wir haben nämlich in diesem Fall:

	$f^{(n)}$	φ'''	φ''	φ'	φ		. . . . .
$x < a$	. . . . . .	+	−	+	−	−	. . . . .
$x = a$	. . . . . .	+	0	0	0	−	. . . . .
$x > a$	. . . . . .	+	+	+	+	−	. . . . . ;
oder	. . . . . .	−	+	−	+	+	. . . . .
	. . . . . .	−	0	0	0	+	. . . . .
	. . . . . .	−	−	−	−	+	. . . . . ;
oder	. . . . . .	+	−	+	−	+	. . . . .
	. . . . . .	+	0	0	0	+	. . . . .
	. . . . . .	+	+	+	+	+	. . . . . ;
oder	. . . . . .	−	+	−	+	−	. . . . .
	. . . . . .	−	0	0	0	−	. . . . .
	. . . . . .	−	−	−	−	−	. . . . .

Wenn für $x=4, 5 \ldots$ successive mittlere Funktionen Null werden, so verlieren die Entwicklungen (1) eine gleiche Anzahl Anfangsglieder, und das erste Glied hat das Zeichen + wenn die Anzahl der nullgewordenen Funktionen gerade ist, dagegen $\mp$, wenn jene Anzahl ungerade ist. Jeder Null entspricht ein Zeichenwechsel für $x<a$, und eine Zeichenfolge für $x>a$; in jedem Fall geht immer eine gerade Anzahl Zeichenwechsel verloren.

Hieraus ergibt sich der Satz: Wenn z aufeinander folgende mittlere Funktionen, für einen gewissen Werth von x, Null werden; so verschwinden in unserer Funktionenreihe z Zeichenwechsel, wenn z gerade ist, dagegen $z\pm 1$ Zeichenwechsel, wenn z ungerade ist, wo das Zeichen + oder — genommen wird, je nachdem die beiden der nullwerdenden nächstvorhergehen und folgenden Funktionen gleiche oder ungleiche Zeichen haben.

Macht $x=a$ mehrere successive Funktionen am Ende der Reihe verschwinden, mithin $fa=0$, $f'a=0$, ... $f^{(z-1)}a=0$; so ist in jeder der bestehenden Zeichenreihen das letzte Zeichen zu streichen, und die Funktionenreihe verliert dann z Zeichenwechsel. Die Gleichung $fx=0$ hat in diesem Falle die $z$fache Wurzel a.

§. 83. Schreibt man unsere Funktionen in der angegebenen Ordnung, so ist klar, daß das Zeichen vor $\varphi(a+\delta)$ stets mit dem der nächstvorhergehenden, nicht nullwerdenden, Funktion übereinstimmt; das Zeichen von $\varphi(a-\delta)$ hingegen wird mit dem der, nächstvorhergehenden nicht nullwerdenden, Funktion einerlei oder entgegengesetzt sein, je nachdem die Zahl der dazwischenliegenden verschwindenden eine ungerade oder gerade ist.

Hieraus entsteht folgende Vorschrift, welche die Regel vom doppelten Zeichen heißt, und von der wir später häufig Gebrauch machen werden. Macht $x=a$ eine oder mehrere Funktionen Null, so erhält man die Zeichen der Reihe für den nächstvorhergehenden und den nächstfolgenden Werth, wenn man für $x>a$ jede Null durch das Zeichen der unmittelbar vorhergehenden nicht nullwerdenden Funktion ersetzt, dagegen für $x<a$ der ersten Null das entgegengesetzte Zeichen von jener Funktion, der zweiten das nämliche, der dritten das entgegengesetzte gibt, u. s. w., insofern mehrere successive Nulle vorkommen; in den Stellen übrigens, wo keine Nullen erscheinen, bleiben die Zeichen ungeändert.

Hiernach stände, wenn z. B. $x=a$ wäre;

für $x=a$ $+ + 0\ 0\ 0\ 0 - - 0\ 0\ 0 + +$

für $x<a$ $+ + - + - + - - + - + + +$ 8 Zeichenwechsel;

für $x>a$ $+ + + + + + - - - - - - + +$ 2 Zeichenwechsel.

Sechs Zeichenwechsel sind hier beim stetigen Durchgang von $x=a$ verloren gegangen.

§. 84. Die gemeinschaftlichen Ergebnisse aus dem vorstehenden sind:

1. Läßt man die Veränderliche x, welche für $x=a$ eine gewisse Zeichenreihe gibt, stetig wachsen; so werden die Resultate ihre respektiven Zeichen beibehalten, so lange man nicht einen Werth für x bekommt, welcher eine oder die andere Funktion $f^{(n)} \ldots f'', f', f$ verschwinden macht. Wird die ursprüngliche fx Null für jenen Werth von x, so geht nur ein Zeichenwechsel verloren, während die Zeichenreihe zwei oder keinen Zeichenwechsel verliert, wenn irgend eine abgeleitete Funktion verschwindet. Indem mehrere aufeinander folgende Funktionen gleichzeitig Null geworden sind, können auch 2, 4, 6, ... Zeichenwechsel auf einmal verloren gehen. Erhält aber x die Werthe $r, r', r'' \ldots$, welche der Gleichung $fx=0$ Genüge leisten; so verliert die Funktionenreihe nur einen Zeichenwechsel um den andern; während die Wurzeln der Gleichungen $f'x=0, f''x=0, \ldots$ die Zeichenwechsel bestehen lassen, oder sie zu je zwei und zwei verschwinden machen. Niemals kann aber die Funktionenreihe schon verlorene Zeichenwechsel in der Folge für größer werdende Werthe von x wieder aufnehmen.

2. Jede unserer Funktionen φ kann nur insofern durch Null gehen, als das Resultat der Substitution eines, der Wurzel der Gleichung $\varphi x=0$ unendlich nahe vorhergehenden Werthes, in diese Funktion ein Zeichen liefert, das dem unmittelbar voranstehenden entgegengesetzt ist, damit gedachter Zeichenwechsel, für einen jener Wurzel unendlich nahen folgenden Werth, in eine Zeichenfolge übergehen könne.

3. Da das erste Glied der Polynome $f^{(n)}, \ldots f'', f', f$ abwechselnd von geradem und ungeradem Grade ist, so werden, wenn man $x=-\frac{1}{0}$ oder bloß $x=-l'$, als Grenze der negativen Wurzeln von $fx=0, f'x=0$, u. s. w. setzt, abwechselnd positive und negative Resultate,

oder n Zeichenwechsel zum Vorschein kommen, indem das erste Glied die Gesammtheit aller folgenden, mit entgegengesetzten Zeichen behafteten Glieder übertrifft. Macht man dagegen $x=+\frac{1}{0}$ oder $x=l$, = der oberen Grenze der positiven Wurzeln, so entstehen nur positive Resultate. Läßt man demnach x von $-l'$ bis $+l$ stetig wachsen, so werden sämmtliche Zeichenwechsel verschwinden. Umgekehrt geben zwei Zahlen $-l'$ und $+l$, wovon eine nur Zeichenwechsel, die andere nur Zeichenfolgen liefert, die Grenzen ab, zwischen denen alle Wurzeln der Gleichungen $fx=0$, $f'x=0$ ... eingeschlossen sind. Denn da für jede Wurzel einer dieser Gleichungen bloß ein Zeichenwechsel verloren geht, so lassen sich außerhalb jener Grenzen keine Zahlen finden, welche diesen Erfolg hervorbringen können. Hieraus folgt, daß jede Zahl, die für x substituirt, sämmtliche Polynome f, f', f''.... positiv macht, eine obere Grenze der Wurzeln der Gleichung ist: wir hätten hiermit einen neuen, und zugleich allgemeinern Beweis für den im §. 40 aufgestellten Satz erhalten.

4. Es sei $2i$ die Anzahl der imaginären Wurzeln von $fx=0$, mithin $n-2i$ die der reellen, welche zwischen $-l'$ und l liegen. Läßt man x von $-l'$ bis l stetig wachsen, so werden die n Zeichenwechsel der erstern Reihe in der letztern sämmtlich verloren gegangen sein. Da nun die reellen Wurzeln r, r', r'' ... die Zeichenwechsel bloß einen um den andern verschwinden machen, so gehen die $2i$ andern Zeichenwechsel paarweise verloren, indem die verschiedenen Derivationen f', f'',... Null werden. Diese letztern Substitutionen geben also ein Merkmal für das Dasein der imaginären Wurzeln ab, und weisen auf ihre Anzahl hin.

§. 85. Aus dem Vorhergehenden kann man die Descartes'sche Regel hinsichtlich der Zeichen in größerer Allgemeinheit herleiten. Machen wir nämlich $x=0$, so besteht die Zeichenreihe aus den succesiven Vorzeichen von fx; denn jede Funktion wird durch diese Substitution auf ihr letztes Glied zurückgeführt, welches bekanntlich das Produkt der respektiven, in umgekehrter Ordnung genommenen, Coefficienten mit 1. 2. 3... ist. Unsere durch $x=0$ dargebotene Zeichenreihe gibt demnach dieselben Zeichenwechsel und Zeichenfolgen wie fx. Es sei v die Anzahl der Wechsel, mithin $n-v$ die der Folgen. Gehen wir nun von $x=0$ zu $x=l$ über, so wird die erste Reihe ihre v Wechsel

verlieren, und die Gleichung $fx=0$, insofern sie nur reelle Wurzeln hat, deren v positive besitzen.

Machen wir hierauf $x=-l'$, so gehen in der Funktionenreihe, die hier durchaus Zeichenwechsel, also deren n enthält, $n-v$ Zeichenwechsel von $-l'$ bis 0 verloren; die Gleichung $fx=0$ hat mithin zwischen diesen Grenzen $n-v$ negative Wurzeln, oder deren eben soviel als Zeichenfolgen in ihr vorkommen. Hat die Gleichung aber imaginäre Wurzeln, so geht eine gerade Anzahl Zeichenwechsel verloren, woraus folgt, daß jede Gleichung, die nur reelle Wurzeln besitzt, genau eben soviele positive als Zeichenwechsel, und eben soviele negative als Zeichenfolgen hat. Sind imaginäre Wurzeln vorhanden, so gibt es $v-2i$ positive, und $p-2i'$ negative Wurzeln, wo v die Zahl der Zeichenwechsel; und p die der Zeichenfolgen des Polynoms fx, i und i' aber ganze Zahlen bedeuten.

Anmerkung. Fehlt in der Gleichung $fx=0$ eins der Glieder, so hat dieselbe imaginäre Wurzeln, wenn die beiden Glieder, zwischen denen das fehlende liegt, einerlei Vorzeichen haben. Das Polynom fx enthält nämlich die Glieder qx^h+sx^{h-2}, welchen in der Zeichenreihe, wenn man in allen Derivationen $x=a$ setzt, die consecutiven Zeichen $+0+$ entsprechen, was mit $+\frac{\overline{0}}{+}+$ gleichgeltend ist, durch welches Merkmal die Existenz der imaginären Wurzeln angedeutet wird.

§. 86. Unsere Theorie liefert, wenn wir in sämmtlichen Funktionen für x zwei Zahlen a und b, wo $b>a$ ist, substituiren, und die Zeichen der Resultate in zwei entsprechenden Linien A und B ansetzen, folgende Ergebnisse:

1. In B gibt es niemals mehr Zeichenwechsel als in A.

2. Ist die Zahl der Zeichenwechsel in A und B einerlei, so hat die vorgelegte Gleichung keine Wurzel zwischen a und b.

3. Hat die Reihe B einen Zeichenwechsel weniger als A, so liegt nur eine Wurzel zwischen a und b.

4. Gibt es in A zwei Zeichenwechsel weniger als in B, so besitzt die Gleichung entweder zwei reelle Wurzeln zwischen a und b, oder es fehlen diese Wurzeln, in welchem Falle an ihre Stelle zwei imaginäre Wurzeln treten: es bleibt uns hiernach übrig, beide Fälle von einander zu unterscheiden. In dem ersten Falle lassen sich die

Wurzeln dadurch von einander trennen, daß man passende Zwischenwerthe substituirt, welche die Zeichenwechsel einen um den andern verschwinden machen, was in dem zweiten Falle nicht angeht.

5. Hat die Reihe B drei Zeichenwechsel weniger als A, so können drei reelle Wurzeln zwischen a und b vorkommen, aber auch nur eine reelle, indem die beiden andern imaginär geworden sind. Besondere Verfahrungsarten werden derlei Umstände erkennen lehren. Und so fort.

6. Der Werth von x, welcher, ohne Wurzel der Gleichung $fx=0$ zu sein, zwei Zeichenwechsel verschwinden macht, indem er nach dem Gesetz der Stetigkeit von a nach b fortschreitet, bezieht sich auf die imaginären Wurzeln dieser Gleichung, und weist auf die Existenz solcher Wurzeln hin. Für gedachten Werth werden eine oder zwei aufeinander folgende mittlere Funktionen zugleich Null. Geben vier Zeichenwechsel verloren, wobei 3 oder 4 successive, mittlere Funktionen Null geworden sind, so hat die Gleichung $fx=0$ zwei Paare imaginärer Wurzeln. Ueberhaupt hat diese Gleichung eben soviele Paare imaginärer Wurzeln, als, mit dem Verschwinden mehrerer auf einander folgenden mittleren Funktionen, für einen gewissen Werth von $x=a$, zugleich, paarweise Zeichenwechsel der Funktionenreihe zwischen zwei nächstbenachbarten Werthen verloren gegangen sind.

§. 87. Da die Einführung stetig fortschreitender Zahlen nicht wohl möglich ist, so muß man, um von der angegebenen Methode Gebrauch zu machen, folgendermaßen verfahren:

1. Man substituire für x beliebige Zahlen, welche von der Zahl $-l'$, die nur abwechselnd + und — gibt, bis zur Zahl l sich erstrecken, für welche man nur die Vorzeichen + bekommt; diese Zahlen $-l'$ und l werden die Grenzen sein, zwischen denen sämmtliche Wurzeln enthalten sind. Zwischen jenen Grenzen wird es öfters große Intervalle geben, innerhalb deren keine Wurzel liegt und welche, der Weitläufigkeit der Rechnung halber, zu umgehen sind. Die, mit willkührlich angenommenen Zahlen, gemachten Versuche überheben uns zuweilen auf leichte Weise der Mühe, derlei unnöthige Rechnungen anzustellen.

2. Bestehen die beiden Reihen A und B aus den nämlichen Zeichen, so kann keins der Polynome $f, f', f'' \ldots$ für einen, zwi-

schen a und b liegenden Werthe von x, Null werden. Eine dieser Funktionen verschwindet, wenn ein Zeichenwechsel um eine Stelle weiter nach der Rechten gerückt worden; im Fall, daß bloß eine solche Verrückung statt hat, wird die sie hervorbringende Zahl die Existenz von keiner imaginären Wurzel in der Gleichung $fx=0$ andeuten. Diese Gleichung würde zwei imaginäre Wurzeln haben, wenn zwei Zeichenwechsel für einen Werth von x, welcher irgend eine Derivation auf Null bringt, verloren gehen.

3. Verliert man von a bis b eine ungerade Anzahl Zeichenwechsel, so ist einleuchtend, daß fa und fb verschiedene Zeichen haben, während dieselben einerlei sind, wenn eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln verloren geht. Wir finden demnach den Satz wieder, demzufolge eine gerade oder ungerade Anzahl Wurzeln zwischen a und b liegt, je nachdem die Resultate fa und fb gleichartige oder ungleichartige Zeichen haben, wobei Null zu den geraden Zahlen gerechnet wird.

4. Enthält für $x=a$ die Zeichenreihe A ein Glied = Null, oder mehrere successive Nullen, so bilde man die Reihen $a-\delta$ und $a+\delta$ nach der Regel vom doppelten Zeichen. Die erste Reihe wird mit der nächst vor A vorhergehenden verglichen, um die Wurzeln, welche kleiner als a sind, anzuzeigen; die zweite mit der auf A nächstfolgenden, um die Wurzeln, welche a übersteigen, zu erkennen. Aus der Vergleichung der beiden Reihen $a-\delta$ und $a+\delta$ endlich schließt man auf die Zahl der vorhandenen imaginären Wurzeln, nach der geraden Anzahl der Zeichenwechsel, welche bei dem Uebergang von der einen zur andern verloren gegangen sind.

I. Beispiel. $fx=x^5+x+1$, $f'x=5x^4+1$, $f''x=20x^3$ u. s. f.

Hieraus ergibt sich nachstehendes Schema, wo die Regel vom doppelten Zeichen bei jedem Resultat, welches gleich Null ist, in Anwendung gebracht worden:

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
			+				
		−		−			
$x=-1$ ...	+	−	+	−	+	−	5 Zeichenwechsel.
$x=\ 0$ ...	+	0	0	0	+	+	4 oder 0 Zeichenwechsel.
		+	+	+			

Man sieht, daß eine reelle Wurzel zwischen −1 und 0 liegt,

und daß die 4 von $x<0$ bis $x>0$ verloren gegangenen Zeichenwechsel 4 imaginäre Wurzeln anzeigen. Die Figur 12 stellt die durch die Gleichung $y=fx$ ausgedrückte Curve dar.

II. Beispiel. $fx=x^4-4x^3-3x+23$, $f'x=4x^3-12x^2-3$, $f''x=12x^2-24x$, u. s. w.

	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
$x=0$ . . .	+	−	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	−	+	2 oder 4 Zeichenwechsel.
$x=1$ . . .	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	−	−	+	2 Zeichenwechsel.
$x=2$ . . .	+	+	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	−	+	2 Zeichenwechsel.
$x=3$ . . .	+	+	+	−	−	1 Zeichenwechsel.
$x=4$ . . .	+	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Es sind zwei imaginäre Wurzeln vorhanden, für welche zwei Zeichenwechsel von $x<0$ bis $x>0$ verloren gehen. Die Nullen, welche man bei $x=1$ und 2 findet, machen keinen Zeichenwechsel verschwinden, was daher rührt, daß jede Null sich zwischen zwei ungleichartigen Zeichen befindet. Endlich gibt es eine Wurzel zwischen 2 und 3, und eine andere zwischen 3 und 4. Es bleibt jetzt noch übrig, die Annäherung weiter fortzusetzen. Die Gleichung $y=fx$ hat in Figur 20 durch MOM' ihre geometrische Darstellung.

§. 88. Wenn zwischen zwei Zahlen a und b nur eine einzige Wurzel liegt, mithin bei dem Uebergange von der Reihe A zu der Reihe B nur ein Zeichenwechsel verloren geht; so nähert man sich dieser Wurzel mit Hülfe der Newton'schen Methode. Zuvor muß man jedoch den Bedingungen Genüge thun, welche diese Methode vorschreibt, nämlich, daß f' und f'' ihre Zeichen bei dem Uebergange von a auf b nicht ändern dürfen; d. h. der verloren gegangene Zeichenwechsel muß genau in der letzten Columne f statt finden. Es trifft dieß im vorigen Beispiel für die Wurzel zu, welche zwischen 2 und 3 liegt. Verliert man aber den Zeichenwechsel vor dem letzten Gliede unserer Reihen, so leisten f' und f'' der erforderlichen Bedingung nicht mehr Genüge. Man muß alsdann für a und b Zwischenwerthe substituiren, damit der Intervall, innerhalb dessen die Wurzel liegt, kleiner werde, in der Art, daß in der betrachteten Ausdehnung die durch $y=fx$

ausgedrückte Curve weder Beugung noch Wendung darbieten könne, was uns wieder auf den vorigen Fall zurück führt.

Um so in dem letzten Beispiele der zwischen 3 und 4 liegenden Wurzel näher zu kommen, muß man das Minimum welches die Zeichenänderung von f' andeutet, außerhalb der Grenzen schaffen.

Durch Ansetzung der Gleichung $f'x=0$ findet man, daß die einzige reelle Wurzel zwischen 3 und 3, 1 liegt. Da die von $fx=0$ zwischen 3, 1 und 4 eingeschlossen ist; so müssen f' und f'' einerlei Zeichen haben. Macht man $x=4$, so findet man $f'=61$; $f=11$; die Subtangente $s=-0,2$ und $x=3,8$ als erster Näherungswerth. Setzt man $x=3,8$, so kommt $x=3,78552$; u. s. w.

§. 89. Wenn von A auf B zwei Zeichenwechsel verloren gehen, so bleibt noch zu untersuchen übrig, ob wirklich zwischen a und b zwei Wurzeln liegen. Wir werden hierbei drei wesentliche Fälle zu unterscheiden haben.

Durch die von der Linken zur Rechten vorgenommene Vergleichung der zwei entsprechenden Zeichenreihen seien nun zwei ungleichartige Vorzeichen unter der nämlichen Funktion gefunden, mithin eine Zeichenfolge an die Stelle eines Zeichenwechsels getreten; hierauf sei dann ein zweiter Zeichenwechsel verloren gegangen. Findet dies vor der Columne der Zeichen von fx statt, so erhalten wir unsern dritten, hier weiter unten behandelten Fall. Verlieren wir aber den zweiten Zeichenwechsel erst in der letzten Stelle, so haben wir folgende zwei Systeme, wo in dem einen die beiden Zeichenwechsel in der drei letzten Stellen, in dem andern der erste Zeichenwechsel vor f'' verloren gegangen ist.

I. Fall					f''	f'	f
$x=a$	. . . .	+	+	−	+	−	+
$x=b$	. . . .	+	+	−	+	+	+

II. Fall				f'''	f''	f'	f
$x=a$	. . . .	+	+	+	−	−	+
$x=b$	. . . .	+	+	+	+	+	+

Es sei die parabolische Curve MOM' (Fig. 19), welche $y=fx$ zur Gleichung hat, zwischen den Abscissen $AP=a$, $AP'=b$ construirt.

Anmerkung. Die Werthe von fa und fb können zugleich negativ sein, d. h. die Zeichen können sämmtlich denjenigen entgegengesetzt sein, welche oben aufgeführt sind. Es erfordert jedoch dieser Fall keine besondere Untersuchung, indem es hinreichend ist, die Figuren 19 und 20 auf die andere Seite der Abscissenachse, durch eine Umdrehung um dieselbe, zu legen. Es bleibt alsdann im Uebrigen Alles wie vorhin.

§. 90. I. Fall: $f'a$ und $f'b$, die verschiedene Zeichen haben, stellen die Werthe der Tangenten der Winkel T und T' dar, welche die durch die Punkte M und M', deren Abscissen a und b sind, an die Curve gelegten Berührenden MT, $M'T'$ mit der Abscissenachse machen. Man sieht, daß der eine Winkel nach der rechten Seite zu spitz, der andere dagegen stumpf ist. Da die Gleichung $f'x=0$ bloß einen Zeichenwechsel verliert, so besitzt sie nur eine Wurzel zwischen a und b, d. h. die Curve $y=fx$ hat einen Punkt zwischen den beiden Werthen $f(a)$ und $f(b)$, in welchem die Berührende der Abscissenachse parallel ist. Die Funktion wechselt zwischen diesen Grenzen ihr Zeichen nicht, und bleibt positiv; die Curve kehrt mithin in dem betrachteten Intervall der Abscissenachse die erhabene Seite zu. Die Figuren 19 und 20 stellen die Form dieses Bogenstücks dar, für welches im Punkte O die Funktion $f'x$ vom Positiven zum Negativen durch Null gelangt.

Erreicht unsere Curve die Achse in dem Intervall PP' (Fig. 20), so gibt es zwei reelle Wurzeln Ak, Ak'. Im entgegengesetzten Falle sind diese Wurzeln zu imaginären geworden, dabei neigen sich die Berührenden in den verschiedenen Punkten des Bogens MOM' immer mehr und mehr der Achse, von M nach O, zu, wo der Parallelismus eintritt, worauf sie dann wieder nach M' zu eine geneigte, aber entgegengesetzte Lage annehmen. Die Concavität des Bogens bringt es mit sich, daß derselbe zwischen dem Winkel, welchen die beiden Berührenden an M und M' mit einander bilden, eingeschlossen bleibt. Hieraus ist ersichtlich, daß, wenn der Scheitel B jenes Winkels oberhalb der Achse liegt, die Curve dieselbe nicht trifft, die Wurzeln zwischen AP und AP' mithin imaginär sind. Um die eben gefundene Bedingung analytisch auszudrücken, nehmen wir die zu den Werthen a und b gehörigen Subtangenten; solche sind

$$PT=S_1=-\frac{fa}{f'a},\ P'T'=S_2=-\frac{fb}{f'b}\ \ldots\ldots (1),$$

wo die erste positiv, weil $f'a$ das Zeichen — hat, und die zweite negativ ist. Hiernach stellt sich für das Vorhandensein imaginärer Wurzeln folgendes Kennzeichen heraus:

$$\frac{fb}{f'b} + \frac{fa}{-f'a} \overset{=}{>} b-a;$$

d. h. **die Summe der absolut genommenen Subtangenten für die Abscissen a und b ist immer gleich oder grösser als der Unterschied b — a.**

Findet sich aber diese Summe $< b-a$, so läßt sich nicht unmittelbar entscheiden, ob die fraglichen Wurzeln reell oder imaginär sind, weil die Curve zwischen P und P′ die Achse treffen oder auch nicht treffen kann. In solchem Falle muß man auf die eine oder die andere Weise, wie folgt, verfahren:

Man betrachtet die Grenzen a und b als zu weit von einander abstehend, um die gestellte Frage genau beantworten zu können. Es wird deshalb vorerst ein zwischen a und b liegender Werth a' gewählt, und untersucht, ob die Zeichenreihe, mit den Reihen A und B verglichen, die Zeichenwechsel einen nach dem andern verschwinden macht. In diesem Falle sind die Wurzeln reell, und zwar liegt eine zwischen a und a', die andern zwischen a' und b. Geht der doppelte Zeichenwechsel zwischen a und a' noch verloren, so berechnet man die Subtangente für die Abscisse $x = a'$, und prüft, ob die vorhin gegebene Regel statt hat. Oder man kann auch so zu Werke gehen, als ob man gewiß wäre, daß die zwischen den Grenzen liegenden Wurzeln reell sind, und nach der Newton'schen Methode zu genaueren Näherungswerthen gelangen wollte. Man würde alsdann zwei neue Subtangenten erhalten, deren Summe die Differenz $b-a$ übertreffen könnte. In dem Maße als man sich aber dem Minimum nähert, streben die Berührenden fortwährend der Achse parallel zu werden, wodurch unsere Regel um so mehr geeignet wird, hier ihre Anwendung zu finden. Denn sind die Wurzeln imaginär, so werden die Subtangenten, deren Summe $> b-a$ ist, diesen Umstand bald zu erkennen geben. Im entgegengesetzten Falle, wo die beiden Wurzeln zu den reellen gehören, werden die Subtangenten nicht mehr fortwährend zunehmen; vielmehr wird man jeden Werth von x sich zwei Grenzen nähern sehen, welche die gesuchten Wurzeln Ak, Ak′ sind,

und keine Schwierigkeit haben, einen Zwischenwerth für x zu finden, welcher diese zwei Wurzeln von einander trennt.

§. 91. II. Fall. Die Aufgabe bekommt eine andere Gestalt, wenn fa und $f''a$ verschiedene Zeichen haben. Da $f''a$ und $f''b$ mit ungleichen Zeichen versehen sind und innerhalb der betrachteten Grenzen durch Null gehen, indem nämlich f'' einen Zeichenwechsel verliert, mithin $f''x=0$ eine Wurzel zwischen a und b hat; so wendet bei der ersten Grenze $Ap=a$ (Fig. 19) der Bogen in dem Punkte m seine Convexität nach oben zu, während er bei der zweiten Grenze $AP'=b$ seine Concavität dahin kehrt. Zwischen den Grenzen liegt folglich ein Beugungspunkt I, dessen Abscisse Aq eine Wurzel der Gleichung $f''x=0$ ist. Die Subtangenten beseitigen alsdann nicht mehr die Schwierigkeit, weil sich die Berührende mt den oben vorgeschriebenen Bedingungen nicht anpassen läßt. Man muß alsdann vorerst das Intervall kleiner machen, damit der Beugungspunkt I in demselben nicht mehr vorkomme. Man substituirt demnach für x einen Zwischenwerth a', der die zwei Wurzeln außerhalb des Raumes, in welchem sich der Punkt I befindet, zu bringen im Stande ist, wodurch dann die Sache auf den ersten Fall zurück führt.

Es könnte indessen die Curve auch die Gestalt, die in Figur 5 MIM′ zeigt, haben, wo der Beugungspunkt mit dem Punkte, in welchem die Berührende der Achse parallel ist, zusammenfällt. Vergebens würde man dann versuchen, durch gehöriges Zusammenziehen der Grenzen die Verschiedenheit der Zeichen in $f''x$ vermeiden zu wollen. Allein da f' und f'' hier zusammen Null sind, so werden die Gleichungen $f'x=0$, $f''x=0$ eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen. Die gesuchten Wurzeln werden imaginär sein, es sei denn, daß der Beugungspunkt I nicht selbst einen Durchschnittspunkt der Curve mit der Achse abgibt, was voraussetzen würde, daß gleichzeitig $fx=0$ wäre, mithin das Vorhandensein von gleichen Faktoren in der vorgelegten Gleichung zur Folge haben würde.

§. 92. III. Fall. Die Vergleichung der Reihen A und B weist den Verlust von zwei Zeichenwechseln nach, bevor man an die letzte Stelle kommt. Der zweite Zeichenwechsel sei so z. B. schon verloren gegangen, indem man zu f''' gelangt. Man behandle deßhalb die Gleichung $f'''x=0$ und untersuche, ob sie zwei reelle Wurzeln

zwischen a und b hat. Existiren solche Wurzeln nicht, so hat auch die Gleichung $f''x=0$ zwei durch die beiden verloren gegangenen Zeichenwechsel angedeutete imaginäre Wurzeln, weil die Berührende der durch die Gleichung $y=f''x$ dargestellten Curve zwischen a und b der Achse nicht parallel laufen kann, indem der Voraussetzung zufolge $f'''x$ daselbst nicht verschwindet; das Bogenstück der eben erwähnten Curve hat daher in dem Intervall ab kein Maximum, oder mit andern Worten, es liegt innerhalb desselben durchaus kein Durchschnitt der Curve mit der Abscissenachse. Ebenso läßt sich darthun, daß die Gleichungen $f'x=0$, $fx=0$ gleichfalls zwei entsprechende imaginäre Wurzeln haben.

Sind dagegen die beiden Wurzeln von $f''x=0$ zwischen a und b reell, so besitzt die Curve $y=f''x$ in diesem Intervall zwei zur Abscissenachse parallel laufende Berührenden, und hat die in Figur 21 angegebene Form, wo eine doppelte Wendung mit einem Maximum und Minimum statt findet. Der Abstand von a auf b ist daher zu beträchtlich, und man muß ihn enger zusammen ziehen, damit die Wendepunkte daselbst verschwinden und nur das Minimum allein sich vorfinde. Hierauf untersucht man, ob die Gleichung $f'''x=0$ zwei reelle Wurzeln zwischen den neuen, enger zusammen gezogenen Grenzen a′ und b′ hat, und sieht alsdann weiter nach, ob die durch die Gleichung $y=f'x$ dargestellte Curve zwei Durchschnittspunkte mit der Achse besitzt oder nicht; endlich prüft man dieselben Umstände für die ursprüngliche Gleichung. Es ist hinreichend, daß die beiden gesuchten Wurzeln für eine der Gleichungen .... $f'''x=0$, $f''x=0$, $f'x=0$ imaginär sind, um es auch in sämmtlichen darauf folgenden Gleichungen zu werden.

Uebrigens darf man im vorliegenden Fall nicht unterlassen, sich zu vergewissern, ob die Gleichung $f'''x=0$ gleiche Wurzeln habe; denn unsere Methode setzt immer voraus, daß die zu behandelnde Gleichung von derlei Wurzeln befreit sei. In dieser Beziehung bemerken wir, daß das Aufsuchen der gleichen Wurzeln in den meisten Fällen langwierig ist, weßhalb es wünschenswerth wird, dasselbe zu vermeiden, und nur dann seine Zuflucht dazu zu nehmen, wenn es die Umstände durchaus erheischen. Insofern nun der Fall der vielfachen Wurzeln zu den Ausnahmen gehört, so ist es ein großer Vorzug der Fourier'schen Methode, daß man solche Wurzeln nur dann zu suchen

braucht, wenn es durch die Operationen als unumgänglich nothwendig erkannt worden ist.

§. 93. Es bleibt noch zu untersuchen übrig, was man zu thun hat, wenn mehr als zwei Zeichenwechsel zwischen a und b verloren gehen. Durch Zusammenziehung jener Grenzen kann man es dahin bringen, daß die Zeichenwechsel entweder zu 1 und 1, oder zu 2 und 2 zum Verschwinden kommen, was die Sache wieder auf die hier oben erörterten Fälle zurückführt. Es könnte sich überdieß auch ereignen, daß für einen Werth von x zwischen a und b mehrere aufeinander folgende abgeleitete Funktionen Null würden, in welchem Fall man mehrere successive Nullen in der Zeichenreihe erhielte, welches einem dazwischen liegenden unbekannten Werthe a′ entspricht, wie wir solches in §. 86 gefunden: es gehen dann 4 oder 6 Zeichenwechsel auf einmal verloren, ein sicheres Merkmal von eben so vielen imaginären Wurzeln. Dieser Fall ist übrigens leicht zu erkennen, indem jene Derivationen gemeinschaftliche Faktoren besitzen durch deren Annullirung man den Werth von x erhält, welcher die successiven Nullen erzeugt und die Existenz der imaginären Wurzeln zur Evidenz bringt.

§. 94. Wir wollen jetzt zur Erläuterung unserer Methode einige Beispiele durchführen.

I. $fx = x^3 - 5x + 3$, $f'x = 3x^2 - 5$, $f''x = 6x$, $f'''x = 6$.

	f'''	f''	f'	f	
$x = -3$ . . .	+	—	+	—	3 Zeichenwechsel.
-2 . . .	+	—	+	+	2 Zeichenwechsel.
0 . . .	+	$\overline{0}$ / +	—	+	2 Zeichenwechsel.
$+1$ . . .	+	+	—	—	1 Zeichenwechsel.
$+2$ . . .	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Die drei Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind reell und liegen zwischen — 3 und — 2, zwischen 0 und + 1, zwischen 1 und 2. Die entsprechende Curve wird durch Figur 11 dargestellt.

II. $fx = x^3 - 2x - 5$, $f' = 3x^2 - 2$, $f'' = 6x$, $f''' = 6$.

x	f'''	f''	f'	f	
x=—1 . . .	+	—	+	—	3 Zeichenwechsel.
0 . . .	+	$\overline{0}$ +	—	—	1 Zeichenwechsel.
+1 . . .	+	+	+	—	1 Zeichenwechsel.
+2 . . .	+	+	+	—	1 Zeichenwechsel.
+3 . . .	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Außer der zwischen 2 und 3 liegenden reelle Wurzel läßt sich noch das Vorhandensein von zwei andern zwischen 0 und — 1 vermuthen. Dieselben sind jedoch imaginär, weil man für $x=-1$ findet $f'=+1$, $f=-4$, woraus $S_2=4$, was >1 ist.

III. $fx=x^5+x^3+2x^2+2$, $f'=5x^4+3x^2+4x$,

$f''=20x^3+6x+4$, $f'''=60x^2+6$, $f^{IV}=120x$, $f^V=120$;

x	f^V	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
x=—2 . . .	+	—	+	—	+	—	5 Zeichenwechsel.
—1 . . .	+	—	+	—	+	+	4 Zeichenwechsel.
0 . . .	+	$\overline{0}$ +	+	+	$\overline{0}$ +	+	0 oder 4 Zeichenwechsel.

Es liegt also eine Wurzel zwischen — 1 und — 2; die vier andern sind sämmtlich imaginär der Regel vom doppelten Zeichen zufolge. Die vorgelegte Gleichung ist gleichgeltend mit

$$(x^3+2)(x^2+1)=0.$$

IV. $fx=x^4-x^3+2x^2-6x+5$, $f'=4x^3-3x^2+4x-6$

$f''=12x^2-6x+4$, $f'''=24x-6$, $f^{IV}=24$.

x	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
x=0 . . .	+	—	+	—	+	4 Zeichenwechsel.
1 . . .	+	+	+	—	+	2 Zeichenwechsel.
2 . . .	+	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Die Natur der zwei Wurzeln zwischen 1 und 2 bleibt unentschieden; man berechnet deßhalb die Subtangenten, da die Funktionen f und f'' einerlei Zeichen +, und die Funktionen f' entgegengesetzte Zeichen haben. $x=1$ gibt $Si=1$, eine Zahl, welche dem Unterschied der Abscissen 2 und 1 gleich ist; unsere beiden Wurzeln sind also imaginär. Dasselbe gilt auch für die Grenzen 0 und 1; denn die beiden Zei-

chenwechsel sind schon vor f'' verloren gegangen, wonach sich die Wurzeln der Gleichung $f''x=0$ als imaginär herausstellen.

V. $fx=x^3-x^2+2x-3$, $f'=3x^2-2x+2$, $f''=6x-2$, $f'''=6$.

	f'''	f''	f'	f	
$x=0$ . . .	+	—	+	—	3 Zeichenwechsel.
1 . . .	+	+	+	—	1 Zeichenwechsel.
2 . . .	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Unsere Gleichung hat eine Wurzel zwischen 1 und 2. Was die andern zwischen 0 und 1 anlangt, so sind dieselben imaginär: denn man sieht, daß die zwei Zeichenwechsel schon vor f' verloren gehen, und die Gleichung $f'x=0$ keine reellen Wurzeln hat. Die entsprechende Curve wird durch Figur 12 dargestellt.

VI. $fx=x^3-3x^2-4x+13$, $f'=3x^2-6x-4$, $f''=6x-6$, $f'''=6$.

	f'''	f''	f'	f	
$x=-3$ . . .	+	—	+	—	3 Zeichenwechsel.
-2 . . .	+	—	+	+	2 Zeichenwechsel.
$+2$ . . .	+	+	—	+	2 Zeichenwechsel.
$+3$ . . .	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Außer der zwischen -3 und -2 befindlichen Wurzel lassen sich zwei zwischen 2 und 3 vermuthen. Wir substituiren $x=+2,5$ und erhalten $x=2,5$ . . . $++--$ 1 Zeichenwechsel; woraus erhellt, daß eine reelle Wurzel zwischen 2 und 2, 5, und eine andere zwischen 2, 5 und 3 liegt.

Die zufällige Annahme von $x=2,5$ bringt also auf der Stelle diese Wurzeln zur Evidenz. Im Uebrigen hätte man, um die Natur derselben zu entscheiden, auf folgende Art verfahren müssen. Die f und f'' sind positiv für $x=2$, während die f' vom Negativen zum Positiven übergehen. Es handelt sich darum, zu bestimmen, welche von den in der Figur 20 angegebenen Formen der entsprechenden Curve angehört. Man nimmt deßhalb für beide Grenzen die Subtangenten.

$$x=2 \text{ gibt } f=1,\ f'=-4,\ S_1=\tfrac{1}{4};$$
$$x=3 \text{ gibt } f=1,\ f'=\ \ 5,\ S_2=\tfrac{1}{5}.$$

Hiernach setzt man $x=2\frac{1}{4}$ und $x=2\frac{4}{5}$. Der erste dieser Werthe gibt $f=0,2$, $f'=-2,3$, $S_1=\frac{2}{23}=0,09$, und $x=2,34$.

Der zweite liefert $f=0,23$, $f'=2,72$, $S_2=0,08$ und $x=2,72$. Man ist folglich dahin geführt, einen Zwischenwerth, wie 2,5 für x zu wählen.

VII. $fx=x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-4x+1$.

	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
$x=0$ . . .	+	—	+	—	+	4 Zeichenwechsel.
$\frac{1}{3}$ . . .	+	$\overline{0}$ +	+	—	+	2 oder 4 Zeichenwechsel.
$\frac{2}{3}$ . . .	+	+	+	+	—	1 Zeichenwechsel.
1 . . .	+	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Die Grenzen der Wurzeln sind 0 und 1; man muß sie enger zusammen ziehen, da die vier Zeichenwechsel innerhalb derselben verschwinden. Man macht $x=\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Einerseits findet man eine Null zwischen zwei positiven Zeichen, was zwei imaginäre Wurzeln zur Folge hat; andrerseits sieht man, daß eine reelle Wurzel zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, und eine zweite zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 liegt.

VIII. $fx=x^5-6x^3+7x^2-8x+7$.

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
$x=-4$ . . .	+	—	+	—	+	—	5 Zeichenwechsel.
-3 . . .	+	—	+	—	+	+	4 Zeichenwechsel.
0 . . .	+	$\overline{0}$ +	—	+	—	+	4 Zeichenwechsel.
1 . . .	+	+	+	—	—	+	2 Zeichenwechsel.
2 . . .	+	+	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Die Gleichung $fx=0$ hat eine reelle Wurzel zwischen -3 und -4. Die Natur der zwei Wurzeln zwischen 0 und 1, und der zwischen 1 und 2 bleibt noch unentschieden. Hinsichtlich der erstern setzt man $f'x=0$, weil die zwei Zeichenwechsel bei f' verloren gegangen sind. Da f' und f''' für $x=1$ entgegengesetzte Zeichen haben, so ziehen wir das Intervall mehr zusammen. Wir nehmen daher $x=\frac{1}{2}$, woraus $f'''=-21$, $f''=-1\frac{1}{2}$, $f'=5\frac{3}{16}$, und die Verschiedenheit der Zeichen von f' und f''' besteht nicht mehr. Wir berechnen jetzt die Subtangenten, um zu untersuchen, ob die beiden Wurzeln zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ reell sind. Wir finden $S_2>\frac{1}{2}$; die Wurzeln der Gleichung $f'x=0$, und damit auch die der ursprünglichen $fx=0$ sind also imaginär zwischen diesen Grenzen. Was die andern Wurzeln zwischen

1 und 2 anlangt, so muß man ebenfalls das Intervall vermindern. Für $x=1\frac{1}{2}$ erhält man $f=-1,9$, während für $x=1$ und 2 die Resultate beziehungsweise 1 und 3 sind. Hieraus wird ersichtlich, daß unsere Gleichung eine reelle Wurzel zwischen 1 und $1\frac{1}{2}$, und eine andere zwischen $1\frac{1}{2}$ und 2 hat.

IX. $fx=3x^5-25x^3+90x-127.$

$x=-2$ . . .	+	−	+	−	+	−	5 Zeichenwechsel.
-1 . . .	+	−	+	+	+	−	3 Zeichenwechsel.
$+1$ . . .	+	+	+	−	+	−	3 Zeichenwechsel.
$+2$ . . .	+	+	+	+	+	−	1 Zeichenwechsel.
$+3$ . . .	+	+	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Hier liegt offenbar eine Wurzel zwischen 2 und 3. Macht man $x=2,5$, so kommt

$$f=0,34,\ f'=207,19,\ S=-0,002;\ \text{woraus}\ x=2,498.$$

Die andern Wurzeln sind imaginär. Denn von 1 auf 2 gehen die Zeichenwechsel bei f' schon verloren, was uns zuvörderst auf die Behandlung der Gleichung $f'x=0$ führt. Indem man $x=1,5$ setzt, findet man in f' nur einen Zeichenwechsel, wodurch die zwei reellen Wurzeln getrennt sind. Es bleibt jetzt zu untersuchen übrig, ob die Wurzeln der Gleichung $fx=0$ ebenfalls von einander gesondert sind. Wir haben

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
$x=1$	+	+	+	−	+	−	3 Zeichenwechsel.
$x=1,5$ . . .	+	+	+	−	−	−	1 Zeichenwechsel.

Da die Bedingungen der Zeichen erfüllt werden, so schreiten wir zur Berechnung der Subtangenten. Wir finden

$$f=53,59,\ f'=-2,81,\ S_2=\frac{5359}{281}>0,5;$$

die vorgelegte Gleichung hat also ein Paar imaginäre Wurzeln zwischen 1 und 2.

In Betreff der zwischen -1 und -2 eingeschlossenen Wurzeln ist man abermals auf die Behandlung der Gleichung $f'x=0$ hingewiesen; dieselbe hat zwei durch $x=-1,6$ getrennte Wurzeln. Wir erhalten

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
$x=-2$ . . .	+	−	+	−	+	−	5 Zeichenwechsel.
$x=-1,6$ . .	+	−	+	−	−	−	3 Zeichenwechsel.
$x=-1,5$ . .	+	−	+	+	−	−	3 Zeichenwechsel.

Die Bedingungen hinsichtlich der Zeichen sind erfüllt, mithin die Anwendung der Unterscheidungsregel möglich; daraus folgt, Subtangente $S_1 = \frac{200}{37} > 0,5$; also hat die Gleichung $f'x=0$ zwei imaginäre Wurzeln und damit auch die ursprüngliche $fx=0$.

Man bemerkt, daß f' und f'' für $x=-1,5$ ungleichartige Zeichen bekommen, was zeigt, daß das Intervall von $-1,5$ auf -2 zu ausgedehnt ist.

X. $fx = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$

	f^{VII}	f^{VI}	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
$x=-2$	+	−	+	−	+	−	+	−	7 Zeichenwechsel.
$=-1$	+	−	+	−	+	+	−	+	6 Zeichenwechsel.
$x=0$	+	0	−	0	−	+	−	+	4 Zeichenwechsel.
		+	−	−	−	+	−	+	
$x=1$	+	+	+	+	+	−	−	+	2 Zeichenwechsel.
$x=2$	+	+	+	+	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Eine reelle Wurzel liegt also zwischen -2 und -1, und ein Paar imaginärer Wurzeln zwischen -1 und 0. Die Beschaffenheit der Wurzeln zwischen 0 und $+1$ und der zwischen 1 und 2 bleibt jedoch unentschieden. Was die ersteren anlangt, so behandeln wir die Gleichung $f''x=0$. Das Intervall muß enger zusammen gezogen werden, weil f'' und f^{IV} verschiedene Zeichen haben. Indem wir daher $x=\frac{1}{2}$ setzen, erhalten wir

$x>0$ . . .	+	+	−	−	−	+	−	+	4 Zeichenwechsel.
$x=\frac{1}{2}$ . . .	+	+	+	−	−	−	−	+	2 Zeichenwechsel.

Die Anwendung der Unterscheidungsregel gibt Subtangente $S > -0$, Unterschied der entsprechenden Abscissen. Die beiden Wurzeln der Gleichung $f''x=0$ und damit auch der Gleichung $fx=0$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ sind also imaginär. Innerhalb der Grenzen $\frac{1}{2}$ und 0 liegen offenbar keine Wurzeln.

In Betreff der zwischen 1 und 2 befindlichen Wurzeln müssen wir das Intervall abermals zusammen ziehen. Wir setzen deßhalb $x=\frac{3}{2}$, wodurch entsteht:

$x=1$ . . .	+	+	+	+	+	−	−	+	2 Zeichenwechsel.
$\frac{3}{2}$ . . .	+	+	+	+	+	+	+	−	1 Zeichenwechsel.
2 . . .	+	+	+	+	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Demnach hat unsere Gleichung eine reelle Wurzel zwischen 1 und $\frac{3}{2}$, und eine andere zwischen $\frac{3}{2}$ und 2.

XI. $fx = x^6 - 6x^5 + 40x^3 + 60x^2 - x - 1 = 0.$

	f^{VI}	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
$x = -1$ ...	+	−	+	−	+	−	+	6 Zeichenwechsel.
$-0,5$ ...	+	−	+	+	+	−	+	4 Zeichenwechsel.
0 ...	+	−	0	+	+	−	−	3 Zeichenwechsel.
1 ...	+	0	−	0	+	+	+	2 Zeichenwechsel.
2 ...	+	+	0	−	+	+	+	2 Zeichenwechsel.
3 ...	+	+	+	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Da bei Hinweglassung von $x = -\frac{1}{2}$ drei Zeichenwechsel von -1 auf 0 verloren gegangen wären, so wurde die Wahl dieses Zeichenwechsels nothwendig. Die verschwindenden Resultate lassen uns über das Dasein der imaginären Wurzeln in Zweifel, indem sie zwischen zwei ungleichartigen Zeichen stehen.

Zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0 kommt eine reelle Wurzel, und eine zweite zwischen 0 und 1 vor; dieselben sind $x = -0,13 \ldots$ und $+0,12 \ldots$. Wir beschäftigen uns nun mit den vier übrigen zwischen -1 und $-\frac{1}{2}$, und zwischen 2 und 3 vorhandenen Wurzeln. Da die zwei Zeichenwechsel bei f'' schon verloren gegangen sind, so setzen wir $f''x = 0$. Wir müssen jedoch zuvor ermitteln, ob diese Gleichung keine vielfachen Wurzeln hat. Solches hat hier statt, denn es ist

$$f'' = 30(x^2 - 2x - 2)^2, \quad f''' = 120(x-1)(x^2 - 2x - 2).$$

Die durch die Gleichung $y = f''x$ dargestellte Curve berührt die Achse in den Punkten, deren Abscissen die Wurzeln der Gleichung $x^2 - 2x - 2 = 0$ sind, nämlich $x = 1 \pm \sqrt{3}$ (Fig. 22). Nähme man also diese Werthe von x, um die Zeichenreihe unserer Funktionen daraus herzuleiten; so würde man zwei successive Nullen finden, und die Regel vom doppelten Zeichen würde folglich nachweisen, daß zwei Zeichenwechsel verloren gehen, wie gering auch der Unterschied zwischen den zwei Grenzen und diesen Wurzeln sein möge. Da die letztern der Gleichung $f'x = 0$ kein Genüge leisten, so hat diese Gleichung, mithin auch die ursprüngliche, weder zwischen -1 und $-0,5$, noch zwischen 2 und 3 reelle Wurzeln.

XII. $fx = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$.

x		f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
x = −1	. . .	+	−	+	−	+	4 Zeichenwechsel.
0	. . .	+	−	+	+	+	2 Zeichenwechsel.
1	. . .	+	0	−	0	+	2 Zeichenwechsel.
2	. . .	+	+	+	−	+	2 Zeichenwechsel.
3	. . .	+	+	+	+	+	0 Zeichenwechsel.

Es lassen sich paarweise reelle Wurzeln zwischen 0 und −1, und zwischen 2 und 3 vermuthen. Indem man diese letzteren sucht, findet man $S_1 = \frac{2}{6}$, $S_2 = -\frac{2}{12}$. Die Anwendung der oft erwähnten Regel gibt $S_1 - S_2 < 1$; sie läßt also in Ungewißheit über die Natur der Wurzeln. Als genäherte Wurzeln hat man $x = 2,4$ und $2,8$. Durch Substitution erhalten wir

$$x = 2,4 \quad . \; . \; . \quad + + + - 3,024 + 0,0416.$$
$$2,8 \quad . \; . \; . \quad + + + + 5,328 + 0,2976.$$

Hiernach $S_1 = 0,01$, $S_2 = -0,06$, $x = 2,41$ und $2,74$.

Da die Subtangenten bei dem Näherrücken an das Minimum abnehmen, anstatt zu wachsen; so hat man daran ein Kennzeichen, daß die Wurzeln reell sind. Man trennt dieselben durch einen Zwischenwerth wie $x = 2,5$, wodurch wir erhalten: $+ + + - -$; man kann jetzt zur Annäherung der ausgeschiedenen reellen Wurzeln schreiten. Auf ähnliche Art zeigen sich auch die Wurzeln zwischen 0 und −1 als reell. Die vorgelegte Gleichung hat zu Wurzeln $1 \pm \sqrt{2}$, und $1 \pm \sqrt{3}$; sie ist gleichgeltend mit $(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$. Die durch die Gleichung $y = fx$ dargestellte Curve hat beinahe die Form von Fig. 13.

§. 95. **Sturm's Methode.** Vorausgesetzt, daß $fx = 0$ lauter ungleiche Wurzeln habe, verfährt man nach Sturm genau so, als ob man mittelst der Regel des gemeinschaftlichen Theilers gleiche Faktoren von fx suchen wollte, jedoch mit der Vorsicht, daß man vorher jeden einzelnen Rest mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt, ehe man ihn als Divisor verwendet. Man dividirt also fx durch $f'x$, alsdann $f'x$ durch den mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Rest, u. s. f. Auf solche Weise erhalten wir eine Reihe von Polynomen, deren Grade immer niedriger werden, und von denen jedes einmal Dividend, das anderemal Divisor ist. Diese Polynome nebeneinander geschrieben sind:

$$fx, f'x \ldots Fx, \varphi x, \psi x \ldots V \ldots \quad (M),$$

wo jedes Glied der mit — 1 multiplicirte Rest ist, welcher aus der Division der beiden nächst vorhergehenden Glieder entsteht, und V eine Zahl bedeutet. Man substituire nun in jedes dieser Polynome für x eine beliebige Zahl a, und setze in eine Linie die successiven Zeichen der so erhaltenen Resultate. Dasselbe geschehe in Bezug auf eine andere Zahl b, wobei die Zeichen der Resultate in Uebereinstimmung mit den erstern geschrieben werden. Es handelt sich jetzt darum, zu beweisen, daß, wenn $b>a$ ist, die zweite Zeichenreihe ebensoviele Zeichenwechsel verloren hat, als die Gleichung $fx=0$ reelle Wurzeln zwischen a und b besitzt. Kommt in beiden Reihen eine gleiche Anzahl Zeichenwechsel vor, so liegt zwischen diesen beiden Zahlen keine reelle Wurzel.

1. Wir haben in §. 80 nachgewiesen, daß, wenn in einer Funktion φx, dem x stetig neben einander liegende wachsende Werthe beigelegt werden, diese Funktion ein und dasselbe Vorzeichen behält, so lange sie nicht für einen jener Werthe Null wird. Dagegen ändert φx sein Vorzeichen, wenn $x=\alpha$ gibt $\varphi\alpha=0$; so lange $x<\alpha$, ist das Zeichen von φx dem von φ,α entgegengesetzt, mit demselben aber einerlei, sobald $x>\alpha$.

2. Zwei nebeneinander liegende Polynome der Reihe (M) können für irgend einen Werth $x=\alpha$ nicht zugleich Null werden. Denn drei successive Funktionen Fx, φx, ψx, von welchen die eine Dividend, die andere Divisor, und die dritte der mit entgegengesetztem Vorzeichen genommene Rest ist, geben offenbar

$$Fx = Q \times \varphi x - \psi x.$$

Wäre nun für $x=\alpha$ zugleich $\varphi\alpha=\psi\alpha=0$, so wäre auch $F\alpha=0$, d. h. das dem Polynom φx vorhergehende Fx würde ebenfalls Null werden, und dieß so weiter fort, bis zu $f'x$ und fx hinauf: fx hätte daher gleiche Faktoren, was deßhalb nicht möglich ist, weil wir in demselben lauter verschiedene Wurzeln vorausgesetzt haben. Ebenso sieht man, daß $F\alpha=\varphi\alpha=0$ geben würde $\psi\alpha=0$, wodurch alle nachfolgenden Funktionen, so wie auch V zum Verschwinden kämen; V muß aber eine constante Zahl sein, insofern $fx=0$ von vielfachen Wurzeln frei gedacht wird.

3. Jedes nullwerdende Polynom steht zwischen zwei Resultaten, welche entgegengesetzte Vorzeichen haben. Denn ist $\varphi\alpha=0$, so hat

man $F\alpha = -\psi\alpha$, woraus hervorgeht, daß die drei Polynome die eine oder die andere folgender Zeichenverbindungen darbieten werden: $+0-$, oder $-0+$.

4. Durch das Nullwerden irgend einer der mittleren Funktionen tritt weder in der nächstvorhergehenden, noch in der nächstfolgenden Reihe hinsichtlich der Anzahl der Zeichenwechsel eine Veränderung ein.

In der That gestalten sich die Zeichen der Polynome Fx, φx, ψx für die drei Werthe $\alpha - h$, α, $\alpha + h$, wenn nur h hinlänglich klein gedacht wird, folgendermaßen:

	F,	φ,	ψ		F,	φ,	ψ
entweder				oder			
für $x = \alpha - h$ . . .	+	+	−		+	−	−
— $x = \alpha$	+	0	−		+	0	−
— $x = \alpha + h$ . . .	+	−	−;		+	+	−;
oder				oder			
für $x = \alpha - h$ . . .	−	+	+		−	−	+
$x = \alpha$	−	0	+		−	0	+
$x = \alpha + h$ . . .	−	−	+;		−	+	+;

d. h. in allen vier denkbaren Fällen hat die Zeichenreihe für $x = \alpha + h$ genau dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln, wie die Reihe für $x = \alpha - h$.

5. Wir haben nun zu untersuchen, wie es sich in dieser Hinsicht mit dem letzten und ersten Polynom verhält, da dieselben sich nicht wie die übrigen zwischen zwei Zeichen befinden. V ist eine bloße Zahl, wird daher in den Resultaten immer dasselbe Zeichen behalten. Wird aber fx gleich Null für $x = \alpha$, so haben $f(\alpha + h)$ und $f'\alpha$ allemal einerlei Vorzeichen und ein von $f(\alpha - h)$ verschiedenes. Die Vorzeichen stehen hiernach:

	f,	f′		f,	f′
entweder					
für $x = \alpha - h$ . . .	+	−		−	+
— $x = \alpha$	0	−		0	+
— $x = \alpha + h$ . . .	−	−;		+	+;

ein Zeichenwechsel wird also in eine Zeichenfolge umgewandelt, wenn fx für einen reellen Werth von x auf Null kommt.

6. Läßt man x allmählig weiter fortwachsen, so kann seinerseits $f'x$ durch Null gehen und sein Zeichen ändern, ohne daß dadurch die Anzahl der Zeichenwechsel, wie wir gesehen haben, geändert wird. Sobald fx und $f'x$ wieder verschiedene Zeichen besitzen, kann fx von

Neuem durch Null gehen, die Zeichen erhalten, welche vorher $f'x$ hatte, und abermals einen Zeichenwechsel verlieren, und dieß sofort.

7. Hiernach wäre der oben ausgesprochene Satz vollständig außer Zweifel gesetzt, weil für den jedesmaligen Durchgang von fx durch Null ein Zeichenwechsel verloren geht, und die übrigen Polynome rücksichtlich der Anzahl der Zeichenwechsel keine Veränderung herbeiführen.

8. Uebrigens ist es einleuchtend, daß, ohne unsere Folgerungen zu beeinträchtigen, man das eine oder das andere Polynom durch eine positive Zahl multipliziren oder dividiren könne. Dergleichen numerische Faktoren setzen uns in Stand, die gebrochenen Coeffizienten wie bei der Methode des gemeinschaftlichen Theilers, zu vermeiden.

Anmerkung. Es ist nicht gerade nöthig, die gleichen Wurzeln vorerst auszuscheiden, sondern man kann das Verfahren sogleich auf $fx=0$ selbst anwenden. Hat nämlich $fx=0$ vielfache Wurzeln, so wird der letzte Rest gleich Null, und der letzte Divisor ist der größte gemeinschaftliche Theiler. Man dividirt nun fx durch diesen Theiler und wendet dasselbe Verfahren auf den so gefundenen Quotienten φx an, wobei man jetzt versichert ist, daß $\varphi x=0$ lauter verschiedene Wurzeln hat.

§. 96. Bei der Anwendung dieses Lehrsatzes verfährt man nun folgendermaßen: In sämmtlichen Polynomen (M) setze man vorerst $x=0$, was jeder Funktion das Zeichen ihres letzten Gliedes gibt, hierauf mache man $x=$ der oberen Grenze l der positiven Wurzeln, wodurch die successiven Zeichen des ersten Gliedes jedes Polynoms zum Vorschein kommen, indem das dahinausläuft $x=\infty$ zu setzen. Alsdann nehme man $x=-l'$, der Grenze der negativen Wurzeln, was die nämlichen Zeichen wie $x=-\infty$ gibt. Man zähle ferner, wie viel Zeichenwechsel in jeder dieser drei Reihen vorkommen. Wenn dabei ein Resultat Null wird, so ersetzt man dasselbe nach Belieben durch ein Plus- oder Minuszeichen, oder nimmt gar keine Rücksicht darauf, was einerlei ist, indem diese Null sich zwischen zwei entgegengesetzten Zeichen befindet. Die vorgelegte Gleichung $fx=0$ hat dann ebensoviele negative Wurzeln, als Zeichenwechsel von $-l'$ auf 0 Null und ebensoviele positive Wurzeln, als Zeichenwechsel von 0 auf l verschwinden.

Um die fraglichen Wurzeln mehr von einander zu trennen, sub-

stituirt man Zwischenwerthe, welche so lange einander näher gerückt werden, bis man einen Zeichenwechsel um den andern verliert. Der größern Ordnung halber setzt man zuvörderst x gleich Null, nimmt für dasselbe hierauf wachsende Zahlen, sowohl positive als negative, bis man die nämlichen Zeichenreihen erhält, die $+\infty$ und $-\infty$ hervorbringen, in welchem Falle man zu den beiden Grenzen gelangt, ist, die sich hiernach von selbst darbieten.

§. 97. Wir wollen nun unsere Regel durch einige Beispiele erläutern:

I. $fx = x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x + 5 = 0.$

$$\text{also } f' = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 6.$$

Die übrigen Funktionen sind:

$$-13x^2 + 68x - 74, \quad -792x + 1141, \quad +1892293.$$

Man bekommt die Zeichenreihe für

x			
x=0	. . .	+ − − + +	2 Zeichenwechsel.
1	. . .	+ − − + +	2 Zeichenwechsel.
2	. . .	+ + + − +	2 Zeichenwechsel.
4	. . .	+ + − − +	2 Zeichenwechsel.

Da hier kein Zeichenwechsel verloren geht, so hat die vorgelegte Gleichung vier imaginäre Wurzeln.

II. $fx = x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 = 0.$ Die Hülfsfunktionen sind

$$f'x = 5x^4 + 3x^2 + 4x;$$

ferner $-x^3 - 3x^2 - 5$, $-16x^2 + 7x - 25$, $-3x - 19$, $+6400$:

hiernach x								
= −5 . . .	−	+	+	−	+	+	3 Zeichenwechsel.
−2 . . .	−	+	−	−	−	+	3 Zeichenwechsel.
−1 . . .	+	+	−	−	−	+	2 Zeichenwechsel.
0 . . .	+	0	−	−	−	+	2 Zeichenwechsel.
+1 . . .	+	+	−	−	−	+	2 Zeichenwechsel.

Es gibt also bloß eine reelle Wurzel, und diese liegt zwischen −2 und −1.

III. $fx = x^3 + 6x^2 - 131x - 36 = 0.$ Die Hülfsfunktionen sind

$$f'x = 3x^2 + 12x - 131, \quad 13x - 7, \quad 20900.$$

für $x =$					
-100 . . .	$-$	$+$	$-$	$+$	3 Zeichenwechsel.
-15 . . .	$-$	$+$	$-$	$+$	3 Zeich.
-14 . . .	$+$	$+$	$-$	$+$	2 Zeich.
-10 . . .	$+$	$+$	$-$	$+$	2 Zeich.
-1 . . .	$+$	$-$	$-$	$+$	2 Zeich.
0 . . .	$-$	$-$	$-$	$+$	1 Zeich.
1 . . .	$-$	$-$	$+$	$+$	1 Zeich.
9 . . .	0				
10 . . .	$+$	$+$	$+$	$+$	0 Zeich.

Die drei Wurzeln sind also reell, und zwar liegt eine irrationale zwischen -15 und -14, eine zweite irrationale zwischen -1 und 0, die dritte ist rational und gleich 9.

IV. $fx = x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0.$

Die Hülfsfunktionen sind $f' = 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46$, $x^3 - 1,701x^2 - 3,145x + 8$; 147; $x^2 - 1,352 - 0,98$; $x - 2,97$: -1.

Hiernach $x =$							
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	4 Zeich.
0	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	2 Zeich.
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	1 Zeich.
-6	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	4 Zeich.
-5	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	3 Zeich.
-1	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	3 Zeich.
0	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	2 Zeich.
4	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2 Zeich.
5	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	1 Zeich.

Es liegt also eine reelle Wurzel zwischen -6 und -5, eine zweite zwischen -1 und 0, und eine dritte zwischen 4 und 5; die beiden andern Wurzeln sind imaginär.

V. $fx = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0.$ Man hat
$5x^3 - x^2 + 2x - 1$; $-5x^2 + 7x - 2$; $-54x + 29$; -925.

$x =$						
0	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3 Zeich.
$\frac{1}{3}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3 Zeich.
$\frac{2}{3}$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	2 Zeich.
1	$+$	$+$	0	$-$	$-$	1 Zeich.

Es liegt also eine reelle Wurzel zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, und eine andere zwischen $\frac{2}{3}$ und 1; die beiden andern sind imaginär.

VI. $fx = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$. gibt

$2x^3 - 6x + x + 3;\ 5x^2 - 10x - 7,\ x - 1,\ + 12.$

x =						
− 1 . . .	+	−	+	−	+	4 Zeichenwechsel.
0 . . .	+	+	−	−	+	2 Zeich.
1 . . .	+	0	−	0	+	2 Zeich.
2 . . .	+	−	−	+	+	2 Zeich.
3 . . .	+	+	+	+	+	0 Zeich.

Die Gleichung hat daher zwei reelle Wurzeln zwischen 0 und —1, und zwei andere zwischen 2 und 3.

Der Sturm'sche Lehrsatz ist merkwürdig und sollte in die Elemente der Algebra aufgenommen werden. Seine Aehnlichkeit mit der Fourier'schen Methode ist nicht zu verkennen, auch hat sich der Verfasser, wie er selbst gesteht, derselben bei seinen Untersuchungen bedient. Es bleibt nur noch übrig, die innerhalb der eingeführten Zahlen liegenden, nicht isolirten Wurzeln von einander zu trennen, was eine weitere Substitution von Zwischenwerthen erheischt. Uebrigens bietet diese Methode kein Mittel dar, eine solche Trennung zu bewerkstelligen, noch lehrt sie, wie man den gesuchten Wurzelwerthen immer näher kommen könne.

Anmerkung. Die längste der bei dieser Methode vorzunehmenden Rechnungen ist diejenige, welche den Rest der Division von fx durch f'x gibt; die in §. 51 angeführte Regel wird übrigens jene Operation bedeutend abkürzen.

Wer sich über die Methoden von Fourier und Sturm noch ausführlicher belehren will, den verweisen wir auf nachstehende Weise:

1) Analyse des équations déterminées, première partie, par Fourier, Paris, 1831, welches Werk der Verfasser leider unbeendigt hinterlassen hat.

2) Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen, von Moritz Wilhelm Drobisch. Leipzig bei Voß. Die verschiedenen auf die Auflösung der höheren Gleichungen Bezug habenden Methoden und Lehrsätze finden sich hier auf eine lehrreiche und anziehende Weise dargestellt.

3) Anweisung zur Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, von J. A. Eytelwein. Berlin, bei Reimer.

4) Journal für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Crelle, Band 13, Jahrgang 1835.

§. 98. **Büdan's Methode.** In der Gleichung $fx=0$ werde $x=y+a$ gesetzt; die Unbekannte dieser transformirten Gleichung ist $y=x-a$, welche Gleichung sich nach dem im §. 34 gegebenen Verfahren leicht finden läßt. Auf ähnliche Weise seien die transformirten Gleichungen in $x-b$, $x-c$, ... gebildet, wo a, b, c ... beliebige, wachsende Zahlen sind. Zu bemerken ist, daß sich diese Gleichungen successive von einander herleiten lassen. In der That, wenn $b=a+\alpha$, $c=b+\beta$..., so folgert man aus der ersten transformirten Gleichung in y oder $x-a$, diejenige, deren Unbekannte $z=y-\alpha=x-(a+\alpha)=x-b$ ist. Ebenso entsteht aus der letzten Gleichung diejenige, welche $t=z-\beta=x-c$ zur Unbekannten hat; u. s. f.

Wir nehmen vorerst an, daß sämmtliche Wurzeln von $fx=0$ reell sind, mithin ist die Anzahl der positiven Wurzeln gleich der der Zeichenwechsel; dasselbe gilt von jeder unserer transformirten Gleichungen. Liegen nun aber zwischen 0 und a Wurzeln, so machen sie $y=x-a$ negativ; die Zahl der Zeichenwechsel wird daher bei der transformirten Gleichung in $x-a$ soviele Einheiten weniger betragen, als zwischen 0 und a Wurzeln vorhanden sind. Haben folglich die vorgelegte Gleichung und ihre transformirte in $x-a$ eine und dieselbe Anzahl Zeichenwechsel, so besitzt die erste keine Wurzel zwischen 0 und a; sie hat deren 1, 2, 3...., wenn jene transformirte Gleichung 1, 2, 3 ...., Zeichenwechsel verliert. Gleicherweise werden für die Gleichung $z=y-\alpha$, ebensoviele Zeichenwechsel bei dem Uebergang der Gleichung in y auf die in z verloren gehen, als sich Wurzeln von y zwischen 0 und α, oder als sich deren von x zwischen a und b befinden, weil $b=a+\alpha$; u. s. f. Was die negativen Wurzeln anlangt, so vertauscht man x mit $-x$ in $fx=0$, und bestimmt dann die positiven wie vorhin.

Diese Folgerung ist aber nicht mehr richtig, sobald die vorgelegte Gleichung imaginäre Wurzeln hat, und man bleibt hier in Ungewißheit, wenn auf einmal zwei Zeichenwechsel verloren gehen, ob dieser Verlust von dem Dasein zweier dazwischen liegenden Wurzeln herrührt, oder ob diese Wurzeln fehlen und zu imaginären geworden sind. Der Verlust von drei Zeichenwechseln läßt gleichfalls im Zweifel, ob es drei reelle Wurzeln oder nur eine gibt; u. s. f.

Nach Büdan müßte man in solchem Falle für das] Intervall einen Bruch nehmen, um es so mehr zusammenzurücken, damit, wenn wirklich zwei Wurzeln vorhanden sind, man dieselben von einander trennen könne, was sich durch den Verlust der Zeichenwechsel einen um den andern zu erkennen gibt. Haben dergleichen Wurzeln eine sehr geringe Differenz, sind sie z. B. erst in der zweiten Decimalstelle von einander verschieden; so kann man ihre Trennung nur dadurch bewerkstelligen, daß man das Intervall zwischen den Zahlen 0, a, b, c... geringer als ein Hundertel annimmt. Derlei Rechnungen sind jedoch äußerst langwierig; überdieß würde man, im Falle die fraglichen Wurzeln wirklich fehlen, mithin die Trennung unmöglich ist, die Annäherung sehr weit treiben können, ohne jemals die Gewißheit zu erreichen, daß diese Wurzeln in der That nicht vorhanden sind, weil es möglich ist, daß sie näher aneinander liegen, als es der Grad der Annäherung, welchen man erhalten hat, angibt. Dieser Einwurf gegen die Methode kann nicht gehoben werden, einige besondere Fälle abgerechnet, in welchen Büdan die Schwierigkeit beseitigt, die übrigens in allen andern Fällen nicht zu umgehen ist. Es kann daher die Methode keineswegs als befriedigend betrachtet werden.

§. 99. Wir wollen nun sehen, wie der Verfasser seine Methode gebraucht, um die Wurzeln genauer zu finden. Aus der Gleichung $fx=0$ leitet er successive sämmtliche transformirte Gleichungen in $x-1$, $x-2$, $x-3$..., nach dem oben erwähnten Verfahren ab, bis er auf eine Gleichung kommt, in welcher sich nur die Zeichen $+$ vorfinden. Aus der Zahl der verloren gegangenen Zeichenwechsel erfährt er, wie viel Wurzeln zwischen den Zahlen 0, 1, 2... möglicherweise vorhanden sind, wobei sich die in jeder Wurzel enthaltenen Ganzen zu erkennen geben. Hat die transformirte Gleichung in $x-a$ Null als letztes Glied, so ist $x-a$ Faktor von fx; fehlen gleichzeitig mehrere hinteren Glieder in jener Transformirten, so ist a eine vielfache Wurzel. Auf solche Weise findet er alle ganzen Wurzeln, gleiche und ungleiche. Der Quotient, von fx dividirt durch $x-a$, bleibt alsdann besonders zu behandeln übrig. Die transformirten Gleichungen in $x-0$, $x-1$, $x-2$..., mögen durch (0), (1), (2)... bezeichnet sein.

Als erstes Beispiel diene die Gleichung:

$$x^4-6x^3+16x^2-24x+16=0.$$

Man hat	(0) . . .	$1-6+16-24+16$
	(1) . . .	$1-2+\ 4-\ 6+\ 3$
	(2) . . .	$1+2+\ 4\quad 0\quad 0$

Also ist fx durch $(x-2)^2$ theilbar, wobei man den Quotienten $(x-1)^2+2(x-1)+4=0$ bekommt, dessen Wurzeln imaginär sind.

Ein zweites Beispiel sei die Gleichung: $x^4-8x^2-16x-12=0$. Indem wir bei den transformirten Gleichungen stehen bleiben, welche Zeichenwechsel verlieren, und deren Behandlung ausreicht, haben wir

(0) . . .	$1\quad 0-\ 8-\ 16-12$	1	Zeichenwechsel.
(3) : . .	$1+12+46+\ 44-51$	1	Zeich.
(4) . . .	$1+16+88+176+52$	0	Zeich.

x mit —x vertauscht (0) . . .	$1\quad 0-\ 8+16-12$	3	Zeich.
(1) . . .	$1+4-\ 2+\ 4-\ 3$	3	Zeich.
(2) . . .	$1+8+16+16+\ 4$	0	Zeich.

Hieraus sieht man, daß eine Wurzel zwischen 3 und 4 eingeschlossen ist, und zwischen -1 und -2 deren 3, oder auch nur eine liegen könne, ohne gerade zu wissen, ob das eine oder das andere statt habe.

In allen Fällen lernt man also auf diese Weise den ganzzahligen Theil a jeder Wurzel kennen. Um die Ziffer a' der Zehntel, a'' der Hundertel u. s. f. zu finden, setzen wir

$$x-a=\tfrac{1}{10}x',\ x'-a'=\tfrac{1}{10}x'',\ x''-a''=\tfrac{1}{10}x''',$$ u. s. f., woraus

$$x=a+\tfrac{1}{10}a'+\tfrac{1}{100}a''+\tfrac{1}{1000}a'''+ \text{etc.}$$

Da a das größte in x enthaltene Ganze ist, so hat man $x-a<1$, mithin $x'<10$. Ebenso ist, wenn a' das größte in x' enthaltene Ganze anzeigt, $x'-a'<1$, und $x''<10$, u. s. f. Hieraus sieht man, daß die in x', x'', x''' . . . enthaltenen Ganzen sämmtlich kleiner als 10 sind, und die successiven Decimalziffern des Werthes von x ausmachen.

Hat man die transformirte Gleichung in $x-a$ gefunden, welche einen Zeichenwechsel verliert und das Ganze a der Wurzel kennen lehrt; so bildet man die transformirte Gleichung in x', was, wie es

die Gleichung $x-a=\frac{1}{10}x'$ mit sich bringt, darauf hinausgeht, die Coefficienten der Gleichung in $x-a$ bezüglich durch 10^0, 10^1, 10^2... zu multipliciren. Aus dieser Gleichung in x' leitet man die transformirten in $x'-1$, $x'-2$,... ab; diejenige in $x'-a'$, welche einen Zeichenwechsel verliert, gibt die Ziffer a' der Zehntel. Multiplicirt man abermals die successiven Coefficienten der Gleichung in $x'-a'$ durch 10^0, 10^1, 10^2..., so erhält man die Gleichung in x'', aus der man die Transformirten in $x''-1$, $x''-2$..., $x''-a''$ ableitet. Die letztere gibt, indem sie einen Zeichenwechsel verliert, die Ziffer a'' der Hundertel der Wurzel; u. s. f. mit den andern Ziffern.

Bleibt man in der Rechnung der transformirten Gleichungen nicht gerade bei derjenigen stehen, welche einen Zeichenwechsel verliert, sondern setzt man das Verfahren bis zur Gleichung in $x'-10$ fort; so werden die Coefficienten dieser transformirten Gleichung, wegen $x'-10=10[x-(a+1)]$, die Produkte aus denen der Gleichung in $x-(a+1)$ durch 10^0, 10^1, 10^2... sein; was ein Mittel angibt, die Richtigkeit der Rechnung zu erproben. So hat man in dem vorhergehenden Beispiel, wenn man die unnöthigen transformirten Gleichungen wegläßt, für die Wurzel zwischen 3 und 4:

Gleichung in x',	(0) . . .	$1+120+4600+\ 44000-510000$
	(6) . . .	$1+144+6976+113024-\ 53184$
	(7) . . .	$1+148+7414+127412+\ 66961$
	(10) . .	$1+160+8800+176000+520000$

Hieraus folgert man, daß x' zwischen 6 und 7 liegt, daher $x=3,6$. Die Gleichung (10), mit der oben stehenden (4) übereinstimmend, wenn man die Coefficienten dieser mit 1, 10, 100.... multiplicirt, dient sonach als Bestätigung einer richtig geführten Rechnung. Um die Hundertel der Wurzel zu bekommen, muß man die Gleichung (6) nehmen, deren Coefficienten man durch die nämlichen Faktoren multiplicirt; hierdurch erhält man die Gleichung in x'' u. s. w. Auf solche Art findet man $x=3,64575$... Ebenso erhält man die zwischen -1 und -2 eingeschlossene Wurzel, nämlich $-1,64575$.... Die beiden andern Wurzeln sind imaginär.

Diese Annäherungsmethode ist allgemein, jedoch ist sie langwierig und weniger bequem als die anderen, weßhalb diese den Vorzug verdienen. Man gebraucht die vorliegende Methode auch, um die

Wurzeln von einander zu trennen, insofern mehrere zwischen zwei successiven ganzen Zahlen eingeschlossen werden. Die Zeichenwechsel geben nämlich alsdann bei dem jedesmaligen Uebergange von einer transformirten Gleichung zu der nächstfolgenden, einer um den andern verloren, sobald man zur ersten Dezimalziffer, welche jenen Wurzeln nicht gemeinschaftlich angehört, gelangt, wie es an nachstehendem Beispiele zu ersehen ist.

$$x^4-4x^3+x^2+6x+2=0.$$

	(0) . . .	$1-4+1+6+2$	2 Zeichenwechsel.
	(1) . . .	$1\quad 0-5\quad 0+6$	2 Zeich.
	(2) . . .	$1+4+1-6+2$	2 Zeich.
	(3) . . .	$1+8+19+12+2$	0 Zeich.
x mit — x vertauscht	(0) . . .	$1+4+1-6+2$	2 Zeich.
	(1)	$1+8+19+12+2$	0 Zeich.

Es können zwei Wurzeln zwischen 2 und 3, und zwei zwischen 0 und — 1 liegen. Um sich dessen zu vergewissern und ihre genauern Werthe zu erhalten, setzt man, zur Auffindung der Wurzeln zwischen 2 und 3, die Gleichung $x-2=\frac{1}{10}x$, hieraus

0 . . .	$1+40+100-6000+20000$	2 Zeich.
(4) . . .	$1+56+676-3024+416$	2 Zeich.
(5) . . .	$1+60+850-1500-1875$	1 Zeich.
(7) . . .	$1+68+1234-2152-979$	1 Zeich.
(8) . . .	$1+72+1444+5328+2976$	0 Zeich.

Es gibt folglich zwei Wurzeln von x zwischen 2 und 3, nämlich x=2,4 . . . und 2,7 . . . Man setzt die Annäherung weiter fort, indem man von den Gleichungen (4) und (7) ausgeht, und zuvörderst die Hundertel, hierauf die Tausendtel sucht. Man findet so x=2,414... und 2,732 . . . Was die etwa möglichen Wurzeln zwischen 0 und — 1 anbetrifft, so nimmt man die Gleichung (0), nachdem vorerst x in —x umgeändert worden. Da diese Gleichung zufälligerweise mit der Gleichung (3) übereinstimmt, und zu den obigen transformirten führt; so bleiben die Decimalbrüche ungeändert, und man hat x=—0,414... und x = —0,732 . . .

Von den imaginären Wurzeln.

§. 100. Die in Rücksicht auf die imaginären Ausdrücke $a+b\sqrt{-1}$, $a'+b'\sqrt{-1}$ vorgenommenen algebraischen Operationen führen immer auf Resultate von der nämlichen Form. Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes auf folgende Art überzeugen:

1) Die Addition gibt $(a+a')+(b+b')\sqrt{-1}$. Die Subtraction wird durch eine bloße Zeichenänderung von a' und b' verrichtet.

2) Das Produkt ist $(aa'-bb')+(ab'+a'b)\sqrt{-1}$.

3) Der Quotient $\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}$ wird $=\frac{(aa'+bb')+(a'b-ab')\sqrt{-1}}{a'^2+b'^2}$, wenn man oben und unten mit $a'-b'\sqrt{-1}$ multiplicirt.

4) Die Entwicklung von $(a+b\sqrt{-1})^m$ findet man, wenn die von $(a+h)^m$ mittelst der im §. 7 gegebenen Formel verrichtet, und hierauf $b\sqrt{-1}$ statt h gesetzt wird. Dabei ist aber einleuchtend, daß sich nur die Glieder, wo h auf einer ungeraden Potenz vorkommt, als imaginär herausstellen und alle andern reell sind. Denn werden die 1, 2, 3, 4 ... Potenzen von $\sqrt{-1}$ gebildet, so erhält man eine aus den bloßen Gliedern $(\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1)$ bestehende Periode, welche fortwährend wiederkehrt. Unsere Entwicklung hat daher die Form $p+q\sqrt{-1}$.

5) Man bemerke, daß, im Fall m eine ganze und positive Zahl ausdrückt, die Reihe geschlossen ist und p und q endliche Größen sind. Die nämliche Rechnung gilt übrigens auch für die Fälle, in denen m eine negative oder gebrochene Zahl ist, mit dem Unterschiede, daß alsdann p und q ohne Ende fortlaufende Ausdrücke sind. Immer ist aber b Faktor von q.

6) Der obenerwähnte Fall schließt den der Wurzelausziehung von jedem Grade in sich. Insofern die Quadratwurzeln häufig vorkommen, wollen wir dieselben besonders betrachten.

Um $\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}$ zu erhalten, setzen wir

$$k=\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}+\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}.$$

$$l=\sqrt{(a+b\sqrt{-1})}-\sqrt{(a-b\sqrt{-1})}.$$

Hieraus $k^2=2a+2\sqrt{(a^2+b^2)}$, $l^2=2a-2\sqrt{(a^2+b^2)}$.

Da $\sqrt{(a^2+b^2>a)}$, so sieht man, daß k^2 eine positive Zahl und l^2

eine negative $-g^2$ ist; also ist k reell und l hat die Form $g\sqrt{-1}$. Indem man die obigen Ausdrücke addirt und subtrahirt, entsteht

$$\sqrt{(a \pm b\sqrt{-1})} = \tfrac{1}{2}(k \pm l) = \tfrac{1}{2}k \pm \tfrac{1}{2}g\sqrt{-1}.$$

Die Form des Binoms hat sich daher nicht geändert. Macht man $a=0$ und $b=1$, so erhält man $k^2=2$, $l^2=-2$; folglich

$$\sqrt{(\sqrt{-1})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+\sqrt{-1}).$$

7) Nachdem gezeigt worden, daß jedes Glied in einem rationalen und ganzen Polynom $kx^n + px^{n-1} + \ldots$ für $x = a + b\sqrt{-1}$ die Form $k + l\sqrt{-1}$ hat, so wird auch das Polynom dieselbe Form haben.

8) Die nämlichen Operationen mit 3, 4, ... imaginären Ausdrücken von der Form $a + b\sqrt{-1}$ vorgenommen, liefern ebenfalls Resultate, welche auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ gebracht werden können.

Anmerkung. Um $(a + b\sqrt{-1})^h$ zu entwickeln, setzen wir $a = r\cos t$, $b = r\sin t$, woraus $r^2 = a^2 + b^2$, $\tang t = \frac{b}{a}$. Diese Relationen geben in allen Fällen für r, und den Bogen t reelle Werthe; r oder $\sqrt{(a^2+b^2)}$ ist der sogenannte Modulus des imaginären Ausdrucks

$$a \pm b\sqrt{-1} = r(\cos \pm \sin t\sqrt{-1}).$$

Nach einem Satze, dessen Richtigkeit wir bald nachweisen werden, haben wir

$$(a \pm b\sqrt{-1})^h = r^h(\cos ht \pm \sin ht\sqrt{-1}).$$

Für das auf die Form $P + Q\sqrt{-1}$ gebrachte Polynom $fx = kx^n + px^{n-1} + \ldots$ erhält man hiernach

$$P = kr^n \cos nt + pr^{n-1}\cos(n-1)t + qr^{n-2}\cos(n-2)t \ldots$$
$$Q = kr^n \sin nt + pr^{n-1}\sin(n-1)t + qr^{n-2}\sin(n-2)t \ldots$$

Ist $x = a \pm b\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$, so bestehen die Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$, welche unter einer andern Gestalt mit denen des folgenden Paragraphen gleichgeltend sind. Die Faktoren des zweiten Grades von fx sind $x^2 - 2rx \cos t + r^2$. Ist $h = \frac{1}{i}$, so hat man für die ite Wurzel

$$\sqrt[i]{(a \pm b\sqrt{-1})} = \sqrt[i]{r}\left(\cos\frac{t}{i} \pm \sin\frac{t}{i}\sqrt{-1}\right)$$

§. 101. I. Es sei $x=a+b\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $fx=0$. Indem man diesen Werth substituirt und die Rechnungen ausführt, bekommt das Polynom fx die Form $P+Q\sqrt{-1}$, wo man offenbar $P=0$ und $Q=0$ hat, weil das Resultat gleich Null ist und der reelle Theil den imaginären nicht aufheben kann. Setzt man nun $x=a-b\sqrt{-1}$ in fx, so ist es hinreichend, indem Q alle ungeraden Potenzen von b enthält, hier oben b mit $-b$ zu vertauschen, wodurch das Resultat $P-Q\sqrt{-1}$ entsteht, das ebenfalls Null ist. Hieraus geht hervor, daß der Ausdruck $a-b\sqrt{-1}$ auch eine Wurzel der Gleichung ist, und das Polynom sich durch $(x-a)^2+b^2$, Produkt aus den beiden Factoren vom ersten Grad, theilen läßt. Ist also $a+b\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $fx=0$, so muß der sogenannte conjugirte Ausdruck $a-b\sqrt{-1}$ ebenfalls eine Wurzel dieser Gleichung sein, und das Polynom den reellen quadratischen Faktor $x^2-2ax+a^2+b^2$ enthalten.

II. Um die Polynome P und Q zu bilden, genügt es in der Gleichung des §. 33 $b\sqrt{-1}$ statt i zu setzen. Mit Hinweglassung des, sämmtlichen Gliedern von Q gemeinsamen, Faktors b werden die Gleichungen $P=0$, $Q=0$ sein:

$$fa-\frac{b^2}{2}f''a+\frac{b^4}{2.3.4}f^{IV}a-\text{etc.}=0,$$

$$f'a-\frac{b^2}{2.3}f'''a+\frac{b^4}{2.3.4.5}f^{V}a-\text{etc.}=0.$$

Diese Gleichungen werden selbst die imaginären Wurzeln kennen lehren, wenn a und b^2 commensurabel sind. Nach der Elimination von b^2 reicht es hin, die Finalgleichung nach dem im §. 47 gegebenen Verfahren zu behandeln.

Beispiele. I. $x^4-3x^2-12x+40=0$

Hieraus $a^4-3a^2-12a+40-(6a^2-3)b^2+b^4=0$,

$$4a^3-6a-12-4ab^2=0.$$

Nach der Elimination von b^2 hat man die Finalgleichung

$$16a^6-24a^4-151a^2-36=0,$$

deren commensurabele Wurzeln $+2$ und -2 sind. Hiernach $b^2=1$ und 4, worauf $x=2\pm\sqrt{1}$ und $-2\pm2\sqrt{-1}$. Die vorgelegte Gleichung ist gleichgeltend mit

$$[(x-2)^2+1][(x+2)^2+4]=(x^2-4x-5)(x^2+4x+8).$$

II. $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 8x + 16 = 0$.

Hieraus $a^4 - 4a^3 + 10a^2 - 8a + 16 - b^2(6a^2 - 12a + 10) + b^4 = 0$,
$4a^3 - 12a^2 + 20a - 8 - b^2(4a - 4) = 0$.

Durch die Elimination von b^2 entsteht

$$-4a^6 + 24a^5 - 68a^4 + 112a^3 - 97a^2 + 34a = 0;$$

woraus $a = 0$ und 2, folglich $b^2 = 2$ und 4.

Die vorgelegte Gleichung ist mit $(x^2+2)(x^2-4x+8)=0$ gleichgeltend.

Hat die Finalgleichung in a keine commensurabeln Wurzeln, so lehrt diese Verfahrungsweise a und b nur annähernd kennen.

§. 102. Es kommt nun darauf an, zu zeigen, daß alle imaginären Wurzeln von der Form $x = a \pm b\sqrt{-1}$ sind; ferner, daß jede Gleichung eine Wurzel besitzt. Legendre hat in seiner Théorie des nombres diese Sätze auf folgende Art nachgewiesen:

I. Vertauscht man in dem Polynom fx, x mit $x + h$, so entsteht die Entwicklung $fx + hf'x + \frac{1}{2}h^2f''x \ldots$ Setzt man hierauf $x = a + b\sqrt{-1}$, so erhält fx die Form $c + d\sqrt{-1}$, ein Ausdruck, der nicht Null ist, weil wir nicht annehmen, daß $a + b\sqrt{-1}$ der Gleichung $fx = 0$ Genüge leiste. Ebenso bekommen $f'x$, $f''x \ldots$ die Form $c' + d'\sqrt{-1}$, $c'' + d''\sqrt{-1} \ldots$, wobei übrigens einige dieser Ausdrücke Null werden können. Es sei i die niedrigste Potenz von h, deren Coefficient nicht Null wird, so daß für $x = a + b\sqrt{-1} + h$ das Polynom fx ist

$$(c + d\sqrt{-1}) + h^i(c' + d'\sqrt{-1}) + h^{i+1}(c'' + d''\sqrt{-1}) \ldots = P + Q\sqrt{-1},$$

woraus $P = c + c'\alpha^i z^i + c''\alpha^{i+1} z^{i+1} \ldots$,
$Q = d + d'\alpha^i z^i + d''\alpha^{i+1} z^{i+1} \ldots$

Wir schreiben hier αz statt h, und nehmen an, daß $x = a + b\sqrt{-1} + \alpha z$ die Gleichung $fx = 0$ befriedige. Es ist klar, daß die beiden Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$, durch welche diese Bedingung ausgesprochen wird, mit $P^2 + Q^2 = 0$ übereinstimmend sind, weil eine solche Gleichung nicht bestehen kann, ohne die vorhergehenden nach sich zu ziehen. Indem wir die Quadrate von P und Q bilden, erhalten wir

$$P^2 + Q^2 = (c^2 + d^2) + 2(cc' + dd')\alpha^i z^i + \text{etc.}$$

Da man α beliebig klein nehmen kann, so gibt das Glied in $\alpha^i z^i$ sein Zeichen der Summe aller auf $c^2 + d^2$ folgenden Glieder, und es ist die Summe $P^2 + Q^2 < c^2 + d^2$, wenn man $z^i = +1$ oder -1 je nach

den Umständen so wählt, um dem zweiten Gliede ein von demjenigen des ersten verschiedenes Zeichen zu verschaffen.

In dem Fall, daß $cc' + dd'$ Null werden sollte, macht man $z^i = \pm\sqrt{-1}$. Der Ausdruck $P+Q\sqrt{-1}$ wird alsdann

$$c+d\sqrt{-1} \pm (c'+d'\sqrt{-1})\,\alpha^i\,\sqrt{-1} + \text{rc.},$$

$$\text{woraus } P=c\mp d'\alpha^i \text{ rc.},\ Q=d\pm c'\alpha^i \text{ rc.},$$

$$P^2+Q^2=c^2+d^2\mp 2(cd'-c'd)\alpha^i + \ldots$$

Für hinlänglich geringe Werthe von α hat man folglich noch $P^2+Q^2<c^2+d^2$, wenn hier das entgegengesetzte Zeichen von demjenigen von $cd'-c'd$ genommen wird. Uebrigens kann nicht zugleich $cd'-c'd=0$ und $cc'+dd'=0$ sein, weil die Summe der Quadrate dieser Gleichungen einerlei mit $(c^2+d^2)(c'^2+d'^2)=0$ ist, was gegen die Annahme voraussetzen würde, daß c und d oder c' und d' gleichzeitig Null wären.

II. Was die Gleichungen $z^i=\pm 1$ und $z^i=\pm\sqrt{-1}$ betrifft, so ist es leicht, sie aufzulösen.

1) Für $z^i=1$ hat man $z=1$.

2) Für $z^i=-1$ hat man $z=-1$, wenn i ungerade ist.

Für $i=2k$, wo k eine ungerade Zahl bedeutet, setzt man $z^2=t$. Daraus $t^k=-1$, und $t=z^2=-1$, und endlich $z=\pm\sqrt{-1}$.

Für $i=4k$, setzt man abermals $t=z^2$. Dadurch $t^{2k}=-1$; hieraus $t=\pm\sqrt{-1}=z^2$; folglich $z=\pm\sqrt{(\pm\sqrt{-1})}$, ein Ausdruck, welcher sich nach §. 100 auf die Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ bringen läßt.

Für $i=8k$ hat man $t=z^2=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, woraus durch Ausziehung der Quadratwurzel z die Form $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ erhält; u. s. f.

3) Hinsichtlich der Gleichung $z^i=\pm\sqrt{-1}$ sei v eine der Wurzeln: v^2 wird solche von $z^{2i}=-1$ sein, eine auflösbare Gleichung, die $z=\alpha+\beta\sqrt{-1}=v^2$ liefert: folglich hat v noch die Form $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$.

III. Es wäre also hiermit nachgewiesen, daß aus jeder Gleichung $fx=0$, selbst aus einer mit imaginären Coefficienten, die für $x=a+b\sqrt{-1}$ das Resultat $c+d\sqrt{-1}$ gibt, man für $x=a+b\sqrt{-1}+\alpha z$ ein anderes Resultat $P+Q\sqrt{-1}$ erhält, dergestalt, daß $P^2+Q^2<c^2+d^2$. Geht man hierauf von diesem verbesserten Werthe von x aus, um einen zweiten nach dem nämlichen Verfahren zu bilden; so wird P^2+Q^2 seinerseits vermindert werden, und dieß ohne Ende

fort. Da dieses Binom wesentlich positiv ist und fortwährend abnimmt, so kann es der Null so nahe gebracht werden, als man nur immer will; d. h. man ist von der Existenz eines Werthes $x=A+B\sqrt{-1}$ überzeugt, welcher $P+Q\sqrt{-1}=0$ oder $P^2+Q^2=0$ gibt, woraus $P=0$ und $Q=0$.

Aus dem Vorhergehenden folgt:

1) Jede Gleichung hat immer eine Wurzel von der Form $a+b\sqrt{-1}$, mithin noch eine zweite $a-b\sqrt{-1}$, und einen reellen, quadratischen Faktor $(x-a)^2+b^2$. In dem Falle $b=0$, ist die Wurzel reell und hat keine conjugirte mehr.

2) Jede Gleichung von geradem Grade ist in reelle Faktoren vom zweiten Grade zerlegbar. Dasselbe gilt auch von den Gleichungen von ungeradem Grade, nur haben sie außerdem noch einen Binomialfaktor vom ersten Grade.

3) Die imaginären Wurzeln einer Gleichung sind immer zu einander conjugirt, und von der Form $a\pm b\sqrt{-1}$. Jede imaginäre Funktion läßt sich auf die nämliche Form bringen; denn setzt man diese Funktion gleich z, so kann man durch Umsetzen und Erheben auf Potenzen sämmtliche Wurzelgrößen aus dieser Gleichung wegbringen und auf eine Gleichung $fx=0$ kommen, welche zu Wurzeln die Werthe der vorgelegten Funktion hat, Wurzeln, deren Form $a+b\sqrt{-1}$ ist.

Anmerkung. Da das Produkt $(x-a-b\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1}) = (x-a)^2+b^2$ wesentlich positiv ist, so werden die imaginären Wurzeln einer Gleichung auf das aus den in das Polynom fx für x substituirten, reellen Werthen hervorgehende Zeichen keinen Einfluß äußern können. Hat also $fx=0$ keine reellen Wurzeln, so wird das Polynom fx für jeden reellen Werth von x positiv bleiben.

§. 103. Die eben auseinander gesetzte Theorie erlaubt uns, die imaginären Wurzeln der Gleichung $fx=0$ genauer zu berechnen. Denn machen wir $x=a+b\sqrt{-1}$, wo a und b beliebige reelle Zahlen darstellen, welche zwischen den bekannten Grenzen reeller Wurzeln zu nehmen die Aufgabe ist; so verwandelt sich fx in $c+d\sqrt{-1}$, ꝛc. Es sei y eine sehr kleine Größe in Bezug auf $\sqrt{(a^2+b^2)}$; indem wir nun $x=a+b\sqrt{-1}+y$ setzen, haben wir mit Hinweglassung der die niedrigste i übertreffenden Potenzen von y,

$$f(a+b\sqrt{-1}+y)=c+d\sqrt{-1}+y^i\,(c'+d'\sqrt{-1})+ \text{ꝛc.} \quad (1).$$

Wir machen $y^i\,(c'+d'\sqrt{-1})=-m(c+d\sqrt{-1})$: dadurch entsteht

$$y^i=-m\,\frac{c+d\sqrt{-1}}{c'+d'\sqrt{-1}}=-m\,\frac{cc'+dd'}{c'^2+d'^2}+m\sqrt{-1}.\,\frac{cd'-c'd}{c'^2+d'^2} \quad (2),$$

$$\text{und } fx=(1-m)(c+d\sqrt{-1})+ \text{ꝛc.} \quad (3);$$

m bezeichnet hier einen positiven Bruch, dessen willkührlicher Werth die Beschaffenheit hat, daß y mehreremal in $a+b\sqrt{-1}$ enthalten ist. Durch ein solches Kleinwerden des ersten Gliedes in dem Werth von fx hat das Streben dieses Polynoms nach der Null hin zugenommen, und der Gang der Annäherung liegt zu Tage. Die Wahl der Zahl läßt übrigens viel Spielraum, man kann sie gleich 1 setzen, insofern die Wurzel hinlänglich genau gefunden worden. Es sei die Gleichung

$$fx=x^3+2x^2-3x+2=0.$$

Wir nehmen $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-1})$, woraus $fx=\frac{1}{4}(1-\sqrt{-1})$.

Wir setzen $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}+y$, und $m=1$: hieraus

$$\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{-1}-y(1-\tfrac{7}{2}\sqrt{-1})=0;\ y=0{,}09+0{,}05\sqrt{-1}.$$

Also $x=0{,}59+0{,}55\sqrt{-1}$; erste Annäherung. Ferner

$$-0{,}0009+0{,}056\sqrt{-1}-y(-0{,}5032+4\,047\sqrt{-1})=0; \text{ woraus}$$

$$y=-\frac{0{,}2271-0{,}0245\sqrt{-1}}{16{,}6302}=-0{,}0137+0{,}0015\sqrt{-1},$$

$$\text{und } x=0{,}5763+0{,}5515\sqrt{-1}; \text{ u. s. f.}$$

Dergleichen Rechnungen werden dadurch erleichtert, daß man sich der in der Anmerkung des §. 100 angegebenen Transformation bedient. Die Ausdrücke (1) und (2) werden vorerst daraus abgeleitet, und hierauf, wenn $i=1$, was am häufigsten der Fall ist, stellt (2) den Werth der Verbesserung y dar. Wenn aber $i>1$, so muß eine Wurzelausziehung vom $i$ten Grade statt finden, was man, wie es in der angeführten Anmerkung erklärt worden, bewerkstelligt.

Drittes Kapitel.

Von der Art, die Gleichungen auf einen niedern Grad zu bringen.

§. 104. Man kann eine Gleichung auf einen niedrigern Grad bringen, als derjenige ist, unter welchem sie sich darstellt, wenn man eine gewisse Relation $\varphi(a,b)=0$ zwischen zwei ihrer Wurzeln a und b kennt. Denn setzen wir a und b statt x in fx, so haben wir die drei Gleichungen $\varphi(a,b)=0$, $fa=0$, $fb=0$.

Wenn man nun b aus der ersten und dritten dieser Gleichungen eliminirt, so bekommt man einen letztern Divisor $F(a,b)$, und eine Finalgleichung, die bloß a enthält. Diese letztere und die Gleichung $fa=0$ müssen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, weil der Werth a sowohl der einen als der andern Genüge leistet. Setzt man diesen Theiler gleich Null, so erhält man a; worauf man b mittelst der Gleichung $F(a,b)=0$ findet. Ist jener Theiler nicht vorhanden, so besteht auch die gegebene Beziehung $\varphi(a,b)=0$ nicht.

Es folgen jetzt einige Beispiele hierüber.

I. Es sei die Gleichung $x^3-37x=84$, von welcher wir annehmen, man wisse, daß zwischen zwei Wurzeln x und a die Beziehung $1=a+2x$ statt hat. Die durch Elimination von a aus der Gleichung $a^3-37a=84$, mittelst der angezeigten Relation entspringende Gleichung ist $2x^3-3x^2-17x+30=0$, welche einen gemeinschaftlichen Theiler mit der vorgelegten besitzen muß. Dieser Faktor ist in der That $x+3$, woraus $x=-3$, ferner $a=1-2x=7$: es sind dieß die zwei Wurzeln; die dritte ist $x=-4$.

II. Es sei die Gleichung $x^3-7x+6=0$, von welcher man weiß, daß zwischen den Wurzeln a und x abermals die Beziehung $1=a+2x$ besteht. Durch Elimination von a aus $a^3-7a+6=0$ entsteht $(2x^2-3x-2)\,4x=0$, zwischen welcher Gleichung und der vor-

gelegten $x-2$ gemeinschaftlicher Theiler ist. Folglich $x=2$, $a=-3$; ferner $x=1$.

III. In der Gleichung $x^4-2x^3-9x^2+22x=22$ beträgt die Summe zweier Wurzeln 2. Da die Summe der vier Wurzeln ebenfalls 2 ist, so haben die beiden andern a und x, Null zur Summe, oder $a=-x$. Durch Substitution in $a^4-2a^3-9a^2+22a=22$ bekommt man $x^4+2x^3-9x^2-22x=22$, d. h. die vorgelegte wieder, mit dem Unterschied, daß die Zeichen abwechselnd geändert und nicht geändert sind. Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen entsteht:

$$x^4-9x^2-22=0, 2x^3-22x=0.$$

der gemeinschaftliche Faktor ist x^2-11; folglich $x=\pm\sqrt{11}$; ferner $x=1\pm\sqrt{-1}$.

IV. In der Gleichung $x^3+x^2-4x-4=0$ sind zwei Wurzeln gleich, aber von entgegengesetzten Zeichen. Das gegebene Verhältniß $a=-x$ liefert $x^3-x^2-4x+4=0$.

Der gemeinschaftliche Theiler zwischen dieser Gleichung und der vorgelegten ist x^2-4; hieraus $x=2$ und -2.

§. 105. Reciproke Gleichungen werden diejenigen Gleichungen genannt, deren von den beiden äußern gleichweit abstehende Glieder einerlei Coefficienten haben. Ihre allgemeine Form ist:

$$fx=kx^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\ldots.+qx^2+px+k=0 \quad (1)$$

Ist α Wurzel einer solchen Gleichung, so muß auch der reciproke Werth $\frac{1}{\alpha}$ eine zweite Wurzel derselben sein: denn substituirt man diese beiden Werthe und schafft die Nenner weg, so bekommt man identische Resultate. Die Wurzel reciproker Gleichungen sind demnach paarweise, hinsichtlich ihrer reciproken Werthe, mit einander verbunden. Auf dieser Eigenschaft beruht die Benennung vorstehender Gleichungen, welche Eigenschaft in der Gleichung

$$fx=x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ihre analytische Darstellung hat.

I. Fall. Reciproke Gleichungen von ungerader Ordnung. Die Zahl der Glieder der Gleichung (1) ist hier gerade und beträgt $n+1$.

Man sieht sogleich: daß $x=-1$ die Gleichung befriedigt, denn man findet für $x=-1$:

$$-k+p-q+\ldots+q-p+k=0.$$

Also ist -1 die einzige Wurzel, welche keine correspondirende reciproke hat, weil beide zusammen fallen. Dividirt man fx durch $x+1$, und bezeichnet durch Fx den Quotienten; so wird die Gleichung $Fx=0$ von gerader Ordnung reciprok sein, weil es ihre Wurzeln sind. Uebrigens läßt sich dieß auch direkt, wie folgt, nachweisen. Vertauscht man nämlich x mit $\frac{1}{x}$ in der identischen Gleichung $fx=(x+1)Fx$ und multiplicirt durchgängig mit x^n, so bleibt das erste Glied unserer Gleichung unverändert; folglich

$$fx=\left(\frac{1}{x}+1\right)x^n F\left(\frac{1}{x}\right)=(x+1)x^{n-1}F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von fx entsteht

$$Fx=x^{n-1}F\left(\frac{1}{x}\right).$$

was das charakterisirende Merkmal der reciproken Gleichungen ist.

II. Fall. Reciproke Gleichungen von gerader Ordnung. Indem wir n mit $2m$ in der Gleichung (1) vertauschen, das Ganze durch x^m dividiren und die von den äußersten gleich weit entfernten Glieder zusammennehmen, erhalten wir:

$$k(x^m+x^{-m})+p(x^{m-1}+x^{-(m-1)})+\ldots+P=0\ldots(2),$$

wo P der nur einmal vorkommende Coefficient ist. Wir setzen ferner $z=x+x^{-1}$. Nach Auflösung der transformirten Gleichung in z, braucht man nur noch für jedes z den Werth von x mittelst der Gleichung

$$x=\tfrac{1}{2}z\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}z^2-1)}\ldots(3)$$ zu bestimmen.

Um x zu eliminiren, haben wir offenbar

$$(x^{i-1}+x^{-(i-1)})(x+x^{-1})=x^i+x^{-i}+x^{i-2}+x^{-(i-2)},$$ woraus

$$x^i+x^{-i}=(x^{i-1}-x^{-(i-1)})z-(x^{i-2}+x^{-(i-2)}).\quad(4)$$

Hierin nach und nach 2, 3, 4, ... statt i gesetzt, gibt

$$x^2+x^{-2}=z^2-2,\ x^3+x^{-3}=z^3-3z,$$

$$x^4+x^{-4}=z^4-4z^2+2,\ x^5+x^{-5}=z^5-5z^3+5z,$$

$x^6+x^{-6}=z^6-6z^4+9z^2-2$, und ganz allgemein

$$x^i + x^{-i} = z^i - iz^{i-2} + \frac{i(i-3)}{1.2} z^{i-4} - \frac{i(i-4)(i-5)}{1.2.3} z^{i-6} + $$
$$+ \frac{i(i-5)(i-6)(i-7)}{1.2.3.4} z^{i-8} + \text{ꝛc.}, \quad (5).$$

Ein beliebiges Glied T dieser Reihe wird aus dem vorhergehenden S mittelst der Relation

$$T = -\frac{(i-2h+1)(i-2h+2)}{h(i-h)z^2} S \text{ abgeleitet,}$$

wobei h die Anzahl der, dem T voranstehenden, Glieder bedeutet. Wir wollen die Richtigkeit dieses Satzes hier nicht weiter nachweisen, weil er auf den nämlichen Principien, wie die Reihen der Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen beruht, auf welche wir im 6ten Kapitel zurückkommen werden.

Anmerkungen. 1. Substituirt man in die Gleichung (2) für die Binome $x^m + x^{-m}$ ꝛc. die entsprechenden Werthe nach (5), so kommt, wenn nach den Potenzen von z geordnet worden:

$$\left.\begin{aligned} & kz^m + pz^{m-1} + [q - mk]z^{m-2} + [r - p(m-1)]z^{m-3} \\ & + \left[s - q(m-2) + \frac{m(m-3)k}{1.2}\right] z^{m-4} \\ & + \left[t - r(m-3) + \frac{p(m-1)(m-4)}{1.2}\right] z^{m-5} \\ & + \left[u - s(m-4) + q\frac{(m-2)(m-5)}{1.2} - \frac{m(m-4))m-5)k}{1.2.3}\right] z^{m-6} \\ & + \text{ꝛc.} \end{aligned}\right\} = 0 \quad (6)$$

Diese Gleichung ist offenbar vom mten Grade; während die ursprüngliche (1) vom 2mten Grade ist.

2. Hat die erste Hälfte der Glieder einer reciproken Gleichung von einer ungeraden Ordnung die entgegengesetzten Zeichen von den Gliedern der zweiten Hälfte, so ist + 1 eine Wurzel derselben. Denn in einer Gleichung dieser Art:

$$kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots - qx^2 - px - k = 0$$

findet man für $x = 1$:

$$k + p + q \ldots - q - p - k = 0;$$

die Gleichung muß daher durch $x - 1 = 0$ theilbar sein. Nimmt

man die von den Enden gleichweit entfernten Glieder zusammen und dividirt durch $x-1$, so erhält man:

$$kx^{n-1}+(k+p)x^{n-2}+ \ldots +(k+p)x+k=0,$$

eine reciproke Gleichung von gerader Ordnung.

3. Jede reciproke Gleichung von einem geraden Grade, bei welcher die correspondirenden Coefficienten entgegengesetzte Zeichen besitzen, und überdieß das mittlere Glied fehlt, besitzt die Wurzeln $+1$ und -1. Eine solche Gleichung hat die Form

$$kx^n + px^{n-1}+qx^{n-2} \ldots -qx^2-px-k=0, \text{ oder}$$

$$k(x^n-1)+px(x^{n-2}-1)+qx^2(x^{n-4}-1)+\ldots=0,$$

unter welcher sich sofort herausstellt, daß die Werthe $+1$ und -1 der Gleichung genügen, die daher durch x^2-1 theilbar ist. Dividirt man, so entsteht:

$$kx^{n-2}+px^{n-3}+(p+q)x^{n-4}+ \ldots +(p+q)x^2+px+k=0,$$

eine reciproke Gleichung von gerader Ordnung.

4. Gleichungen von der Form

$$kx^n + phx^{n-1}+qh^2x^{n-2}+\ldots+qh^{n-2}x^2+ph^{n-1}x+kh^n=0$$

lassen sich in reciproke verwandeln, indem man $x=hy$ setzt und durchgängig mit h^n dividirt.

Beispiele. I. $3x^9-10x^8+2x^7+13x^6-8x^5-8x^4+13x^3+2x^2-10x+3=0$.
Man bekommt: $3x^8-13x^7+15x^6-2x^5-6x^4-2x^3+15x^2-13x+3=0$.

Diese, wie oben angegeben, weiter behandelt, gibt:

$$3(x^4+x^{-4})-13(x^3+x^{-3})+15(x^2+x^{-2})-2(x+x^{-1})-6=0, \text{ ferner}$$

$$3z^4-13z^3+3z^2+37z-30=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind 1, 2, 3 und $-\frac{5}{3}$, mithin die der gegebenen

$$x=1\pm0,\ \tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{5}) \text{ und } -\tfrac{1}{6}(5\pm\sqrt{-11}).$$

Die vorgelegte Gleichung ist hiernach einerlei mit

$$(x+1)(x-1)^2(x^2-x+1)(3x^2+5x+3)=0.$$

II. $2x^8-11x^7+27x^6-43x^5+50x^4-43x^3+27x^2-11x+2=0$.
Man hat $2z^4-11z^3+19z^2-10z=0$.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind: 0, $\frac{5}{2}$, 2 und 1; wonach die der

ursprünglichen: $x = \pm\sqrt{-1}, 1 \pm 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$; 2 und $\frac{1}{2}$. Die letztere ist daher gleichgeltend mit $(x^2+1)(x-1)^2(x^2-x+1)(x-2)(2x-1)=0$.

III. $x^4 + \frac{35}{6}x^3 + \frac{31}{3}x^2 + \frac{35}{6}x + 1 = 0$ gibt

$$z^2 + \frac{35}{6}z + \frac{25}{3} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $-\frac{5}{2}$ und $-\frac{10}{3}$; folglich die der gegebenen: $-\frac{1}{2}$, -2, $-\frac{1}{3}$ und -3.

IV. $x^9+x^8-9x^7+3x^6-8x^5-8x^4+3x^3-9x^2+x+1=0$ gibt

$$x^8-9x^6+12x^5-20x^4+12x^3-9x^2+1=0, \text{ oder}$$

$$(x^4+x^{-4})-9(x^2+x^{-2})+12(x+x^{-1})=20. \text{ Hieraus}$$

$$z^4-13z^2+12z=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind: 0, 1, 3 und -4; folglich für x die Werthe:

$$\pm\sqrt{-1},\ \tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}),\ \tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{5}) \text{ und } -2\pm\sqrt{3}.$$

Die vorgelegte Gleichung ist daher gleichgeltend mit

$$(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)(x^2-3x+1)(x^2+4x+1)=0.$$

Die zweigliederigen Gleichungen.

§. 106. Wir wollen die Gleichung $Ax^n = B$, in welcher A und B positive Größen sind, auflösen. Es sei k die $n$te Wurzel von $\frac{B}{A}$, oder $k^n = \frac{B}{A}$. Wird Ak^n für B substituirt, so entsteht die Gleichung $x^n - k^n = 0$, welche sich auf die einfachere $y^n - 1 = 0$ bringen läßt, wenn wir $x = ky$ setzen. Die Wurzelwerthe von x werden dann gefunden, indem wir die von y mit der Zahl k multipliciren.

Jede Zahl hat also zu ihrer $n$ten Wurzel n verschiedene Werthe; man erhält dieselben dadurch, daß man ihre arithmetische Wurzel mit den n Wurzelwerthen der Einheit multiplicirt.

Die Gleichung $Ax^n + B = 0$ wird gleicherweise auf $x^n + k^n = 0$, und diese auf $y^n + 1 = 0$ zurückgeführt.

Die Gleichung $y^n - 1 = 0$ gibt zuvörderst $y = 1$; dividiren wir sie durch $y-1$, so bekommen wir die reciproke Gleichung

$$y^{n-1} + y^{n-2} + y^{n-3} \ldots + 1 = 0. \quad (1),$$

welche sich auf einen niedrigern Grad bringen läßt. Für den Fall, daß n ungerade ist, wird die Gleichung $y^n - 1 = 0$, da sie keine ne-

gativen Wurzeln haben kann und die Gleichung (1) keine positiven hat, nur eine einzige reelle Wurzel besitzen.

Für den Fall, daß n gerade ist, geschieht der Gleichung $y^n-1=0$ durch $y=\pm 1$ Genüge; sie ist daher durch y^2-1 theilbar. Dividirt man wirklich, so kommt

$$y^{n-2}+y^{n-4}+\ldots+y^2+1=0.$$

Da in der letzten Gleichung nur gerade Exponenten, und positive Coefficienten vorkommen, so kann sie weder positive noch negative Wurzeln haben; die vorgelegte Gleichung hat folglich keine andern reellen Wurzeln als $y=\pm 1$. Setzen wir $n=2m$, so ist $y^{2m}-1 =(y^m-1)(y^m+1)$, und die vorgelegte Gleichung zerfällt in zwei andere.

Beispiele. I. $y^3-1=0$ gibt $y^2+y+1=0$; hieraus
$y=1$, $y=-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$.

II. $x^4-k^4=0$ gibt vorerst $y^4-1=0$; indem man letztere durch y^2-1 dividirt, findet man $y^2+1=0$, woraus $y=\pm 1$ und $\pm\sqrt{-1}$; endlich $x=\pm k$ und $\pm k\sqrt{-1}$.

III. $y^5-1=0$ gibt $y^4+y^3+y^2+y+1=0$, welche die transformirte Gleichung in z: $z^2+z-1=0$, liefert, deren Wurzeln $-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ sind. Die fünf Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind demnach:

$$+1,\ -\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{5}\mp\sqrt{(10+2\sqrt{5})}\sqrt{-1});$$
$$-\tfrac{1}{4}[1+\sqrt{5}\mp\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\sqrt{-1}].$$

§.107. Es sei α eine Wurzel der Gleichung $y^n-1=0$. Alsdann ist $\alpha^n=1$, und $\alpha^{np}=1$, welche ganze positive oder negative Zahl p auch sein mag. Der Gleichung $y^n-1=0$ wird folglich durch $y=\alpha^p$ Genüge gethan; d. h. ist α eine Wurzel der Gleichung $y^n-1=0$, so ist auch α^p eine Wurzel derselben. Es sind also die Glieder nachstehender unendlichen Reihe sämmtlich Wurzeln unserer Gleichung, nämlich:

$$\ldots\ldots\alpha^{-4},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-1},\ \alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots\ldots \quad (2).$$

1) Nimmt man $p>n$, so hat p, wenn es durch n dividirt wird, die Form $nq+i$, wo $i<n$ ist: hiernach

$$\alpha^p=\alpha^{nq+i}=\alpha^{nq}\times\alpha^i=\alpha^i\text{, weil } \alpha^{nq}=1.$$

Hat man folglich bei der angezeigten Potenzirung die Potenz n

überschritten, so kommen die nämlichen Werthe in der nämlichen Ordnung wie vorher, zum Vorschein.

Daraus ergibt sich folgende Periode:

$$(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^n) \ldots (3).$$

2) Ist p negativ, so hat man

$$\alpha^{-p} = \alpha^{n-p} = \alpha^{2n-p} = \ldots,$$

weil $\alpha^n = 1$. Der Exponent p kann also durch $nk - p$ ersetzt werden. Hieraus sieht man, daß die negativen Exponenten dieselben Werthe in derselben Ordnung wie die positiven hervorbringen.

3) Die Ausdrücke (2) sind demnach von solcher Beschaffenheit, daß, wenn man einen derselben beliebig wählt, und die $n-1$ nachfolgenden oder vorhergehenden nimmt, man dadurch eine Periode erhält, welche nach beiden Richtungen fortwährend wiederkehrt.

4) Außerdem geschieht der Gleichung $\alpha^p = \alpha^q$ nicht bloß durch $p=q$ Genüge, sondern auch durch Werthe von α, wobei p und q ungleich sind. Denn dividiren wir durch α^q, so kommt $\alpha^{p-q} - 1 = 0$; woraus man sieht, daß α eine Wurzel der Gleichung $y^{p-q} - 1 = 0$ sein muß, wenn $\alpha^p = \alpha^q$ werden soll.

§. 108. Es bleibt uns jetzt zu untersuchen übrig, ob die n Glieder der Periode (3) wirklich von einander verschieden sind. Wir wollen deshalb sehen, ob es möglich sei, der Gleichung $\alpha^p = \alpha^q$ zu entsprechen, wenn p und q von n übertroffen werden. In solchem Falle müßte die Wurzel α der Gleichung $y^n - 1 = 0$ auch der Gleichung $y^m - 1 = 0$ Genüge thun, wo $m = p - q$ ist, was nothwendigerweise voraussetzt, daß diese Gleichungen einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, der durch seine Annullirung den Werth von α geben würde. Wir wollen den fraglichen Faktor nach der gewöhnlichen Methode aufsuchen. Zu diesem Behufe dividiren wir zuvörderst $y^n - 1$ durch $y^m - 1$, was uns die Reste $y^{n-m} - 1$, $y^{n-2m} - 1, \ldots$ endlich $y^i - 1$ liefert, wobei i den Ueberschuß von n über die darin enthaltenen Vielfachen von m darstellt. Hierauf dividiren wir $y^m - 1$ durch diesen Rest $y^i - 1$, was uns zu dem Reste $y^l - 1$ führt, wo l den Ueberschuß von m über das größte darin vorkommende Vielfache von i ausdrückt, u. s. f.; kurz, man verfährt gerade so, als ob man den gemeinschaftlichen Theiler zwischen n und m finden wollte. Wir werden hierbei mehrere Fälle unterscheiden:

1) n sei eine Primzahl. Alsdann haben n und m den gemeinschaftlichen Theiler 1, mithin $y^n - 1$ und $y^m - 1$ den Faktor $y - 1$. Die Gleichung $\alpha^p = a^q$ kann also nur bestehen für $\alpha = i$: sämmtliche Glieder der Periode sind daher von einander verschieden, und eine imaginäre Wurzel α liefert in ihren Potenzen $\alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^n$ oder 1 alle andern Wurzeln der Gleichung.

2) Es sei n das Produkt zweier Primzahlen l und h, oder $n = lh$. Wir setzen die Gleichungen $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$, und nehmen an, daß β und γ, bezüglich von $+1$ verschiedene, Wurzeln dieser Gleichungen sind, nämlich $\beta^l = 1$, $\gamma^h = 1$. Hiernach $\beta^{lh} = \gamma^{hl} = (\beta\gamma)^{hl} = 1$. Weil nun β^n, γ^n und $(\beta\gamma)^n$ gleich 1 sind, so müssen, dem vorhergehenden Paragraphen gemäß, β, γ und $\beta\gamma$ Wurzeln von $y^n - 1 = 0$ sein. Die Ausdrücke $\beta, \beta^2, \ldots \beta^l$ bilden folglich l verschiedene, periodisch wiederkehrende, Werthe, und die n Potenzen von β liefern nur l von einander verschiedene Resultate, welche hmal in der Reihe $\beta, \beta \ldots \beta^n$ wiederkommen. Ebenso findet man l Perioden, von denen jede aus h Gliedern besteht, wenn man die Ausdrücke $\gamma, \gamma^2, \ldots \gamma^n$ in Betrachtung nimmt.

Dagegen sind die Ausdrücke $\beta\gamma, \beta^2\gamma^2, \beta^3\gamma^3, \ldots \beta^n\gamma^n$ von einander verschieden, und machen die Periode der n gesuchten Wurzeln aus. In der That wäre $(\beta\gamma)^p = (\beta\gamma)^q$, oder $(\beta\gamma)^{p-q} - 1 = 0$; so müßte $\beta\gamma$ eine gemeinsame Wurzel von $y^{p-q} - 1 = 0$ und $y^n - 1 = 0$ sein, welche Gleichungen keinen andern Faktor als $y^l - 1$ oder $y^h - 1$ haben können, weil $n = lh$. Man hätte also $\beta^l \gamma^l = 1$, woraus $\gamma^l = 1$, weil $\beta^l = 1$. Es ist aber auch $\gamma^h = 1$, mithin müssen l und h einen von der Einheit verschiedenen Theiler besitzen, was der Annahme zuwiderläuft.

Hieraus folgt, daß, wenn man $\alpha = \beta\gamma$ nimmt, die Periode $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^n$ aus n verschiedenen Gliedern besteht.

Man kann den Exponenten p von $\beta^p\gamma^p$ unterhalb l für β, und unterhalb h für γ bringen, weil $\beta^l = \gamma^h = 1$ ist; aus demselben Grunde kann man von p alle Vielfachen von l oder h wegnehmen. Hiernach haben sämmtliche Glieder der Periode in dem Ausdrucke $\beta^b\gamma^c$ ihre algebraische Darstellung, wobei b und c die Reste der Division von p durch l und h bezeichnen. Um folglich alle Wurzeln von $y^n - 1 = 0$ zu erhalten, wird man zuvörderst eine von $+1$ verschiedene Wurzel für jede der Gleichungen $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$ suchen,

hierauf das Produkt $\beta^b \gamma^c$ bilden, indem für b und c alle ganzen Zahlen von 1 bis l für b, und von 1 bis h für c genommen werden.

Ist $l = 2$, so macht man $\beta = -1$.

3) Es sei n das Produkt dreier Primzahlen l, h und i oder $n = lhi$. Man beweist auf eine ähnliche Weise, daß man zuvörderst die Gleichungen $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$, $y^i - 1 = 0$ ansetzen, dann aus jeder derselben eine von $+1$ verschiedene Wurzel herleiten, endlich sämmtliche in der Formel $\beta^b \gamma^c \delta^d$ enthaltenen Potenzen bilden muß, wobei dem b, c und d nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 . . . beziehungsweise bis l, h und i beigelegt werden.

Dasselbe dehnt sich überhaupt auf alle Fälle aus, in denen der Exponent dem Produkt mehrerer einfachen Faktoren gleich ist.

4) Der Exponent n sei von der Form h^k, wenn h eine Primzahl ist. Um die hierbei zu befolgende Methode recht anschaulich zu machen, nehmen wir das Beispiel $y^{81} - 1 = 0$, wo $81 = 3^4$. Man setze die Gleichung $y^3 - 1 = 0$ an, und suche eine imaginäre Wurzel ϑ dieser Gleichung. Hierauf ziehe man aus ϑ die 1, 3, 9 und 27te Wurzel, nämlich ϑ, $\sqrt[3]{\vartheta}$, $\sqrt[9]{\vartheta}$, $\sqrt[27]{\vartheta}$: es werden dieß ebensoviele Auflösungen der vorgelegten Gleichung sein, weil ihre 81ten Potenzen, Potenzen von ϑ^3 ausmachen, welche $=1$ sind. Aus dem nämlichen Grunde ist auch das Produkt $\vartheta . \sqrt[3]{\vartheta} . \sqrt[9]{\vartheta} . \sqrt[27]{\vartheta} = \alpha$ eine Wurzel von y. Die Ausdrücke α, α^2, α^3 . . . α^{81} sind aber sämmtlich von einander verschieden, weil sonst α ein gemeinsamer Wurzelwerth von $y^{81} - 1 = 0$ und $y^i - 1 = 0$ sein würde, was zwischen diesen Gleichungen einen gemeinschaftlichen Faktor voraussetzt, welcher kein anderer als $y^3 - 1 = 0$ sein kann. Also wäre α eine Wurzel dieser letztern, d. h. $\alpha^3 = 1$, oder $\vartheta^3 \vartheta \sqrt[3]{\vartheta} . \sqrt[9]{\vartheta} = 1$. Durch Erhebung auf die 9te Potenz entstände $\vartheta = 1$, was der Annahme widerstreitet. Hieraus folgt, daß α, α^2, α^3 .... α^{81} die 81 Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind.

Allgemein, um die Gleichung $y^n - 1 = 0$ aufzulösen, wenn $n = h^k$, setze man die Gleichung $y^h - 1 = 0$ an, und nehme einen von $+1$ verschiedenen Wurzelwerth derselben ϑ; hierauf ziehe man aus ϑ die verschiedenen Wurzeln, deren Grade i durch h^0, h^1, h^2 . . . h^{k-1} angedeutet werden; und bilde alsdann die k Resultate, welche durch $\sqrt[i]{\vartheta}$ ausgedrückt sind: dieselben werden sämmtlich, so wie ihr Produkt $\alpha = \beta\gamma\delta$ ...

Wurzelwerthe von $y^n - 1 = 0$ sein. Da die Ausdrücke α, α^2 ... α^n sämmtlich der Gleichung $y^n - 1 = 0$ genügen, und alle von einander verschieden sind; so sind sie die gesuchten n Wurzeln dieser Gleichung.

5) Es sei $n = h^k l^i$, wo h, l Primzahlen sind. Um die Wurzelwerthe der Gleichung $y^n - 1 = 0$ zu finden, muß man ebenso die Gleichungen $y^h - 1 = 0$, und $y^l - 1 = 0$ auflösen, sämmtliche Wurzeln dieser Gleichungen mit einander multipliciren, und das Produkt $= \alpha$ setzen. Es seien β und γ von $+1$ verschiedene Wurzeln jener Gleichungen; macht man ferner

$$\beta' = \sqrt[h]{\beta},\ \beta'' = \sqrt[h]{\beta'},\ \beta''' = \sqrt[h]{\beta''} \ldots,\ \gamma' = \sqrt[l]{\gamma},\ \gamma'' = \sqrt[l]{\gamma'} \ldots\ldots,$$

so hat man $\alpha = \beta\,\beta'\,\beta'' \ldots \times \gamma\,\gamma'\,\gamma'' \ldots$

Beispiele. I. $y^6\ \ 1 = 0$. Man löst die Gleichungen $y^2 - 1 = 0$, $y^3 - 1 = 0$ auf; dieselben geben

$\beta = -1$, $\gamma = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$. Hieraus
$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$, $\alpha^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$, $\alpha^3 = -1$,
$\alpha^4 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$, $\alpha^5 = -\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$, $\alpha^6 = 1$.

II. $y^{12} - 1 = 0$. Man hat die beiden Gleichungen $y^4 - 1 = 0$, $y^3 - 1 = 0$. Hinsichtlich der erstern dieser Gleichungen nimmt man für β das Produkt von -1 mit $\sqrt{-1}$, nämlich $\beta = -\sqrt{-1}$; der Werth von γ bleibt derselbe wie oben. Hieraus $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{-1} - \sqrt{3})$, und die zwölf gesuchten Wurzeln sind:

$y = \pm 1$, $\pm\sqrt{-1}$, $\pm\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$, $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{-1} \pm \sqrt{3})$.

III. $y^8 - 1 = 0$. Man findet für die 8 Wurzeln:

$y = +1$, $\pm\sqrt{-1}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}(1 \pm \sqrt{-1})$, $-\sqrt{\frac{1}{2}}(1 \pm \sqrt{-1})$.

§. 109. Weil $y = \alpha$, α^2, α^3 ...; so gibt die Gleichung (1)

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots \alpha^{n-1} = 0,\ 1 + \alpha^2 + \alpha^4 \ldots \alpha^{2n-2} = 0,\ 1 + \alpha^3 + \alpha^6 \ldots = 0,$$

oder $S_1 = S_2 = S_3 \ldots S_k = 0$, $S_n = n$,

wenn wir durch S_k die Summe der kten Potenzen aller Wurzeln bezeichnen; die Summe der Potenzen der Wurzeln ist also gleich n oder gleich 0, je nachdem der Exponent durch n theilbar oder nicht theilbar ist.

Anmerkung. Da die Werthe $\frac{1}{\alpha^1}$ $\frac{1}{\alpha^2}$ .... $\frac{1}{\alpha^{n-1}}$ ebenfalls Ausdrücke der $(n-1)$ von der Einheit verschiedenen Wurzeln sind,

so hat man $1+\frac{1}{a^k}+\frac{1}{a^{2k}}+\ldots=0$ oder $=n$, je nachdem k ein Vielfaches von n ist, oder nicht. Der oben ausgesprochene Satz behält demnach für die Summen der negativen Potenzen seine Gültigkeit.

§. 110. Die Auflösung der Gleichungen $y^n-1=0$ wären demnach auf den Fall zurückgeführt, in welchem n eine Primzahl ist. Indem wir den Leser, der sich über die binomischen Gleichungen weiter unterrichten will, auf das klassische Werk von Lagrange über Auflösung der numerischen Gleichungen (deutsch herausgegeben von L. Crelle), und namentlich auf die vierzehnte Note daselbst verweisen, wollen wir uns nunmehr zu ähnlichem Zwecke der trigonometrischen Funktionen bedienen.

Wir haben in der analytischen Geometrie der Ebene §. 43 gesehen, daß jeder Cosinus der successiven Bogen 2x, 3x, 4x... erhalten wird, wenn man die beiden vorhergehenden, bezüglich mit 2p und -1, multiplicirt, und addirt, wobei $\cos x=p$ gesetzt wurde. Um das in den Resultaten herrschende Gesetz zur Evidenz zu bringen, wollen wir von einem analytischen Kunstgriff Gebrauch machen. Es sei nämlich $2\cos x=y+y^{-1}$; dem angezeigten Gesetze zufolge muß man, wenn $\cos 2x$ gefunden werden soll, $\cos x$ oder $\frac{1}{2}(y+y^{-1})$ durch $y+y^{-1}$, was mit $2\cos x$ gleichbedeutend ist, multipliciren, und $\cos 0x$ oder 1 abziehen. Man bekommt $2\cos 2x=y^2+y^{-2}$; ebenso erhält man

$$2\cos 3x=y^3+y^{-3},\ 2\cos 4x=y^4+y^{-4},\ \text{u. s. f.}$$

Wir wollen nun beweisen, daß das Gesetz allgemeine Gültigkeit hat. Zu diesem Behuf nehmen wir an, daß dasselbe für zwei aufeinander folgende Grade $n-2$ und $n-1$ wahr ist, oder

$$2\cos(n-2)x=y^{n-2}+y^{-(n-2)},\ 2\cos(n-1)x=y^{n-1}+y^{-(n-1)};$$

indem wir aber die zweite Gleichung durch $y+y^{-1}$ multipliciren, und die erste subtrahiren, entsteht $2\cos nx=y^n+y^{-n}$, woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

Man hat $2\cos x=y+\frac{1}{y}$, $2\cos nx=y^n+\frac{1}{y^n}$, oder

$$y^2-2y\cos x+1=0,\ y^{2n}-2y^n\cos nx+1=0\ldots\quad(1)$$

Kennt man $\cos x$, so bestimmen diese Gleichungen y, hierauf $\cos nx$; man kann folglich $\cos nx$ finden, ohne gerade $\cos 3x$,

$\cos 4x\ldots$ nach und nach aufzusuchen. Es ist dieß das allgemeine Glied der Cosinusreihe, und man könnte sich der vorstehenden Gleichungen zur Construktion der Tafeln bedienen; die Rechnung würde aber mit imaginären Ausdrücken behaftet sein.

Sind die trigonometrischen Tafeln aufgestellt, so nehme man daselbst die Werthe von $\cos x$ und $\cos nx$. Unsere beiden Gleichungen (1), nur noch y enthaltend, werden eine gemeinschaftliche Wurzel α haben, überdies genügt ihnen auch der Werth $\frac{1}{\alpha}$, wie man bald erkennt, da sie zu den reciproken Gleichungen gehören; sie besitzen daher zwei gemeinschaftliche Wurzeln, oder die erste theilt genau die zweite. Indem wir $nx=\varphi$ setzen, muß also, welcher Bogen φ auch sein mag,

$y^{2n}-2y^n\cos\varphi+1$ durch $y^2-2y\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+1$ theilbar sein (2).

Anmerkung. Indem wir die Gleichungen (1) auflösen, finden wir:
$y=\cos x\pm\sin x\sqrt{-1}$, $y^n=\cos nx\pm\sin nx\sqrt{-1}$, woraus
$(\cos x\pm\sin x\sqrt{-1})^n=\cos nx\pm\sin nx\sqrt{-1}$.

Diese schöne Eigenschaft, von welcher in der höheren Algebra häufig Gebrauch gemacht wird, gilt ganz allgemein, obgleich sie hier nur für den Fall bewiesen würde, daß n eine ganze positive Zahl ist. Wir werden auf diesen Gegenstand in der Folge noch einmal zurückkommen.

§. 111. Um den Lehrsatz (2), welchen wir dem Mathematiker Moivre verdanken, auf unsern vorliegenden Fall anzuwenden, machen wir $\varphi=k\pi$, wobei k eine beliebige ganze Zahl und π den halben Umkreis bedeutet. Je nachdem k gerade oder ungerade ist, wird $\cos\varphi=1$ oder -1, und das erste der Trinome (2) verwandelt sich in

$$y^{2n}\mp 2y^n+1 \text{ oder } (y^n\mp 1)^2\text{; daher ist}$$

$$y^n\mp 1 \text{ durch } y^2-2y\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1 \text{ theilbar}\ldots (3),$$

wo k eine beliebige ganze Zahl darstellt, und zwar eine gerade für y^n-1, und eine ungerade für y^n+1.

Wenn das zweite Trinom ein vollständiges Quadrat ist, so nimmt

man bloß seine Wurzel zum Divisor; ein solcher Fall verlangt, daß der Cosinus ± 1 werde, alsdann ist $k=0, n, 2n \ldots$, und der Faktor reducirt sich auf $y \pm 1$.

Die Wurzeln von $y^n \pm 1 = 0$ sind folglich in der Formel

$$y = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \pm \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)\sqrt{-1} \ldots \quad (4) \text{ begriffen.}$$

So lange die ganze Zahl k den Exponenten n nicht übertrifft, wird der Bogen $\frac{k\pi}{n}$ ein zunehmender Bruchtheil vom halben Umkreis sein; diese Bogen haben ungleiche Cosinus und es ergeben sich daraus verschiedene Faktoren vom zweiten Grade, welche durch $A, B, C \ldots L, M$ dargestellt sein mögen. Da $2n$ die Summe von den Zahlen $n+i$ und $n-i$ macht, so sind dieselben gleichzeitig gerade oder ungerade. Macht man hierauf $k = n \pm i$, wobei $i < n$, so wird der Bogen $\frac{k\pi}{n} = \pi \pm \frac{i\pi}{n}$ d. h. zwei Bogen mit einerlei Cosinus; hieraus folgt, daß der trinomische Faktor für $k = n-i$ und $n+i$ der nämliche ist. Nachdem man also für k alle Zahlen, gerade oder ungerade, bis n genommen hat, kommen dieselben Faktoren vom zweiten Grade in umgekehrter Ordnung $M, L, \ldots B, A$ zum Vorschein, wenn man über n hinausgeht.

Für höhere Werthe als $2n$ hat k die Form $2qn+i$, und der Bogen wird $2q\pi + \frac{i\pi}{n}$, dessen Cosinus noch der nämliche ist; man bekommt also dieselben Faktoren in derselben Ordnung $A, B \ldots L, M$ wieder. Es ist daher, wie man sieht, unnöthig, dem k größere Werthe als n beizulegen.

1) Wenn n gerade ist, so sind $\frac{1}{2}n \pm i$ zusammen, gerade oder ungerade; $k = \frac{1}{2}n \pm i$ gibt die Bogen $\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2}\pi \pm \frac{i\pi}{n}$, deren Cosinus gleich sind, aber entgegengesetzte Zeichen haben, nämlich $= \mp \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)$; man macht daher, wenn n gerade ist, k nicht größer als $\frac{n}{2}$, dabei nimmt man aber die Cosinus mit dem Zeichen $\pm$.

2) Wenn n ungerade ist, so ist die eine von den Zahlen $n-i$ und i gerad und die andere ungerad, weil ihre Summe ungerad wird,

und es steht nicht mehr frei, die eine oder die andere Zahl für k zu nehmen. $k=n-i$, wobei $i<\frac{1}{2}n$, gibt

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\cos\left(\pi-\frac{i\pi}{n}\right)=-\cos\frac{i\pi}{n};$$

d. h. wenn k über $\frac{1}{2}n$ hinaus geht, so sind die Cosinus unseres trinomischen Faktors dieselben, nur mit entgegengesetztem Zeichen, wie wenn man $k=i$ genommen hätte, welcher Werth ausgeschlossen und kleiner als $\frac{1}{2}n$ ist. Man setzt daher $k=0, 1, 2, 3 \ldots \frac{n-1}{2}$ um die unter $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen zu erhalten, deren Cosinus dem Lehrsatze (3) entsprechen, wobei dieselben jedoch von zwei zu zwei mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen sind.

3) Für die allgemeine Formel der Faktoren von $x^n \mp a^n$ erhält man $x^2-2ax\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+a^2$, wenn $y=\frac{x}{a}$ gesetzt wird.

4) Es hat keine Schwierigkeit die Gleichung

$$k\cos mt+p\cos(m-1)t+q\cos(m-2)t\ldots+P=0$$

in Bezug auf den Bogen t aufzulösen. Denn setzt man $2\cos t= x+x^{-1}$, so entsteht

$$k(x^m+x^{-m})+p(x^{m-1}+x^{-(m-1)})+\ldots+P=0,$$

eine Gleichung, mit welcher wir uns in §. 105 beschäftigt haben. Man könnte auch Formeln für die Cosinus der vielfachen Bogen nach den steigenden Potenzen der Cosinus der einfachen Bogen auffinden, welche Formeln wir in der Folge kennen lernen werden.

Anmerkung. Ist n gerade, so liefert die Formel (4) für jede der verschiedenen zwischen 0 und n liegenden geraden Zahlen k, im Allgemeinen zwei conjugirte imaginäre Werthe von $\sqrt[n]{1}$. Nur für $k=0$ findet man eine reelle Wurzel $=+1$, und für $k=n$ eine zweite reelle Wurzel $=-1$. Die andern $(n-2)$ Wurzeln von $\sqrt[n]{1}$ sind imaginär, nämlich:

$$\cos\frac{2\pi}{n}\pm\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},\ \cos\frac{4\pi}{n}\pm\sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1},\ldots$$

$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\pm\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Ist n ungerade, so liefert die Formel (4) für jede der innerhalb der Grenzen 0 und (n—1) befindlichen geraden Zahlen k, im Allgemeinen zwei conjugirte imaginäre Werthe von $\sqrt[n]{1}$. Nur für $k=0$ findet man die reelle Wurzel $+1$. Die übrigen Wurzelwerthe von $\sqrt[n]{1}$ sind imaginär, nämlich:

$$\cos\frac{2\pi}{n} \pm \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},\ \cos\frac{4\pi}{n} \pm \sin\frac{4\pi}{n}\sqrt{-1}\ \ldots,$$
$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Ist n gerade, so erhält man für jeden der Werthe 1, 3, 5 ... (n—1) von k, aus Formel (4) zwei conjugirte imaginäre Werthe von $\sqrt[n]{-1}$. In diesem Falle sind also sämmtliche Wurzeln von $\sqrt[n]{-1}$ imaginär, nämlich:

$$\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},\ \cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},\ldots$$
$$\cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Ist n ungerade, so findet man für jeden der Werthe 1, 3, 5 ... n von k, aus Formel (4) im Allgemeinen zwei conjugirte imaginäre Werthe von $\sqrt[n]{-1}$; nur für $k=n$ gibt die Formel den reellen Werth -1. Die übrigen (n—1) imaginären Werthe sind:

$$\cos\frac{\pi}{n} \pm \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{-1},\ \cos\frac{3\pi}{n} \pm \sin\frac{3\pi}{n}\sqrt{-1},\ldots$$
$$\cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm \sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Beispiele. I. Für y^4+1 ist k ungerade.

Der Cosinus des Bogens $\frac{1}{4}\pi$ oder von 45^0 ist $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Hieraus die zwei Faktoren $y^2 \pm y\sqrt{2}+1$. Ferner

$$x^4+a^4=(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)$$

II. Für y^6+1 gibt $k=1$ den Bogen $\frac{1}{6}\pi$, dessen Cosinus $=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist. $k=3$ gibt den Cosinus $=0$ Hiernach.

$$y^6+1=(y^2+y\sqrt{3}+1)(y^2-y\sqrt{3}+1)(y^2+1).$$

III. Für y^6-1 wird $k=0$ und 2. Daraus hat man

$$y^6-1=(y+1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)(y-1).$$

IV. Für y^4-1 findet man $y^4-1=(y^2+1)(y^2-1)$.

V. Für $y^8-1=(y^4+1)(y^4-1)$ sind diese beiden Faktoren so eben zerlegt worden.

VI. Für y^9-1 muß man $k=0, 1, 2, 3$ und 4 machen, und die Cosinus in den geraden Stellen mit entgegengesetzten Zeichen nehmen, nämlich:

$$1, -\cos 20^0, +\cos 40^0, -\cos 60^0 \text{ und } +\cos 80^0.$$

Hieraus ergeben sich die Faktoren

$y-1, y^2+y+1, y^2+1,879\ldots y+1, y^2-1,532\ldots$
$y+1, y^2-0,347\ldots y+1$, und man hat
$y^9-1=(y-1)(y^2+y+1)(y^6+y^3+1)$.

Ebenso verfährt man mit y^9+1, indem man die Cosinus in den ungeraden Stellen mit entgegengesetzten Zeichen nimmt. Hiernach steht

$$y^9+1=(y+1)(y^2-y+1)(y^6-y^3+1).$$

Uebrigens ist es einleuchtend, daß die Auflösung der Gleichung $y^n+1=0$ sich auf jene $y^n-1=0$ zurückführen läßt, wenn n ungerade ist; dann setzt man in der erstern $-y$ statt y, so entsteht

$$-y^n+1=0 \text{ oder } y^n-1=0.$$

§. 112. Der Satz (3) führt den Namen des Cotes'schen Lehrsatzes, weil ihn dieser Gelehrte zuerst unter einer geometrischen Form dargestellt hatte. Mit dem Radius $AR=a$ (Fig. 24 und 25) sei der Kreis ACHL beschrieben, dessen Durchmesser AH durch einen willkührlichen Punkt O geht. Von A anfangend theile man den Umfang in $2n$ gleiche Theile Aa, aB, Bb . . . ; hierauf ziehe man vom Punkte O aus nach allen Theilungspunkten gerade Linien. Die nach dem beliebigen Theilungspunkte C gehende Gerade bildet das Dreieck COP, aus welchem, wenn man den Winkel $CRA=\alpha$, und $OR=x$ setzt, und erwägt, daß

$CP=a\sin\alpha$, $RP=a\cos\alpha$, $OP=a\cos\alpha-x$, folgt:
$OC^2=x^2-2ax\cos\alpha+a^2=OC.\ OL$.

Wenn k Theile in dem Bogen enthalten sind, so hat man $\alpha=\frac{k\pi}{n}$.

Da jenes Trinom einen Faktor von $x^n \mp a^n$ bildet, je nachdem k gerade oder ungerade ist; so stellen die nach den aufeinanderfolgenden Theilungspunkten gezogenen Radiivectores die sämmtlichen Faktoren des Binoms dar. $OA = a - x$, $OH = a + x$ entsprechen den reellen Faktoren vom ersten Grade.

Bezeichnen $Z, Z', Z'' \ldots$ die nach den geraden, und $z, z', z'' \ldots$ die nach den ungeraden Theilungspunkten gehenden Geraden; so haben wir

$$z.\ z'.\ z'' \ldots = a^n + x^n,$$

der Punkt O mag innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen;

$Z \cdot Z' \cdot Z'' \ldots = a^n - x^n$, wenn O innerhalb des Kreises liegt;
$Z \cdot Z' \cdot Z'' \ldots = x^n - a^n$, wenn O außerhalb des Kreises liegt.

Die dreigliederigen Gleichungen.

§. 113. Die dreigliederigen Gleichungen von der Form $Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$ lassen sich immer auf zweigliederige zurückführen. Denn man hat zuerst, wenn man $x^n = z$ setzt, die quadratische Gleichung:

$$Az^2 + Bz + C = 0.$$

1) Sind die Wurzeln f und g von z reell, so hat man die beiden Gleichungen $x^n = f$, $x^n = g$, welche beide zusammen die 2n Wurzeln der vorgelegten Gleichung liefern. Man will z. B. zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit finden, daß ihr Produkt 10, und die Summe ihrer Cuben 133 beträgt. Man hat die Gleichung

$$x^3 + \left(\frac{10}{x}\right)^3 = 133,\ x^6 - 133x^3 + 1000 = 0.$$

Indem wir $x^3 = z$ setzen, entsteht $z^3 - 133z + 1000 = 0$; woraus $z = 8$ und 125. Hierauf machen wir $x^3 = 8$ und 125; daraus folgt $x = 2$ und 5, außerdem noch 2α und $5\alpha^2$, ferner 5α und $2\alpha^2$, wo α eine imaginäre Wurzel der Einheit bezeichnet. Es sind dies die drei Auflösungen der Aufgabe.

2) Sind die Wurzeln von z gleich, in welchem Fall $B^2 - 4AC = 0$ ist, so bildet die vorgelegte Gleichung ein vollständiges Quadrat, $(ax^n + b)^2 = 0$, und man hat eine binomische Gleichung. Man soll z. B. eine Zahl von der Art finden, daß die 4ten Potenzen der beiden Quotienten, welche man erhält, wenn man das Dop-

pelte der gesuchten Zahl durch 3, und umgekehrt 3 durch das Doppelte jener Zahl dividirt, in Summa 2 betragen. Hiernach steht

$$\left[\frac{2x}{3}\right]^4 + \left[\frac{3}{2x}\right]^4 = 2, \text{ woraus } (16x^4 - 81)^2 = 0.$$

Da ± 1 und $\pm\sqrt{-1}$ die Wurzeln von $y^4 = 1$ sind, so ist $x = \pm\frac{3}{2}$ und $\pm\frac{3}{2}\sqrt{-1}$.

3) Sind die Wurzeln von z imaginär, mithin $B^2 - 4AC < 0$; so macht man $Ax^{2n} = Cy^{2n}$. Hierdurch verwandelt sich die vorgelegte Gleichung in

$$y^{2n} + \frac{B}{\sqrt{AC}}y^n + 1 = 0,$$

unter welcher Form sie mit der Gleichung (2) in §. 110 vergleichbar wird. Denn der Coefficient von y^n ist < 2, weil $B^2 < 4AC$. Es gibt also einen Bogen φ, welcher die Hälfte dieses Faktors zum Cosinus hat; der Bogen wird durch Logarithmen mittelst der Relation

$$\cos\varphi = -\frac{B}{2\sqrt{AC}} \; . \; . \; . \; (5)$$

bestimmt. Unsere transformirte Gleichung ist folglich durch

$$y^2 - 2y\ \cos\left[\frac{\varphi}{n}\right] + 1 = 0$$

theilbar, in sofern man für φ alle Bogen, deren Cosinus durch die Relation (5) gegeben ist, wählt, und zwar genügt nicht bloß der Bogen $\varphi < 180^0$, welchen die Tafeln liefern, sondern auch $\varphi + 2\pi, \varphi + 4\pi \ldots$, im Allgemeinen $\varphi + 2k\pi$, wo k eine beliebige ganze Zahl darstellt. Es sei $\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, alsdann sind sämmtliche gesuchte Faktoren in dem Ausdrucke

$$x^2\sqrt[n]{A} - 2x\sqrt[2n]{AC}.\cos\psi + \sqrt[n]{C} = 0 \ldots (6)$$

enthalten. Uebrigens ist es unnöthig $k > n$ zu nehmen, weil $k = qn + i$ den Bogen $2q\pi + \frac{\varphi + 2i\pi}{n}$ gibt, für welchen man den nämlichen Cosinus findet, als wenn man $k = i < n$ genommen hätte; woraus erhellet, daß dieselben Faktoren wiederkehren. Zu bemerken ist hierbei, daß der Radius = 1 ist; bedient man sich demnach der Logarithmentafeln, so muß man von allen Logarithmen der Cosinus, welche in der Rechnung vorkommen, 10 abziehen.

Anmerkung. Die Wurzeln der Gleichung $Ax^{2n} - Bx^n + C=0$ sind in dem Ausdrucke

$$x=\sqrt[2n]{\frac{C}{A}}\left[\cos\frac{(\varphi+2k\pi)}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(\varphi+2k\pi)}{n}\right],$$

die der Gleichung $Ax^{2n}+Bx^n+C=0$ dagegen in dem Ausdruck

$$x=\sqrt[2n]{\frac{C}{A}}\left[\cos\frac{[\varphi+(2k+1)\pi]}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{[\varphi+(2k+1)\pi)}{n}\right]$$

begriffen.

Beispiele. I. Für die Gleichung $x^6-2x^3+1=0$ ist $A=C=1$, $B=-2$, $n=3$. Man findet $\cos\varphi=1$, die Bogen $\psi=0^0$, 120^0 und 240^0. Hiernach hat die vorgelegte Gleichung die drei quadratischen Faktoren von der Form $x^2-2x\cos\psi+1$. Die Werthe von $\cos\psi$ sind 1, $-\sin 30^0=-\frac{1}{2}$ und $-\cos 60^0=-\frac{1}{2}$. Die Faktoren sind demnach: x^2-2x+1 und x^2+x+1, von welchen der letztere doppelt erscheint. Das gegebene Trinom ist daher das Quadrat von $(x-1)(x^2+x+1)$ oder von x^3-1.

II. Für $x^4+x^2+25=0$ hat man $A=B=1$, $C=25$, $n=2$ und $\cos\varphi=-\frac{1}{10}$. Die Tafeln geben, wegen des Zeichens $-$, den Bogen $\varphi=95^0\ 44'\ 20''$, dessen Hälfte $47^0\ 52'\ 10''$ ist. Unsere Faktoren sind also $x^2\pm 3x+5$.

III. Für $2x^6+3x^3+5=0$ findet man $\cos\varphi=\frac{-3}{2\sqrt{10}}$ $\varphi=118^0\ 19'$, dessen Drittel $39^0\ 26'\ 20''$ beträgt. Setzt man $\alpha=-2{,}2672$, $+2{,}7486$, $-0{,}48143$; so sind unsere drei Faktoren von der Form $x^2\sqrt[3]{2}+\alpha x+\sqrt[3]{5}$.

IV. Für $x^6-2x^3+2=0$ hat man $\cos\varphi=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y^6-y^3\sqrt{2}+1=0$. Daraus ergeben sich die Faktoren der Gleichung in y:

$$y^2-1{,}4142y+1,\ y^2+1{,}9318y+1,\ y^2-0{,}5176y+1,$$

aus welchen sich die der Gleichung in x leicht herleiten lassen.

Zusammengesetzte Wurzelausdrücke.

§. 114. 1) Unter der Voraussetzung, daß $a+\sqrt{b}$ ein Quadrat sei, wollen wir davon die Wurzel, deren Form $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ist, suchen; wir setzen deßhalb $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, woraus

$$x+y+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b},\ \text{ferner}\ x+y=a,\ 2\sqrt{xy}=\sqrt{b},$$

wenn man die rationalen, so wie die irrationalen Theile für sich einander gleich setzt. Um aus diesen Gleichungen x und y abzuleiten, bilden wir die Quadrate und subtrahiren, wodurch wir $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=a^2-b$ erhalten. Da x und y rational angenommen worden, so muß a^2-b ein vollständiges Quadrat sein, das wir $=k^2$ machen. Die Gleichungen $x-y=k$, und $y+x=a$ geben die gesuchte Auflösung, nämlich

$$x=\tfrac{1}{2}(a+k),\ y=\tfrac{1}{2}(a-k),\ k=\sqrt{(a^2-b)}.$$

Beispiele. I. Für $\sqrt{(4+2\sqrt{3})}$ hat man $a=4$, $b=12$; hieraus $a^2-b=k^2=4$, ferner $k=2$, $x=3$, $y=1$.

Die verlangte Wurzel ist $\pm(1+\sqrt{3})$.

Die von $4-2\sqrt{3}$ ist $\pm(1-\sqrt{3})$.

II. In $\sqrt{(-1+2\sqrt{-2})}$ ist $a^2-b=9$, $k=3$, $x=1$, $y=-2$; daraus ergeben sich die Wurzeln $\pm(1+\sqrt{-2})$.

2) Wenn $a+\sqrt{b}$ ein vollständiger Cubus ist, so macht man $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{z}$, wobei z eine Größe darstellt, die man nach Belieben wählt, um die Rechnung dadurch zu erleichtern. Durch Erhebung auf den Cubus und Vergleichung der rationalen Glieder findet man

$$a=z(x^3+3xy),\ \sqrt{b}=z\sqrt{y}(3x^2+y).$$

Daraus ergibt sich, wenn man quadrirt und abzieht,

$$a^2-b=z^2\,[(x^3+3xy)^2-(3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y})^2].$$

Der Faktor von z^2 ist aber offenbar die Differenz zweier Quadrate, und einerlei mit $(x+\sqrt{y})^3\times(x-\sqrt{y})^3$ oder $(x^2-y)^3$, woraus folgt, $\frac{a^2-b}{z^2}=(x^2-y)^3$. Nun sind x und y rational angenommen, das erste Glied muß daher einen vollständigen Cubus bilden; und es wird keine Schwierigkeit haben, z dergestalt zu bestimmen, daß diese Bedingung jederzeit erfüllt werde, geschehe es auch nur dadurch, daß $z=(a^2-b)^2$ gemacht würde. Im Fall a^2-b schon ein Cubus ist, macht man $z=1$. Im Allgemeinen wird man, bei der Zerlegung von a^2-b in seine Primfaktoren, bald erkennen, welche Faktoren einzuführen oder wegzulassen sind, um einen vollständigen Cubus zu bekommen.

Hiernach ständen die Relationen

$$k=\sqrt[3]{\left(\frac{a^2-b}{z^2}\right)},\ x^2-y=k,\ a=zx\,(x^2+3y);\ \text{woraus}$$
$$y=x^2-k,\ 4zx^3-3kxz=a.$$

Die letzte Gleichung gibt x, wenn man sich mit den bloßen rationalen Wurzeln begnügt; die vorhergehende lehrt y kennen, und die gesuchte Wurzel ist bestimmt.

Beispiele. I. Für $\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}$ hat man $a=10$, $b=108$, $a^2-b=-8$, $z=1$, $k=-2$. Folglich $4x^3+6x=10$, woraus $x=1$, $y=3$; endlich $\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$.

II. Für $\sqrt{8+4\sqrt{5}}$ ist $a^2-b=-16$. Man nimmt $z=4$, $k=-1$; hieraus $4x^3+3x=2$, $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{5}{4}$.
Endlich $\sqrt[3]{8+4\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4(1+\sqrt{5})}$

3) Setzt man $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}=(x+\sqrt{y})\sqrt[n]{z}$, und verfährt ebenso, so werden x, y und z für den Fall bestimmt, daß $a+\sqrt{b}$ eine vollständige $n$te Potenz ist.

Anmerkung. Würde die obige Gleichung auf die $n$te Potenz erhoben, und die rationalen so wie die irrationalen Theile für sich einander gleichgesetzt; so kommt

$$a=z\left[x^n+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}y2+\ldots\right],$$
$$\text{und }\sqrt{b}=z\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y+\ldots\right]\sqrt{y}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch auf folgende Form bringen:

$$a=\frac{z}{2}\left[(x+\sqrt{y})^n+(x-\sqrt{y})^n\right]$$
$$\sqrt{b}=\frac{z}{2}\left[(x+\sqrt{y})^n-(x-\sqrt{y})^n\right].$$

Hieraus ergibt sich $a^2-b=z^2(x^2-y)^n$, woraus $x^2-y=\sqrt[n]{\frac{a^2-b}{z^2}}$.

Man wählt die Größe z dergestalt, daß $\frac{a^2-b}{z^2}$ eine vollstän-

dige nte Potenz wird, und setzt $\sqrt[n]{\frac{a^2-b}{z^2}}=k$. Hiernach ist $x^2-y=k$. Wird daraus der Werth für y in die Gleichung

$$a=z\left[x^n+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2+\ldots\right]$$

substituirt, so erhält man eine Gleichung in x, welche wenigstens eine commensurable Wurzel haben muß, damit x und y rational werden.

Beispiele. I. Für die vierte Wurzel aus $14+8\sqrt{3}$ wird $n=4$, $a=14$, $b=192$, $a^2-b=4$, so daß es hinreicht, $z=\frac{1}{2}$ zu nehmen, um $k=\sqrt[4]{16}=2$ rational zu haben. Der Werth von $y=x^2-2$ in die Gleichung $a=\frac{1}{2}\left(x^n+\frac{n(n-1)}{1.2}yx^{n-2}+\ldots\right)$ substituirt, gibt $x^4-2x^2-3=0$, welche Gleichung die Wurzel $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{-1}$ besitzt; die entsprechenden Werthe von y sind $y=1$ und $y=-3$. Das System der Werthe $x=\sqrt{3}$ und $y=1$ liefert $\sqrt[4]{(14+8\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{2}}$.

II. Ebenso findet man $\sqrt[5]{(228+132\sqrt{3})}=(1+\sqrt{3})\sqrt[5]{3}$.

§. 115. In jeder andern Formel ist es nicht ausreichend, für die daselbst vorkommenden Wurzelgrößen ihren Näherungswerth zu substituiren, weil man auf diese Weise alle imaginären Wurzelwerthe, deren solche Wurzelausdrücke fähig sind, vernachläßigt. Man muß alsdann $\sqrt[n]{A}$ durch $\alpha\sqrt[n]{A}$, $\alpha^2\sqrt[n]{A}\ldots$ ersetzen, wobei α, $\alpha^2\ldots$ die Wurzeln der Gleichung $y^n-1=0$ bedeuten.

Hat man $x=a\sqrt[n]{g}+b\sqrt[n]{g^2}+c\sqrt[n]{g^3}+\ldots$, so genügt es

$$y^n=g,\ x=ay+by^2+cy^3\ldots,$$

zu machen, und y zwischen diesen beiden Gleichungen zu eliminiren; sämmtliche Wurzeln dieser Finalgleichung in x werden die gesuchten Werthe von x sein.

Hat man eine mit den Wurzelgrößen $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[m]{B}$, ... behaftete Funktion fx, so setzt man $y^n=A$, $t^m=B$, ... und führt statt der Wurzelgrößen die n Werthe von y, und die m Werthe von t ... mit allen möglichen Combinationen ein, um sämmtliche Werthe von fx zu er-

halten. Sind in einer Gleichung die Wurzelgrößen Funktionen von x, so schafft man dieselben dadurch weg, daß man jede Wurzelgröße durch eine neue Unbekannte ersetzt, und hierauf nach dem gewöhnlichen Verfahren zur Elimination schreitet.

Beispiele. I. Für die Gleichung $x-\sqrt[3]{x}-2\sqrt{(x+1)}=0$ setzt man $x=z^3$, $x+1=y^2$, woraus $x-z-2y=0$. Durch Elimination von y entsteht

$$4x+4=x^2-2xz+z^2,\ z^3-x=0.$$

Indem man z eliminirt, erhält man die Finalgleichung

$$x^6-12x^5+34x^4+8x^3-167x^2-192x-64=0,$$

welche die reellen Wurzeln 8 und -1 besitzt. Was die andern Wurzeln betrifft, so beziehen sie sich auf die Verbindungen der imaginären Wurzelwerthe der in der vorgelegten Gleichung vorkommenden Quadrat- und Cubikwurzelausdrücke.

II. Für $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x-5}=1$ setzt man $\sqrt{x+2}=y$, $\sqrt[3]{3x-5}=z$, woraus $x+2=y^2$, $3x-5=z^3$, $y-z=1$.

Die Elimination von x und y gibt die Endgleichung $z^3-3z^2-6z+8=0$, deren Wurzeln $+1$, $+4$, und -2 sind. Die entsprechenden Werthe von y sind 2, 5 und -1, und die von x sind 2, 23 und -1.

Anmerkung. Die beiden Werthe 2 und 23 entsprechen der vorgelegten Gleichung, während der dritte nur dann genügt, wenn man den Quadratwurzelausdruck mit dem Zeichen $-$ nimmt.

Gleichungen des dritten Grades.

§. 116. Um die Gleichung $kx^3+ax^2+bx+c=0$ aufzulösen, wollen wir das zweite Glied und den Coefficienten des ersten hinwegschaffen, indem wir

$$x=\frac{x'-a}{3k}$$

machen; man erhält dadurch $x'^3+3x'(3kb-a^2)+2a^3-9abk+27ck^2=0$.

Jede Gleichung vom dritten Grad läßt sich daher auf die Form $x^3+px+q=0\ldots(1)$ zurückführen. Setzen wir hierauf $x=y+z$, so verwandelt sich die vorgelegte in

$$(3yz+p)(y+z)y+y^3+z^3+q=0.$$

Die Zerlegung von x in zwei Zahlen y und z kann nun auf unzählig viele Arten geschehen, und nichts hindert uns dabei eine beliebige Relation zwischen ihrem Produkt, ihrer Differenz, ihren Quotienten, etc. zu nehmen. Wir setzen hier den ersten Faktor gleich Null, oder

$$yz = -\tfrac{1}{3}p, \quad y^3 + z^3 = -q.$$

Der Cubus der ersten Gleichung $y^3z^3 = -(\tfrac{1}{3}p)^3$ in Verbindung mit der zweiten zeigt, daß y^3 und z^3 die Wurzeln einer Gleichung vom zweiten Grade sein werden, die q zum Coefficienten des zweiten Gliedes, und $-(\tfrac{1}{3}p)^3$ zum letzten Glied hat, nämlich

$$t^2 + qt = (\tfrac{1}{3}p)^3 \;\ldots\ldots\; (2).$$

Kennt man die Werthe dieser sogenannten reducirten Gleichung, so ist $y^3 = t$, $z^3 = t'$, woraus, wenn unter 1, α, α^2 die drei Cubikwurzeln der Einheit verstanden werden,

$$y = \sqrt[3]{t},\ \alpha\sqrt[3]{t},\ \alpha^2\sqrt[3]{t},\ z = \sqrt[3]{t'},\ \alpha\sqrt[3]{t'},\ \alpha^2\sqrt[3]{t'}.$$

Man muß aber nicht, um $x = y + z$ zu erhalten, diese Werthe alle zu je zwei addiren, weil man auf solche Weise 9 Wurzeln statt 3 finden würde. Berücksichtigt man indeß, daß nur jene Werthe von y und z zusammengefügt werden dürfen, welche mit einander multiplicirt das reelle Produkt $= -\tfrac{1}{3}p$ oder $\sqrt[3]{tt'}$ liefern, indem das zweite Glied der Gleichung (2) $= -tt'$ ist, welches $\tfrac{1}{3}p$ zur Cubikwurzel hat; so findet man unter dieser Einschränkung, wegen $\alpha^3 = 1$, daß von den 9 Combinationen nur folgende drei zuläßig sind:

$$x = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t'},\ x = \alpha\sqrt[3]{t} + \alpha^2\sqrt[3]{t'},\ x = \alpha^2\sqrt[3]{t} + \alpha\sqrt[3]{t'}.$$

Wir sehen hieraus, daß durch Erhebung der Gleichung $yz = -\tfrac{1}{3}p$ auf die dritte Potenz neue Wurzeln eingeführt werden, welche der vorgelegten Gleichung fremd sind.

Substituirt man in die vorhergehenden Ausdrücke für α und α^2 ihre Werthe $-\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$, und macht, der Kürze halber,

$$s = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t'},\ d = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{t'};\ \text{so kommt}$$
$$x = s,\ x = -\tfrac{1}{2}(s \pm d\sqrt{-3}) \;\ldots\; (3),$$

Um also die Gleichung (1) vom dritten Grade aufzulösen, muß man zuvörderst die reducirte (2) auflösen, und alsdann nach der Bestimmung der Werthe t und t' solche in die Formel (3) substituiren.

Anmerkung. Diese Formel, welche die drei Wurzeln der Gleichung (1) enthält und zuerst von dem Italiener Cardan bekannt gemacht wurde, heißt die Cardanische Regel, deren Erfindung übrigens von einigen dem Ferreo aus Bologna, von andern dem Tartaglia aus Brescia zugeschrieben wird.

Beispiele. I. $x^3 + 6x = 7$ gibt $p=6$, $q=-7$, und die reducirte Gleichung ist $t^2 - 7t = 8$. Hieraus $t = 8$ und $t' = -1$, die 2 und -1 zu Cubikwurzeln haben. Hiernach

$$s = 1,\ d = 3;\ x = 1 \text{ und } -\tfrac{1}{2}(1 \pm 3\sqrt{-3}).$$

II. $y^3 - 3y^2 + 12y = 4$. Man setzt $y = x + 1$, um das zweite Glied hinwegzuschaffen. Dadurch entsteht $x^3 + 9x + 6 = 0$. Die reducirte Gleichung ist

$$t^2 + 6t = 27, \text{ woraus } t = 3, t' = -9; \text{ ferner}$$

$$s = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = -0,637835 = x,\ d = 3,522333; \text{ und}$$

$$y = 0,362165,\ y = 1,318918 \pm 1,761167\sqrt{-3}.$$

III. $x^3 - 3x = 18$ gibt $t^2 - 18t + 1 = 0, t = 9 \pm 4\sqrt{5}$, deren Cubikwurzel $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ist (§. 114). Also

$$s = 3, d = \sqrt{5}; \text{ endlich } x = 3 \text{ und } -\tfrac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-15}).$$

IV. $x^3 - 27x + 54 = 0$ gibt $t^2 + 54t + 729 = 0$, oder $(t+27)^2 = 0$, $= -27$; folglich $x = -6$ und 3 als doppelte Wurzel.

§. 117. Man kann die Gleichung vom dritten Grade auch mit Hülfe der Logarithmentafeln berechnen, indem man sich bei der Auffindung der Wurzeln t und t', der reducirten Gleichung, des im §. 47 der analytischen Geometrie in der Ebene angegebenen Verfahrens bedient.

Für den Fall, daß p positiv ist, setzt man $\tang\varphi = \dfrac{2\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{q}$,

woraus $t = \sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi$, $\quad t' = -\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{\tang\frac{1}{2}\varphi}$;

ferner $\sqrt[3]{t} = \sqrt{\frac{1}{3}p} \times \sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\varphi}$, $\quad \sqrt[3]{t'} = -\dfrac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt[3]{(\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi)}}$

Für p negativ setzt man $\quad \sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{q}$;

hieraus $\sqrt[3]{t} = -\sqrt{(\frac{1}{3}p)}\sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\varphi}$, $\sqrt[3]{t'} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\varphi}}$.

Hat man einmal die Cubikwurzeln von t und t′ gefunden, so leitet man die Werthe von s und d, und dann die von x daraus her.

Beispiele. I. Die Gleichung $x^3 + 9x + 6 = 0$ gehört zu dem ersten Fall. Man findet

$$\varphi = 60^0,\ s = x = -0,637833,\ d = 3,522333,$$
$$x = +0,318916 \pm 1,761166\sqrt{-3}$$

II. Die Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ gehört in den zweiten Fall. Man findet

$$\varphi = -12^0\ 34'\ 33''\ 18;\ s = x = +2,094552,$$
$$d = 1,311670,\ x = -1,047276 \pm 0,655835\sqrt{-3}.$$

§. 118. So lange die beiden Wurzeln t und t′ der reducirten Gleichung reell sind, sind es auch die Werthe $\sqrt[3]{t}, \sqrt[3]{t'}$, sowie s und d. Aus den Formeln (3) folgt, daß dann die vorgelegte Gleichung nur eine reelle Wurzel besitzt. Ist indessen $t = t'$, so hat man $d = 0$, und die drei Wurzeln von x sind reell, und zwar zwei davon gleich der Hälfte der dritten, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen. Das 4te Beispiel im §. 116 gehört hieher.

Sind aber die Wurzeln der reducirten Gleichung imaginär, was erfordert, daß p negativ, und zugleich $27q^2 + 4p^3 < 0$ sei; so stellen sich alle drei Wurzeln unter einer imaginären Form dar, und es scheint, als wenn keine Wurzel reell wäre, was doch nicht sein kann. Dieser Umstand, welcher gerade dann eintritt, wenn die drei Wurzeln reell sind, hat die Analysten, denen die Auffindung solcher Wurzeln nicht gelingen wollte, in einige Verlegenheit gebracht, weßhalb der fragliche Fall der irreductible Fall genannt wurde.

Die Werthe von t und t′ erscheinen hier unter der Form $a \pm b\sqrt{-1}$, und ihre Cubikwurzel oder $\frac{1}{3}$te Potenz läßt sich nach §. 10 durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Ohne diese Rechnung vorzunehmen, sieht man jedoch sogleich, daß die imaginären Größen sich nur in denjenigen Gliedern, in welchen $b\sqrt{-1}$ mit ungeraden Exponenten behaftet ist, vorfinden können. Da nun die eine gedachter Reihen aus der andern hergeleitet wird, wofern man b mit $-b$ vertauscht; so

ist klar, daß in der Formel $P \pm Q\sqrt{-1}$ beide Entwicklungen begriffen sind, deren Summe $s = 2P$, und deren Differenz $d = 2Q\sqrt{-1}$ macht.

Die Formeln (3) reduciren sich hiernach auf folgende reelle Ausdrücke:

$$x = 2P, \text{ und } x = -P \pm Q\sqrt{3} \quad . \; . \; . \; (4).$$

Unsere drei Wurzeln sind daher reell, obschon die Cardanische Formel sie in diesem Falle unter einer imaginären Gestalt gibt. Dieser sonderbare Umstand rührt von dem Ansetzen der Gleichungen $x = y + z$ und $yz = -\frac{1}{3}p$ her, indem dabei durch nichts ausgedrückt wird, daß die Größen y und z wirklich reell seien; und in der That zeigt die Rechnung, daß dieselben imaginär ausfallen, wenn die drei Wurzeln reell sind. Um die letztern zu erhalten, entwickelt man die $\frac{1}{3}$te Potenz von $a + b\sqrt{-1}$, woraus sich die in den Gleichungen (4) vorkommenden Größen P und Q ergeben werden.

Anmerkung. Im Allgemeinen lassen sich die Werthe von P und Q nur durch Reihen angeben. Entwickelt man die Ausdrücke $(a \pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, so findet man

$$P = a^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\,\frac{b^2}{a^2} - \frac{1\cdot2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9\cdot12}\,\frac{b^4}{a^4} + \text{etc.} \right\}$$

$$Q = a^{\frac{1}{3}} \left\{ \tfrac{1}{3}\,\frac{b}{a} - \frac{1\cdot2\cdot5}{3\cdot6\cdot9}\,\frac{b^3}{a^3} + \frac{1\cdot2\cdot5\cdot8\cdot11}{3\cdot6\cdot9\cdot12,15}\,\frac{b^5}{a^5} + \text{etc.} \right\}$$

Diese Reihen sind nur dann convergirend, wenn $b < a$ ist. Für den Fall, wo $b > a$ ist, muß man andere suchen, welche nach den Potenzen von $\frac{a}{b}$ fortschreiten. Dieß geschieht, wenn man das Binom folgendermaßen umformt:

$$(b\sqrt{-1} + a)^{\frac{1}{3}} + (-b\sqrt{-1} + a)^{\frac{1}{3}} =$$

$$\left[1 - \frac{a}{b}\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}} (b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + \left[1 + \frac{a}{b}\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}} (-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$$

$$= -\left[1 - \frac{a}{b}\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}\sqrt{1} + \left[1 + \frac{a}{b}\sqrt{-1}\right]^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1}.$$

Wird die Rechnung ausgeführt so findet man

$$P = -b^{\frac{1}{3}} \left\{ \tfrac{1}{3} \frac{a}{b} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5\, a^3}{3 \cdot 6 \cdot 9\, b^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15} \frac{a^5}{b^5} + \text{ic.} \right\}$$

$$Q = -b^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} \frac{a^2}{b^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} \frac{a^4}{b^4} + \text{ic.} \right\}$$

Uebrigens ist der Ausdruck unserer ersten Wurzel nur ein besonderer Fall von Folgendem:

$$\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(a - b\sqrt{-1})},$$

was ein von imaginären Größen befreites Resultat liefert.

§. 119. Das obige Verfahren, die Wurzeln kennen zu lernen, steht den folgenden Methoden an Eleganz nach, weßhalb die letzteren den Vorzug verdienen. Wenn a eine Wurzel von x ist, so dividirt man die vorgelegte Gleichung durch $x-a$, um die beiden anderen zu erhalten. Da der Rest a^3+ap+q der Annahme nach verschwindet, so gibt der Quotient $x^2+ax+a^2+p=0$ die anderen Wurzeln, nämlich

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(-p - \tfrac{3}{4}a^2)} \quad \ldots \quad (5)$$

Man sieht hieraus, daß wenn die erste Wurzel a reell ist, die beiden anderen ebenfalls reell sein werden, insofern p negativ und zu gleicher Zeit entweder gleich oder größer als $\tfrac{3}{4}a^2$ ist. Wir vertauschen deßhalb p mit $-p$, und bezeichnen durch δ die positive Differenz $\delta = p - \tfrac{3}{4}a^2$. Um den vorliegenden Fall näher zu erörtern, wollen wir a aus den beiden Gleichungen

$$\delta = p - \tfrac{3}{4}a^2 \text{ und } q = -a^3 + ap$$

eliminiren, damit wir den Werth von q mit dem von p zu vergleichen im Stande sind, ohne den Werth von a zu kennen. Die Finalgleichung läßt sich unter folgende Form bringen:

$$4p^3 - 27q^2 = 4\delta(4\delta - 3p)^2.$$

Da nun δ positiv ist, so muß offenbar $4p^3 > 27q^2$ sein; das Gegentheil kann nicht stattfinden, so lange δ nicht negativ ist, d. h., wofern die beiden anderen Wurzeln der vorgelegten Gleichung nicht imaginär sein sollen, was mit dem früher Gesagten in vollem Einklange steht.

Um die Wurzeln im vorliegenden Falle zu erhalten, bringt man

zuvörderst die Gleichung (1) auf die Form $z^3 - z = r$, indem man $x = \pm z\sqrt{p}$ setzt.

Von den beiden Werthen $\pm\sqrt{p}$ kommt der erste mit dem Fall überein, wo q negativ, und der zweite mit demjenigen, wo q positiv ist. Durch die angezeigte Substitution findet man

$$z^3 - z - \frac{q}{\sqrt{p^3}} = 0.$$

Die Annahme von

$$4p^3 > 27q^2, \text{ oder } \tfrac{4}{27} > \frac{q^2}{p^3}, \text{ oder endlich } \frac{2}{\sqrt{27}} > \frac{q}{\sqrt{p^3}}$$

zeigt, daß das Resultat positiv ist, wenn man $z = \sqrt{\tfrac{4}{3}}$ setzt; dasselbe wird dagegen negativ, wenn man $z = 1$ macht: es liegt folglich ein Werth von z zwischen 1 und $\sqrt{\tfrac{4}{3}} = 1,1547$. Setzen wir daher $z = 1 + v$, wo v einen Bruch darstellt, der kleiner als 0,1547 ist; so kann für eine erste Annäherung v^3 hinweggelassen werden. Auf diese Weise erhält man durch Substitution $2v + 3v^2 = \frac{q}{\sqrt{p^3}}$, woraus man zieht

$$v = -\tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{1 + \frac{3q}{\sqrt{p^3}}}, \quad \text{und hierauf}$$

$$x = \pm\tfrac{1}{3}\sqrt{p}\left(2 + \sqrt{1 + \frac{3q}{p\sqrt{p}}}\right) \ldots (6)$$

Man schreitet nun mittelst der gewöhnlichen Methode zu einer größeren Annäherung. Der Ausdruck (5), welcher auf $x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\delta}$ zurückkommt, gibt endlich die beiden andern Wurzeln.

Beispiele. I. $x^3 - 5x + 3 = 0$. Wir setzen $x = -z\sqrt{5}$; dadurch kommt $z^3 - z = \frac{3}{5\sqrt{5}}$, woraus wir herleiten

$$x = -\tfrac{1}{3}\sqrt{5}\left(2 + \sqrt{1 + \frac{9}{5\sqrt{5}}}\right) =$$

$$-\tfrac{1}{3}\sqrt{5}.\ 3,343 = -2,492. \text{ Hierauf}$$

$$x = -2,490862,\ 1,834245 \text{ und } 0,6566166.$$

II. $x^3 - 13x + 5 = 0$. Wir machen

$x = -z\sqrt{13}$, und erhalten $z^3 - z = \frac{5}{13\sqrt{13}}$, woraus wir $x = -3,784$ finden.

§. 120. Will man zu den Logarithmen seine Zuflucht nehmen, so verfährt man folgendermaßen: Dem Lehrsatze (2) im Paragraphen 110 gemäß ist, wenn man $n=3$ setzt,

$$y^6-2y^3\cos\varphi+1 \text{ durch } y^2-2y\cos\tfrac{1}{3}\varphi+1 \text{ theilbar.}$$

Es werde nun $x=m(y+y^{-1})$ in $x^3-px+q=0$ gesetzt, wo wir p negativ nehmen, weil wir nur den Fall zu betrachten haben, in welchem $27q^2+4p^3$ negativ wird. Dadurch entsteht

$$m^6(y^3+y^{-3})+(3m^3-pm)(y+y^{-1})+q=0.$$

Indem wir das zweite Glied mittelst der Gleichung $m=\sqrt{\frac{p}{3}}$ wegschaffen, haben wir $y^6+\frac{qy^3}{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}+1=0.$

Im vorliegenden Fall aber ist t in der Gleichung (2) imaginär, d. h. $(\frac{1}{2}q)^2<(\frac{1}{3}p)^3$; man kann daher einen Bogen φ finden, dessen Cosinus die Hälfte des Faktors von y^3 beträgt, weil diese Hälfte <1 ist: also

$$\cos\varphi=\frac{-q}{2.\frac{1}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}}\ \ldots\ (7).$$

Die vorgelegte Gleichung, auf diese Weise in unser erstes Trinom verwandelt, wird durch $y^2-2y\cos\frac{1}{3}\varphi+1=0$ theilbar sein. Die letztere durch y dividirt, gibt $y+y^{-1}=2\cos\frac{1}{3}\varphi$; und da $x=m(y+y^{-1})$ ist, so hat man

$$x=2\sqrt{(\tfrac{1}{3}p)}.\cos\tfrac{1}{3}\varphi\ \ldots\ (8).$$

Der Bogen wird mittelst einer logarithmischen Berechnung bestimmt; von demselben nimmt man das Drittel, zu dem 120^0 und 240^0 nach und nach hinzugefügt werden, weil man außer dem in den Tafeln befindlichen Bogen, noch die Bogen $\varphi+2\pi$, $\varphi+4\pi$, welche den nämlichen Cosinus haben, wählen kann. Die Gleichung (8), in welcher $\cos\frac{1}{3}\varphi$ drei Werthe erhält, wird die drei reellen Wurzeln bestimmen.

Beispiele. I. Um die Gleichung $x^3-5x-3=0$ aufzulösen, hat man $p=5$, $q=-3$, $\cos\varphi=\frac{3}{2.\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}}$. Man findet $\varphi=45^0\,48'\,9''$, dessen dritter Theil $15^0\,16'\,3''$ macht. Man addirt 120^0 und 240^0, und nimmt davon die Cosinus, nämlich

$$\cos 15^0\,16'\,3'',\ -\sin 45^0\,16'\,3'',\ -\cos 75^0\,16'\,3''.$$

Daraus ergeben sich die gesuchten Wurzeln nach (8):

$$x = 2,490862; -1,834245; -0,6566166.$$

Für die Gleichung $x^3 - 5x + 3 = 0$ reicht es hin, x mit $-x$ zu vertauschen. Man erhält auf diese Art die vorhergehende Gleichung wieder, woraus man die nämlichen Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen folgert.

II. Für die Gleichung $x^3 - 4x + 1 = 0$ ist $\cos\varphi = \frac{-1}{2.\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}}$, mithin $\varphi = 108^0\, 57'\, 3'', 5$. Man findet endlich

$$x = 1,860807\ldots, -2,114907\ldots, 0,254099\ldots$$

Gleichungen des vierten Grades.

§. 121. Um die Gleichung $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ aufzulösen, wollen wir denselben Gang wie bei der cubischen verfolgen; wir betrachten demnach x als aus zwei Theilen bestehend, in der Art, daß $x = y + z$. Die Substitution in die vorgelegte Gleichung, gibt

$$y^4 + (6z^2 + p)y^2 + (z^4 + pz^2 + qz + r) + 4zy^3 + (4z^3 + 2pz + q)y = 0.$$

Da wir eine beliebige Beziehung zwischen y und z aufstellen können, so setzen wir die Gesammtheit der Glieder, in denen die ungeraden Potenzen von y vorkommen, gleich Null. Wir haben dadurch

$$y^2 = -z^2 - \frac{p}{2} - \frac{q}{4z}\ldots (1).$$

Indem wir y^2 und y4 eliminiren, entsteht die transformirte Gleichung

$$z^6 + \tfrac{1}{2}pz^4 + \tfrac{1}{16}(p^2 - 4r)z^2 - \tfrac{1}{64}q^2 = 0,$$

in welcher sich nur gerade Potenzen von z vorfinden. Machen wir daher $z^2 = \frac{1}{4}t$, so erhalten wir die einfachere cubische Gleichung

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0\ldots (A),$$

welche die reducirte heißt, und wenigstens eine reelle, positive Wurzel besitzen muß. Bezeichnen wir diese Wurzel durch t, so haben wir $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{t}$, wo das Zeichen willkührlich ist. Substituiren wir diesen Werth in $x = y + z$, und in die Gleichung (1), so kommt

$$x = y \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{t},\; y^2 = \tfrac{1}{4}\left(-t - 2p \mp \frac{2q}{\sqrt{t}}\right)\ldots (2)$$

Indem wir auf die entsprechenden Zeichen Rücksicht nehmen, und y eliminiren, finden wir endlich

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\sqrt{t}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-t-2p-\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)} \\ x=-\frac{1}{2}\sqrt{t}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-t-2p+\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)} \end{array}\right\}\ldots(B)$$

Man löst also die reducirte Gleichung (A) auf, nimmt eine positive Wurzel t daraus, und substituirt solche in die Formeln (B), welche dann die vier Werthe von x geben werden.

Anmerkungen. 1) Wollen wir in der reducirten Gleichung (A) das zweite Glied wegschaffen, so setzen wir $t=\frac{1}{3}(u-2p)$, wodurch wir erhalten

$$u^3-3u(p^2+12)+12pr-2p^3-27q^2=0.$$

2) Die erste Regel zur Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade gab der Italiener Bombelli; Erfinder derselben war jedoch Ferrari aus Bologna. Von den verschiedenen Auflösungen, welche nachher von Descartes, Euler und andern angegeben worden sind, rührt die hier vorgetragene im Wesentlichen von Pilatte her, Professor der Mathematik zu Angers.

Beispiele. I. Für die Gleichung $2x^4-19x^2+24x=\frac{23}{8}$ hat man $p=-\frac{19}{2}$, $q=12$, $r=-\frac{23}{16}$; die reducirte Gleichung ist also

$$t^3-19t^2+96t=144.$$

Die eine Wurzel $t=3$ gibt

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\sqrt{(4-2\sqrt{3})},\quad x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\sqrt{(4+2\sqrt{3})}.$$

Wegen $\sqrt{(4\pm2\sqrt{3})}=1\pm\sqrt{3}$) §. 114) kommt

$$x=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad x=-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

II. Die Gleichung $x^4-25x^2+60x-36=0$ hat zur reducirten

$$t^3-50t^2+769t=3600.$$

Nehmen wir $t=9$, so haben wir $x=3, 2, 1$ und -6.

III. Für die Gleichung $x^4-x+1=0$ erhält man $t^3-4t=1$, woraus $t=2,114907\ldots$; mithin

$$x=-0,7271360\pm0,934099\sqrt{-1},$$
$$x=+0,727136\pm0,4300139\sqrt{-1}.$$

IV. Die Gleichung $x^4-3x^2-42x=40$ gibt

$$t^3-6t^2+169t=1764.\ \text{Daraus}$$
$$t=9,\ \text{endlich}\ x=4,\ -1\ \text{und}\ \tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{-31}).$$

§. 122. Nähme man für t irgend eine andere Wurzel der reducirten Gleichung, so würde man keine verschiedenen Werthe für x erhalten; man zieht die positive Wurzel t den beiden andern t' und t'' deßhalb vor, weil die Rechnung dadurch bequemer wird. Um dieß nachzuweisen, wollen wir die Werthe (B) durch die drei Wurzeln der reducirten Gleichung ausdrücken. Man hat

$$t+t'+t''=-2p,\ t\cdot t'\cdot t''=q^2$$

die erste gibt $t'+t''=-2p-t$,

die zweite $\sqrt{t'\,t''}=\dfrac{q}{\sqrt{t}}\ \ldots$ (3).

Hieraus $x=\frac{1}{2}\sqrt{t}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}t'+\frac{1}{4}t''-\frac{1}{2}\sqrt{t't''})}$,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{oder} & x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{t}\pm\sqrt{t'}\mp\sqrt{t''}),\\ \text{ferner ebenso} & x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{t}\pm\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}).\end{array}\right\}\ \ldots (4)!$$

Diese Gleichungen sind nur gültig, so lange q positiv ist. Denn man muß bemerken, daß die reducirte Gleichung, welche nicht q, sondern bloß q^2 enthält, der vorgelegten entspricht, welches Zeichen q auch haben mag, wiewohl die Wurzeln von x für $+q$ und $-q$ verschieden sind. In den Gleichungen (B) aber, in welche man den Werth von q mit seinem gehörigen Zeichen zu substituiren hat, wird dieser Umstand die jedesmalige Beschaffenheit der gegebenen Größen wieder herstellen. Dasselbe findet jedoch in den Gleichungen (4), wo q nicht vorkommt, nicht mehr statt. Man muß demnach auf das Zeichen von q in der Gleichung (3) Rücksicht nehmen, und $\sqrt{t}$ mit $-\sqrt{t}$ vertauschen, wenn q negativ ist, damit beide Glieder einerlei Zeichen haben, wobei die Wurzelgrößen beiderseits das Zeichen $\pm$ bekommen müssen. Ist folglich q negativ, so muß man $\sqrt{(t't'')}=-\dfrac{q}{\sqrt{t}}$ setzen; dadurch erhalten die Werthe B die Form

$$\left.\begin{array}{l}x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{t}\pm\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''})\\ x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{t}\pm\sqrt{t'}\mp\sqrt{t''})\end{array}\right\}\ (5)$$

Wir bemerken nun, daß in dem einen und dem andern Falle die Gleichungen (4) und (5) in Bezug auf t, t' und t'' symmetrisch sind, d. h. die vier nämlichen Werthe ergeben sich aus diesen Ausdrücken, wenn man darin die Buchstaben gegenseitig unter einander verwechselt. Die Gleichungen (4) und (5) bloß der Form nach von den Gleichungen (B) verschieden, werden mithin nur 4 Wurzeln liefern.

Die Formeln (4) und (5) sind übrigens mehr geeignet, durch sie die Natur der Wurzeln näher kennen zu lernen.

1) Wenn die reducirte Gleichung lauter reelle Wurzeln besitzt, so können nur zwei Fälle stattfinden; entweder hat sie drei positive, oder eine positive und zwei negative, da das Produkt derselben $t \cdot t' \cdot t'' = q^2$, wesentlich positiv ist. Im ersten Falle sind $\sqrt{t}, \sqrt{t'}\, \sqrt{t''}$ reell, mithin sind es auch die vier Wurzeln von x. Im zweiten Falle dagegen sind $\sqrt{t'}$ und $\sqrt{t''}$ imaginär, also auch die vier Wurzeln von x. Gehört folglich die reducirte Gleichung zu dem reductibeln Fall, so sind die 4 Wurzeln reell oder imaginär, je nachdem t drei positive Werthe oder einen einzigen zuläßt. Beispiele hierüber finden sich im vorhergehenden Paragraphen.

Ereignet es sich indessen, daß $t' = t''$ ist; dann werden in zwei Werthen von x, welche die Differenz der Wurzelausdrücke $\sqrt{t'}, \sqrt{t''}$ enthalten, die imaginären Größen sich gegen einander aufheben, wodurch dann zwei Wurzeln reell und gleich, und die beiden anderen imaginär ausfallen.

2) Wenn die reducirte Gleichung nur eine reelle Wurzel t hat, so wird $\sqrt{t}$ reell, weil t nothwendigerweise positiv ist. Die Wurzeln t' und t'' sind von der Form $a \pm b\sqrt{-1}$. Hieraus

$$\sqrt{t'} \pm \sqrt{t''} = \sqrt{(a + b\sqrt{-1})} \pm \sqrt{(a - b\sqrt{-1})};$$

das Quadrat davon ist

$$(\sqrt{t'} \pm \sqrt{t''})^2 = 2a \pm 2\sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

Die letzte Wurzelgröße ist offenbar reell und $> a$; unser Quadrat hat daher zwei reelle Werthe, nämlich einen positiven und einen negativen. Durch Ausziehung der Quadratwurzel, wodurch $\sqrt{t'} \pm \sqrt{t''}$ entsteht, erhält man also einen reellen Ausdruck $\sqrt{A}$ einerseits, und einen imaginären $\sqrt{(-B)}$ andrerseits. Kehren wir zu den obigen

Werthen von x zurück, so erhellet, daß die vorgelegte Gleichung zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln besitzt, wenn die reducirte eine einzige reelle t hat.

Anmerkung. Wer über das, in diesem und zum Theil auch in dem nächstfolgenden Kapitel Enthaltene, anderweitige Schriften zu lesen wünscht, den verweisen wir auf nachstehende Werke:

1) Den ersten Theil von Eulers vollständiger Anleitung zur niederen und höheren Algebra, nach der französischen Ausgabe von Lagrange, mit Zusätzen und Anmerkungen von J. Ph. Grüson. 2 Thl. Berlin, bei Lagarde.

2) Den zweiten Theil von Lacroix's Anfangsgründe der Algebra; aus dem Französischen übersetzt von E. Hahn. Berlin, bei Frölich.

3) Das schon erwähnte treffliche Werk von Lagrange über die Auflösungen numerischer Gleichungen; ins Deutsche übertragen von A. L. Crelle. Berlin, bei Reimer.

4) Theorie der algebraischen Gleichungen von Meier Hirsch. Erster Theil. Berlin, bei Duncker und Humblot.

Viertes Kapitel.

Von den symmetrischen Funktionen.

Summe von den verschiedenen Potenzen der Wurzeln einer Gleichung.

§. 123. Eine Funktion mehrerer Größen wird eine symmetrische genannt, wenn sie bei jeder beliebigen gegenseitigen Verwechslung dieser Größen genau die vorige bleibt. Dergleichen Funktionen sind a^2+b^2, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a+b+\sin a \sin b$, $a^2b^3+a^3b^2$, in welchen keine Aenderung vorgeht, wenn man b mit a und a mit b vertauscht. Die Coefficienten der verschiedenen Glieder einer Gleichung $fx=0$

werden also symmetrische Funktionen von ihren Wurzeln $a, b, c \ldots$ sein (§. 31).

Wir wollen in der Folge durch das Symbol $[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots]$ die symmetrischen Funktionen darstellen, wovon $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ ein Glied ist, und deren andere Glieder dadurch erhalten werden, daß man jeden Buchstaben $a, b, c \ldots$ nach und nach in alle andere umändert. Die Summe der $m$ten Potenzen jener Wurzeln wollen wir ferner durch S_m andeuten, so daß $S_m = a^m + b^m + c^m + \ldots$ Ohne diese Wurzeln zu kennen, lassen sich nun die Größen S_m und $[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots]$, welche ganzzahlige Werthe auch $m, \alpha, \beta, \gamma \ldots$ haben mögen, durch die Coefficienten $p. q \ldots$ der vorgelegten Gleichung

$$fx = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + tx + u = 0$$

ausdrücken. Das ursprüngliche Polynom fx ist mit $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, und das derivirte $f'x$ mit

$$mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + \ldots + t = (x-b)(x-c)\ldots + (x-a)(x-c)\ldots$$

gleichbedeutend. Indem das erste durch das zweite dividirt wird, entsteht

$$\frac{mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} \ldots + t}{x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + u} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \ldots\ldots$$

Die Entwickelung von $(x-a)^{-1}$ gibt aber

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \frac{a^3}{x^4} + \ldots$$

Wir ändern jetzt a in $b, c \ldots$ um, und nehmen alsdann die Summe sämmtlicher auf diese Weise erhaltenen Resultate. Das zweite Glied unserer obigen Gleichung verwandelt sich dadurch in

$$\frac{m}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \frac{S_3}{x^4} \ldots$$

Indem wir das Ganze mit $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots$ multiplicieren, kommt $mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + \ldots + t =$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
mx^{m-1} + S_1 & x^{m-2} + S_2 & x^{m-3} + S_3 & x^{m-4} + \ldots + S_l & x^{m-l-1} \;\ldots \\
+mp & +pS_1 & +pS_2 & +pS_{l-1} & + \ldots \\
 & +mq & +qS_1 & +qS_{l-2} & \ldots \\
 & & +mr & +rS_{l-3} & \ldots
\end{array}$$

Der erste Theil enthält m Glieder, während der zweite ins Unendliche fortgeht; in jeder der (m+1) Linien steht das erste Glied um eine Stelle weiter nach der Rechten als in der unmittelbar voranstehenden Linie. Die vergleichende Zusammenstellung der nämlichen Potenzen von x in diesem identischen Ausdrucke liefert eine unendliche Anzahl von Gleichungen. Bei den m ersten derselben hat jede nächstfolgende ein Glied mehr als die nächstvorhergehende; sie sind, wenn man beiderseits mp, mq... wegläßt, folgende:

$$S_1+p=0,\ S_2+pS_1+2q=0,\ S_3+pS_2+qS_1+3r=0,\ \ldots$$
$$S_k+pS_{k-1}+qS_{k-2}+rS_{k-3}+\ldots+kv=0\ldots\ (A),$$

wo v den Coefficienten von x^{m-k} in fx bezeichnet, so lange $k<m$ ist. Geht man über diese m Gleichungen hinaus, so ist in dem ersten Theil kein Glied mehr vorhanden, welches mit denen des zweiten Theils vergleichbar wäre, und man findet

$$S_l+pS_{l-1}+qS_{l-2}+rS_{l-3}\ldots\ldots+uS_{l-m}=0\ \ldots\ldots (B),$$

wo die ganze Zahl $l>$ oder $=m$ ist. Man hat ferner

$$S_0=a^0+b^0\ldots=m.$$

§. 124. Die oben mitgetheilten Formeln rühren von Newton her, und lassen sich, wie folgt, gebrauchen.

Die erste gibt $S_1=-p$; die zweite nach Einführung des Werthes von S_1, bestimmt S_2; hierauf bekommt man den Werth von S_3 u. s. f. Im Allgemeinen führt der Ausdruck von S_l zur folgenden Regel: Um irgend ein Glied S_l zu erhalten, schreibe man unter die m Glieder, welche in der Reihe der S dem zu berechnenden S_l unmittelbar vorhergehen, die Coefficienten von fx in umgekehrter Ordnung und mit entgegengesetzten Zeichen; multiplicire alsdann je zwei untereinander befindliche Glieder, und addire die auf diese Weise gefundenen Resultate. Die Darstellung wäre hiernach:

$$\begin{array}{lllllll} S_{l-m}, & S_{l-(m-1)}, & S_{l-(m-2)} & \ldots & S_{l-3}, & S_{l-2}, & S_{l-1} \\ -u, & -t, & -s & & -v, & -q, & -p. \end{array}$$

Es ist also leicht, die Summe aller ganzen Potenzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, ohne die Wurzeln selbst zu kennen.

Wenden wir unsern Satz auf $x^m-1=0$ an, so haben wir $S_1=S_2=S_3\ldots=0$, $S_m=S_{2m}=\ldots m$, was schon früher gefunden wurde (§. 109).

Handelte es sich um negative Potenzen der Wurzeln, so würde man x mit $\frac{1}{y}$ vertauschen, und unsere Formeln auf die transformirte Gleichung in y anwenden, um die verlangten Summen zu erhalten.

Anmerkungen. 1) Will man die Summe von den Potenzen der Wurzeln unmittelbar durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken, so erhält man nach und nach aus (A):

$$S_1 = -p;\ S_2 = p^2 - 2q;\ S_3 = -p^3 + 3pq - 3r;$$
$$S_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr - 4s; \text{ u. s. w.}$$

2) Die für die Summe der negativen Potenzen gefundenen Gleichungen sind:

$$S_{-1} + \frac{t}{u} = 0;\ S_{-2} + \frac{t}{u}\ S_{-1} + 2\ \frac{s}{u} = 0.$$

Beispiele. I. Für die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ ist $p = -3$, $q = 2$, $r = -1$; die Faktoren sind demnach 1, —2 und 3. Man findet zuvörderst $S_0 = 3$, $S_1 = 3$, $S_2 = 5$. Die Reihe der S wird weiter fortgesetzt, indem jedes Glied aus dem Produkt der drei nächst vorhergehenden, beziehungsweise mit 1, — 2 und 3 multiplicirt, gebildet wird.

Hiernach steht folgende Reihe der S:

3, 3, 5, 12, 29, 68, 158, 367, 853, 1983, 4610, 10717, 24914, 57918 u. s. f.

II. Für die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 12x = 4$ sind 4, — 12 und 3 die Faktoren. Man erhält für die S die Reihe:

3, 3, —15, —69, —15, 723, 2073, —2517, —29535 . . .

III. In der Gleichung $x^3 - 2x = 5$ sind 5, 2 und 0 die Multiplicatoren. Man findet für die S die Reihe:

3, 0, 4, 15, 8, 50, 91, 140, 432 . . .

IV. Um die Summe der negativen Potenzen der Wurzeln von $x^3 - 3x^2 + 2x = 1$ zu finden, suche man vorerst die Faktoren der transformirten Gleichung; dieselben sind 1, — 3 und 2. Die Summen der negativen Potenzen bilden hiernach die Reihe

3, 2, —2, —7, —6, 7, 25, 23, —22, —88 . . .

§. 125. Wir wollen nun jede symmetrische Funktion $[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots]$ vermittelst der Größen S_1, S_2, S_3 . . . darzustellen suchen, wobei n die Anzahl der in jedem Gliede vorkommenden Wurzeln ist. Die fragliche Funktion wird gefunden, wenn man die m Buchstaben a, b, c....

auf alle mögliche Weisen zu je n permutirt, und dem ersten Buchstaben den Exponenten α, dem zweiten den Exponenten β, u. s. f. gibt. Die Anzahl dieser Glieder ist daher $[mPn]=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$. Wären indessen zwei Exponenten α, β, einander gleich, so würde die Anzahl der Glieder nur die Hälfte von den durch die Formel ausgedrückten betragen; die wirkliche Anzahl würde nur den 6ten Theil davon ausmachen, wenn drei Exponenten gleich wären.

Um den Werth von $[a^\alpha b^\beta]$ zu erhalten, bei welchem Ausdrucke in den Gliedern nur zwei von den m Wurzeln vorkommen, multipliciren wir

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha \ldots \text{ durch } S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta \ldots$$

Erscheint in den Partialfaktoren die nämliche Wurzel, so ist das Partialprodukt von der Form $a^{\alpha+\beta}$, sonst hat dasselbe die Gestalt $a^\alpha b^\beta$. Das Resultat wird folglich $S_{\alpha+\beta}+[a^\alpha b^\beta]$ sein, woraus

$$[a^\alpha b^\beta] = S_\alpha \times S_\beta - S_{\alpha+\beta} \ldots (C).$$

Multipliziren wir die letzt gefundene Gleichung mit S_γ, so wird man haben

$$(a^\alpha b^\beta + a^\alpha c^\beta + b^\alpha c^\beta \ldots)(a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma \ldots) = S_\alpha \times S_\beta \times S_\gamma - S_{\alpha+\beta} \times S_\gamma.$$

Im ersten Theile dieser Gleichung wird das Partialprodukt, wenn die Partialfaktoren keine gemeinschaftliche Wurzel besitzen, von der Form, $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ sein; die Summe von dergleichen Resultaten bilden die Funktion $[a^\alpha b^\beta c^\gamma]$, deren Werth wir bestimmen wollen. Haben dagegen die Partialfaktoren eine gemeinschaftliche Wurzel, so ist $a^{\alpha+\gamma} b^\beta$ oder $a^\alpha b^{\beta+\gamma}$ die Form eines solchen Gliedes, je nachdem diese Wurzel als erster oder zweiter Faktor erscheint. Die in dem ersten Theile unserer Gleichung vorkommenden symmetrischen Funktionen lassen sich nach der Formel (C) ordnungsweise durch folgende Ausdrücke darstellen:

$$S_{\alpha+\gamma} \times S_\beta - S_{\alpha+\beta+\gamma},\quad S_\alpha \times S_{\beta+\gamma} - S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Hieraus ergibt sich

$$[a^\alpha b^\beta c^\gamma] = S_\alpha \cdot S_\beta \cdot S_\gamma - S_{\alpha+\beta} \cdot S_\gamma - S_{\alpha+\gamma} \cdot S_\beta -$$
$$S_{\beta+\gamma} \cdot S_\alpha + 2S_{\alpha+\beta+\gamma} \ldots (D).$$

Das Verfahren, dessen wir uns zur Entdeckung der beiden vorhergehenden Gleichungen bedienten, ist leicht zu begreifen, und ganz allgemein; und man kann, wenn mit der Multiplikation so weiter fortgefahren wird, für jede symmetrische Funktion von der Form $[a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots]$ eine Formel finden. Man ist also jederzeit im Stande, dergleichen symmetrische Funktionen durch die bloßen Coefficienten der gegebenen Gleichungen auszudrücken, weil sich die Potenzsummen $S_1\, S_2 \ldots$ vermittelst jener Coefficienten, wie hier oben gezeigt worden, darstellen lassen.

Die gebrochenen symmetrischen Funktionen erfordern keine besondere Betrachtung; denn sie geben, nachdem sie auf einerlei Nenner gebracht worden, einen Bruch, dessen beide Glieder ganze und symmetrische Funktionen sind. So z. B. führt die Funktion

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \text{ auf } \frac{[a^2b]}{abc}.$$

Anmerkungen. 1) Die Wurzelexponenten $\alpha, \beta \ldots$ in den Formeln (C) und (D) können übrigens sowohl positiv als negativ sein. Für α negativ hat man

$$[a^{-\alpha} b^\beta] = S_{-\alpha} \times S_\beta - S_{\beta-\alpha}.$$

Für α und β zugleich negativ hat man

$$[a^{-\alpha} b^{-\beta}] = S_{-\alpha} \times S_{-\beta} - S_{-\beta-\alpha}.$$

Es lassen sich mithin die Werthe der Ausdrücke von der Form

$$\frac{b^\beta}{a^\alpha} + \frac{a^\beta}{b^\alpha} + \frac{c^\beta}{a^\alpha} + \frac{a^\beta}{c^\alpha} + \ldots, \text{ und}$$

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} + \frac{1}{a^\beta b^\alpha} + \frac{1}{a^\alpha c^\beta} + \frac{1}{a^\beta c^\alpha} \ldots$$

aus den Coefficienten der Gleichung bestimmen, ohne die Wurzeln a, b, c ... zu kennen, indem die Summen der Potenzen für negative Exponenten gleichfalls durch jene Coefficienten dargestellt werden können.

2) Sind die Wurzelexponenten $\alpha, \beta \ldots$ in den Formeln (C) und (D) nicht alle von einander verschieden, so müssen die Formeln eine Modification erleiden. Ist nämlich $\alpha = \beta$, in (C), so werden in $[a^\alpha b^\beta]$ je zwei Glieder wie $a^\alpha b^\beta$ und $b^\alpha a^\beta$ einander gleich. Dadurch entsteht

$$[a^{\alpha} b^{\alpha}] = \frac{(S_{\alpha})^2 - S_{2\alpha}}{2}.$$

Ebenso erhält man aus (D), wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist,

$$[a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\alpha}] = \frac{(S_{\alpha})^3 - 3S_{2\alpha}S_{\alpha} + 2S_{3\alpha}}{2 \cdot 3}, \text{ weil in } [a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}]$$

jedes Glied dann sechsmal wiederholt vorkommt. Ueberhaupt wird in dem Summenausdruck $[abc \ldots]$, wenn r Wurzelexponenten darin einander gleich sind, jedes Glied so oft wiederholt, als sich r Größen versetzen laßen, nämlich $1.2\ldots(r-1)$ $\times r$mal, weshalb diese Funktion den Faktor $1.2 \ldots (r-1)r$ erhält.

Numerische Auflösung der Gleichungen.

§. 126. Wir wollen jetzt zu einigen Anwendungen der vorhergehenden allgemeinen Principien schreiten.

Je größer a in Bezug auf die übrigen Wurzeln b, c, d .... ist, desto mehr strebt S_k dem Gliede a^k und S_{k-1} dem Gliede a^{k-1} gleich zu werden, wobei übrigens diese Summen S als bekannt anzusehen sind. Hat man daher die Reihe der Zahlen $S_0, S_1, S_2 \ldots$ gebildet, so wird der Quotient aus jedem Gliede derselben durch das ihm vorhergehende, der obersten Wurzel desto näher kommen, je höher der Wurzelexponent k ist.

Ebenso wird der Quotient $\frac{S_{-(k-1)}}{S_{-k}}\ldots$ dem Werthe der untersten Wurzel in dem Maß näher rücken, als diese Glieder sich von dem Anfange der Reihe entfernen.

Durch die imaginären Wurzeln kann dieser Satz übrigens eine Modification erleiden. Es sei nämlich $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. Setzen wir $\alpha = \lambda \cos \varphi$, $\beta = \lambda \sin \varphi$, was stets erlaubt ist; so haben wir $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$, aus welchen Gleichungen sich λ und der Bogen φ in allen Fällen bestimmen lassen. Hiernach hat man

$$x = \lambda(\cos \varphi \pm \sin \varphi\sqrt{-1}), \text{ woraus}$$
$$(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})^k = \lambda^k (\cos k\varphi \pm \sin k\varphi\sqrt{-1}). \text{ (§. 110).}$$

Unsere zwei angenommenen imaginären Wurzelwerthe bringen demnach in S_k das Glied $2\lambda^k \cos k\varphi$ mit sich; woraus hervorgeht,

daß λ oder $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ kleiner als die größte Wurzel a sein muß, wenn der oben erwähnte Lehrsatz auch hier seine Anwendung finden soll. Für das erste Beispiel im §. 124, hat man $S_{13}=57918$, $S_{12}=24914$; der Quotient $\frac{57918}{24914}=2{,}3247177$ ist ein Näherungswerth von x.

§. 127. Wir wollen nun die Gleichung der quadrirten Differenzen

$$Fz=z^n+Pz^{n-1}+Qz^{n-2}\ldots+U=0$$

aufsuchen, in welcher P, Q, ... U die zu bestimmenden Coefficienten sind. Wir haben

$$(x-a)^l=x^l-lax^{l-1}+A'a^2x^{l-2}-A''a^3x^{l-3}\ldots\pm a^l,$$
$$(x-b)^l=x^l-lbx^{l-1}+A'b^2x^{l-2}-A''b^3x^{l-3}\ldots\pm b^l,$$
$$(x-c)^l=x^l-lcx^{l-1}+A'c^2x^{l-2}-\ldots\ldots\ldots\pm c^l;\ \text{u. s. f.}$$

In diesen Gleichungen, deren Zahl sich auf m beläuft, sind l, A', A''... die Binomialcoefficienten für die lte Potenz. Durch Addition verwandelt sich der zweite Theil in

$$mx^l-lS_1x^{l-1}+A'S_2x^{l-2}-A''S_3x^{l-3}\ldots\pm S_l.$$

Aendern wir nach und nach x in a, b, c ... um, so kommt

$$(a-b)^l+(a-c)^l\ldots=ma^l-lS_1a^{l-1}+\ldots\pm S_l$$
$$(b-a)^l+(b-c)^l\ldots=mb^l-lS_1b^{l-1}+\ldots\pm S_l\ \text{u. s. f.}$$

Indem wir alle diese Gleichungen zu einander addiren, stellt der erste Theil des Resultates die Summe der lten Potenzen der Differenzen aus je zwei Wurzeln dar, während der zweite Theil in

$$mS_l-lS_1S_{l-1}+A'S_2S_{l-2}-A''S_3S_{l-3}+\ldots\pm mS_l$$

übergeht.

Wenn l ungerade ist, so läßt sich aus dieser Formel nichts herleiten; denn im ersten Theil sind dann die Differenzen je zwei einander gleich und mit entgegengesetzten Zeichen behaftet, weßhalb ihre lten Potenzen sich gegenseitig aufheben. Der zweite Theil, dessen gleichweit von den äußersten entfernte Glieder einerlei Coefficienten und Wurzelexponenten haben, und überdieß mit verschiedenen Vorzeichen versehen sind, reducirt sich offenbar auf Null. Ist aber l gerade, so sind die Größen $(a-b)^l$, $(b-a)^l$ ... je zwei einander gleich, und jedes Glied kommt im ersten Theil zweimal vor; dabei sind die Glieder des zweiten Theils ebenfalls je zwei einander

gleich, und mit einerlei Zeichen behaftet, weßhalb auch hier jedes Glied doppelt erscheint, mit Ausnahme des mittlern, was nur einmal vorkommt. Nehmen wir mithin auf beiden Seiten die Hälfte, so findet sich jedes Glied nur einmal vor, wobei nicht zu vergessen ist, das mittlere auf seine Hälfte zu reduciren. Indem wir also einerseits $l=2i$ setzen, verwandelt sich der erste Theil in die Summe der $2i$ten Potenzen von den Differenzen der Wurzeln, oder in die der $i$ten Potenzen der Quadrate dieser Differenzen, welche Summe wir durch $\mathfrak{s}i$ bezeichnen wollen. Andrerseits kommen außer den Potenzsummen der Wurzeln noch die Binomialcoefficienten für den Exponenten $2i$ zum Vorschein.

Hiernach steht (§. 3):

$$\mathfrak{s}i = mS_{2i} - 2iS_i\, S_{2i-1} + A'S_2S_{(2i-2)} - A''S_3S_{(2i-3)} \ldots$$

$$\pm \frac{1}{2}\,\frac{2i(2i-1)(2i-2)\ldots(i+1)}{2\cdot 3.4\ldots 2i} \times (S_i)^2 \ldots (N).$$

Die Zahlenwerthe der Coefficienten $2i$, A' A'', ... finden sich in der $2i$ten Linie der im §. 3 angegebenen Tabelle; man hält bei dem mittleren Gliede inne, von dem die Hälfte zu nehmen ist. Diese Faktoren sind für

$i=1$ . . . 1, 1
$i=2$ . . . 1, 4, 3
$i=3$ . . . 1, 6, 15, 10
$i=4$ . . . 1, 8, 28, 56, 35
$i=5$ . . . 1, 10, 45, 120, 210, 126
$i=6$ . . , 1, 12, 66, 220, 495, 792, 462, u. s. f.

Hieraus leitet man ab:

$$\mathfrak{s}_1 = mS_2 - (S_1)^2;\ \mathfrak{s}_2 = mS_4 - 4S_1S_3 + 3(S_2)^2;$$
$$\mathfrak{s}_3 = mS_6 - 6S_1S_5 + 15S_2S_4 - 10\,(S_3)^2;$$
$$\mathfrak{s}_4 = mS_8 - 8\,S_1S_7\ \ldots + 35(S_4)^2;$$
$$\mathfrak{s}_5 = mS_{10} - 10S_1S_9\ \ldots - 126(S_5)^2;$$
$$\mathfrak{s}_6 = mS_{12} - 12S_1S_{11}\ \ldots + 462(S_6)^2.$$

Hat man also zuvörderst die Reihe S_0, S_1, S_2... berechnet, so kann man mit Hülfe der Gleichung (N) die Summe $\mathfrak{s}i$ der $i$ten Potenzen von den Wurzeln der Gleichung der quadrirten Differenzen finden; aus den Formeln (A) des Paragraphen 123 lassen sich hierauf die Coefficienten P, Q ... der gesuchten Gleichung $Fz=0$ bestimmen. Man findet so

$P=-s_1$, $Q=-\frac{1}{2}(Ps_1+s_2)$, $R=-\frac{1}{3}(Qs_1+Ps_2+s_3)$, u. s. f.

Da man so viele Gleichungen haben muß, als in der Gleichung $Fz=0$ unbekannte Coefficienten P, Q ... vorkommen, also $n=m\frac{(m-1)}{2}$; so muß man in der Entwickelung von S_1, S_2, S_3 ... bis $S_{(m-1)}$ gehen. Für die Gleichung $x^3+qx+r=0$ sind die S_0, S_1 ... der Ordnung nach:

3, 0, $-2q$, $-3r$, $2q^2$, $5qr$, $-2q^3$, $+3r^2$; woraus
$s_1=-6q$, $s_2=18q^2$, $s_3=-66q^3-81r^2$, ferner
$P=6q$, $Q=9q^2$, $R=27r^2+4q^3$.

Die Gleichung der quadrirten Differenzen für die Gleichung vom dritten Grade ist daher:

$$z^3+6qz^2+9q^2z+27r^2+4q^3=0.$$

Anmerkung. Sollen die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung sämmtlich reell werden, so darf die Gleichung der quadrirten Differenzen nur Zeichenwechsel darbieten; mithin muß $P=6q$, desgleichen $Q=27r^2+4q^3$ negativ sein, d. h. $4q^3>27r^2$, was mit dem im Paragraphen 119 Gesagten ganz übereinstimmt.

Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades.

§. 128. Aus der Gleichung $x^2+px+q=0$, ohne deren Wurzeln a und b zu kennen, die Funktion $z=a+mb$, wo m eine willkührliche Zahl darstellt, zu bestimmen. Da $a+b=-p$ ist, so werden diese beiden Gleichungen a und b geben, wenn man z gefunden hat. Man kann aber jenen Werth von $a+mb$ nicht auffinden, ohne den von $b+ma$ mit zu erhalten. Hieraus folgt, daß z durch diese andere Gleichung vom zweiten Grad

$$[z-(a+mb)][z-(b+ma)]=0$$

gegeben sein wird. Da hiernach z nothwendigerweise von einer Gleichung des zweiten Grades abhängt, so wollen wir wenigstens diese Gleichung auf eine zweigliederige zu bringen suchen. Um diesen Vorsatz auszuführen, setzen wir $m=-1$. Dadurch entsteht

$$z^2=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=S_2-2q.$$

Nun ist $S_2=p^2-2q$, folglich

$$z=a-b=\pm\sqrt{(p^2-4q)}.$$

Aus dieser letzteren Gleichung und der folgenden $a+b=-p$ ergeben sich endlich die beiden Wurzeln a und b.

§. 129. Es seien a, b, c die Wurzeln der Gleichung

$$x^3+px+q=0$$

Wir wollen die Funktion $z=a+mb+nc$ bestimmen, ohne die Wurzeln jener Gleichung zu kennen. Unsere Funktion bietet sechs verschiedene Versetzungen dar, wenn m und n willkührlich bleiben. Da man nun keinen dieser Werthe von z finden kann, ohne die fünf übrigen zugleich damit zu bestimmen; so muß z die Wurzel einer Gleichung vom sechsten Grade sein. Unter den vorgeschriebenen Bedingungen wird man es daher nicht dahin bringen, z eher als x zu erhalten. Nehmen wir indessen an, daß m und n solche Werthe bekommen, damit unsere Gleichung in z nach Art der Gleichungen vom zweiten Grade auflösbar sei, demnach die Form $z^6+Az^3+B=0$ habe; so werden sich bald die Werthe von z, und hierauf die von x bestimmen lassen. In der That setzt man $z^3=u$, so kommt

$$u=-\tfrac{1}{2}A\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2-B)}=z^3 \ldots (1).$$

Macht man zur Abkürzung $z'^3=-\frac{1}{2}A+\sqrt{(\frac{1}{4}A^2+B)}$ und $z''^3=-\frac{1}{2}A-\sqrt{(\frac{1}{4}A^2-B)}$, bezeichnen ferner $1, \alpha, \alpha^2$ die drei Cubikwurzeln der Einheit; so werden die sechs Werthe von z aus dem Trinom $a+mb+nc$ entspringen, wenn man darin die Wurzeln a, b, c unter einander versetzt. Wir machen

$$\begin{array}{r|l} z'=a+mb+nc & z''=a+nb+mc \ldots (2). \\ \alpha z'=b+nc+na & \alpha^2 z''=b+nc+ma \\ \alpha^2 z'=c+ma+nb & \alpha z''=c+na+mb. \end{array}$$

In diesen Ausdrücken ist jeder der gedachten Buchstaben a, b, c um eine Stelle weiter nach der Linken hin, und der erste in die letzte Stelle geschrieben worden. Wir hätten also die willkührlichen Coefficienten m und n in der Art zu bestimmen, daß diesen sechs Gleichungen Genüge geschähe. Multipliciren wir $\alpha z'$ durch α^2, so entsteht, weil $\alpha^3=1$;

$$z'=\alpha^2 b+m\alpha^2 c+n\alpha^2 a=a+mb+nc.$$

Die Identität erfordert, daß die Coefficienten von a, b, c bezüglich einander gleich sind, d. h. $\alpha^2=m$, $m\alpha^2=n$, $n\alpha^2=1$; folglich $m=\alpha^2$, $n=\alpha$. Die Werthe von z' und z'' sind daher

$$z'=a+\alpha c+\alpha^2 b,\ z''=a+\alpha b+\alpha^2 c \ldots (3).$$

Indem wir also $m=\alpha^2, n=\alpha$ nehmen, wird unser Trinom sechs Werthe erhalten, deren Cubus nur zwei verschiedene Größen z'^3, z''^3 bildet; denn multipliciren wir die Gleichungen (3) mit α und α^2, so kommen die sechs Gleichungen (2) zum Vorschein, deren erste Theile offenbar nur z'^3 und z''^3 zum Cubus haben. Hiermit wäre also erwiesen, daß die 6 Werthe von z die Wurzeln einer Gleichung von der Form $z^6+Az^3+B=0$ sind, oder

$$(z^3-z'^3)(z^3-z''^3)=z^6-(z'^3+z''^3)z^3+z'^3z''^3=0.$$

Es bleibt jetzt noch übrig, A und B zu bestimmen, nämlich

$$A=-(z'^3+z''^3),\ B=(z'z'')^3;$$

denn sind A und B einmal vermittelst der Coefficienten p und q ausgedrückt, so gibt die Gleichung (1) die Werthe von z^3, deren Cubikwurzeln z' und z'' man zu finden weiß. Mit Hülfe der Gleichungen (3) lassen sich hierauf a, b, c bestimmen, wie wir nunmehr zeigen wollen.

Bilden wir nämlich den Cubus von $z'=a+\alpha c+\alpha^2 b$, und setzen 1 statt α^3, sobald wir dasselbe antreffen; so finden wir

$$z'^3=S_3+6abc+3\alpha(a^2c+b^2a+c^2b)+3\alpha^2(a^2b+c^2a+b^2c).$$

Indem wir im letztern Ausdruck b mit c vertauschen, erhalten wir z''^3. Durch Addition dieser beiden Resultate entsteht:

$$-A=2S_3-12q+3(\alpha+\alpha^2)[a^2b]=5S_3-12q,$$

wenn man erwägt, daß $abc=-q$, $S_1=0$, $\alpha+\alpha^2=-1$, $[a^2b]=S_1S_2-S_3$ nach Formel (C) (§.125) ist. Erinnert man sich weiter, daß $S_3=-3q$; so kommt $A=27q$.

Ferner ist $z'z''=S_2+(\alpha+\alpha^2)[ab]=-3p$, wenn man berücksichtigt, daß $S_2=-2p$, $[ab]=p$, $\alpha+\alpha^2=-1$; der Cubus von B ist demnach $=-27p^3$. Folglich

$$u=-27[\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3)}]=z^3.$$

Da hier die Faktoren von 27 die Wurzeln t' und t'' der Gleichung $t^2+qt=(\tfrac{1}{3}p)^3$ sind, so hat man $z^3=27t$. Eliminiren wir a, b, c zwischen den Gleichungen (3), und der folgenden $a+b+c=0$, welche von dem fehlenden zweiten Gliede der vorgelegten Gleichung herrührt; so haben wir

$$3a=z'+z'',\ 3b=\alpha z'+\alpha^2 z'',\ 3c=-\alpha^2 z'+\alpha z''.$$

Substituiren wir endlich statt z' und z'' ihre Werthe $3\sqrt[3]{t'}$ und $3\sqrt[3]{t''}$; so finden wir die in §. 116 gegebenen Formeln wieder.

§. 130. Um die Gleichung $x^4+px^2+qx+r=0$ aufzulösen, wollen wir die Werthe der Funktion z von der Form $z=a+lb+mc+nd$ zu bilden suchen. In einer solchen Funktion lassen sich die Buchstaben a, b, c, d auf 24 Arten permutiren, sie wird folglich von einer Gleichung vom vierundzwanzigsten Grad abhängen.

Dagegen liefert die Funktion $z=a+b+m(c+d)$ nur 6 Versetzungen, wovon je zwei sich nur dem Zeichen nach unterscheiden, wenn $m=-1$ ist, so daß die Gleichung, von welcher die Wurzeln $z=a+b-c-d$ abhängen, vom sechsten Grade, und zwar von der Form $z^6+Az^4+Bz^2+C=0$ sein wird, in der nur gerade Potenzen vorkommen, mithin die 6 Werthe nur drei verschiedene Quadrate ausmachen. Setzen wir $z^2=t$, so erhalten wir eine Gleichung vom dritten Grade, aus der wir vorerst t, hierauf z und endlich x bestimmen. Nun ist

$$(a+b-c-d)^2=(a+b+d+c)^2-4(ac+ad+bc+bd).$$

Erwägt man, daß $a+b+c+d=0$, weil in der vorgelegten Gleichung das zweite Glied fehlt, addirt und subtrahirt man überdem $4(ab+cd)$ in dem zweiten Theil; so folgt

$$(a+b-c-d)^2=-4[ab]+4(ab+cd).$$

Man findet auf eben die Art, wenn man berücksichtigt, daß $[ab]=p$,

$$(a+c-b-d)^2=-4p+4(ac+bd),$$
$$(a+d-c-b)^2=-4p+4(ad+bc).$$

Wir hätten hiermit die Werthe unserer drei Quadrate z^2 gebildet. Um die Rechnung mit Leichtigkeit ausführen zu können, wollen wir $u=\frac{1}{4}z^2+p$ als Unbekannte wählen, was folgende Werthe für u geben wird

$$ab+cd,\ ac+bd,\ ad+bc,$$

und die Gleichung aufstellen, von welcher dieselben abhängen. Zieht man in Erwägung, daß

$$S_1=0,\ S_2=-2p,\ S_3=-3q,\ S_4=2p^2-4r,$$
$$S_5=5pq,\ S_6=-2p^3+6pr+3q^2;$$

so findet man nach der Formel (D) (§. 125), wenn gehöriger Weise

mit 2 oder 6 dividirt wird, weil die Wurzelexponenten wiederholt vorkommen:

1) Den Coefficienten des zweiten Gliedes der Gleichung in u, $=[ab]=p$;

2) Den Coefficienten des dritten Gliedes

$$=[a^2bc]=S_4-\tfrac{1}{2}S_2^2=-4r;$$

3) Das letzte Glied in der Gleichung in u

$$=abcd\times S_2+[a^2b^2c^2]=rS_2+\tfrac{1}{8}S_2^3-\tfrac{1}{4}S_4S_2+\tfrac{1}{3}S_6=-4pr+q^2.$$

Die gesuchte Gleichung wird folglich sein

$$u^3-pu^2-4ru+4pr-q^2=0.$$

Setzt man $\frac{1}{4}z^2+p$ statt u, so kommt

$$z^6+8pz^4+16z^2(p^2-4r)-64q^2=0.$$

Sind einmal die drei Werthe von z^2 und ihre Quadratwurzeln $\pm(z, z'$ und $z'')$ bekannt, so muß man a, b, c, d aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$-S_1=a+b+c+d=0,\ a+c-b-d=z',$$
$$a+b-c-d=z,\quad a+d-b-c=z''.$$

Diese Gleichungen zu zwei und zwei addirt, geben $a+b=\frac{1}{2}z$, $a+c=\frac{1}{2}z'$, $a+d=\frac{1}{2}z''$, deren Summe $a=\frac{1}{4}(z+z'+z'')$ ist; hierauf erhält man b, c und d. Da z, z', z'' mit dem Zeichen $\pm$ behaftet sind, so findet man 8 Wurzeln statt 4. Diese Zweideutigkeit rührt daher, daß die Gleichung in z nur das Quadrat von q enthält. Die gefundenen Wurzeln müssen aber beiden Fällen, nämlich sowohl dem, wo q negativ ist, als dem, wo q positiv ist, Genüge thun; es werden mithin unsere acht Werthe zusammengenommen die Wurzeln folgender zwei Gleichungen

$$x^4+px^2+qx+r=0,\ x^4+px^2-qx+r=0$$

sein, welche nur hinsichtlich des Zeichens von q verschieden sind.

Multiplicirt man die drei obenstehenden Gleichungen miteinander, so kommt, wenn man sich erinnert, daß $-a=b+c+d$:

$$\tfrac{1}{8}z\,z'\,z''=a^3+a^2(b+c+d)+[abc]=-q,$$

woraus zu ersehen ist, daß das Zeichen des Produktes z, z', z'' dem von q entgegengesetzt sein muß. Hiernach ergeben sich folgende zwei Systeme:

für q positiv, $x=\frac{1}{4}(z\pm z'\mp z'')$ und $\frac{1}{4}(-z\pm z'\pm z'')$;

für q negativ, $x=\frac{1}{4}(z\pm z'\pm z'')$ und $\frac{1}{4}(-z\mp z'\pm z'')$,

was mit dem im §. 121 Gesagten vollkommen übereinstimmt.

Elimination zwischen zwei Gleichungen.

§. 131. Es seien $Z=0$, oder $kx^m+px^{m-1}+\ldots\ldots+u=0$, und
$T=0$, oder $k'x^n+p'x^{n-1}+\ldots\ldots+u'=0$

zwei Gleichungen zwischen x und y, wo die Coefficienten $p, q, p', q'\ldots$ lauter rationale ganze Funktionen von y sind. Stellt man sich die zweite Gleichung in Bezug auf x aufgelöst vor, nämlich $x=a, b, c\ldots$; so kann man diese Werthe, welche Funktionen von y sind, in $Z=0$ substituiren, woraus dann ebensoviele, bloß y enthaltende Gleichungen $A=0$, $B=0$, $C=0$, ... entstehen. Ist die erste derselben aufgelöst, so werden die Werthe $x=\alpha, \alpha', \alpha''$, ... in $x=a$ eingeführt, die entsprechenden Werthe $\beta, \beta', \beta''\ldots$ von x bestimmen; hieraus ergeben sich dann die zusammengehörigen Paare $(\alpha,\beta), (\alpha',\beta')\ldots$ welche Z und T gleichzeitig zum Verschwinden bringen. Dasselbe gilt für $B=0$ und $x=b$, $C=0$ und $x=c$, u. s. w.

Alle diese besonderen Gleichungen müssen in der Endgleichung zugleich begriffen sein, was dadurch geschieht, daß man das Produkt derselben gleich Null setzt. Es handelt sich nur darum, das Resultat $ABC\ldots$ darzustellen. Da nun das fragliche Produkt sich nicht ändern darf, wenn man a mit b, c ... vertauscht; so werden die Coefficienten symmetrische Funktionen von diesen Buchstaben sein, welche als Wurzelwerthe der in Rücksicht auf x aufgelösten Gleichung $T=0$ zu betrachten sind. Jene Coefficienten lassen sich daher durch die aus $T=0$ hergeleiteten Größen $S_1, S_2, S_3\ldots$ ausdrücken, d. h. durch die Coefficienten von T, in denen nur y vorkommt. Auf solche Weise wäre das Produkt zuvörderst von x, hierauf von a, b, c ... befreit worden, mithin enthielte es nur noch die Unbekannte y.

Um also die gesuchte Finalgleichung zu erhalten, substituire man nach und nach statt x in $Z=0$ die Buchstaben a, b, c..., deren Anzahl n gleich dem Grade von x in T ist; hierauf multiplicire man die so entstandenen Polynome mit einander, die Coefficienten des Produktes werden dann lauter symmetrische Funktionen von a, b. c... sein; man leite ferner aus $T=0$ die Werthe von $S_1, S_2\ldots$ in y ab, und drücke endlich gedachte symmetrische Funktionen vermittelst jener gefundenen Größen $S_1, S_2, S_3\ldots$ aus.

Beispiele. I. Es seien $x^3y-3x+1=0$, $x^2(y-1)+x-2=0$. Man erhält vorerst $(a^3y-3a+1)(b^3y-3b+1)=0$, oder

$$a^3b^3y^2+yS_3-3abyS_2+9ab-3S_1+1=0.$$

Die zweite der vorgelegten Gleichungen gibt uns aber

$$S_1 = \frac{-1}{y-1}, \; ab = \frac{-2}{y-1}, \; S_2 = \frac{1}{(y-1)^2} + \frac{4}{y-1};$$

woraus wir die nämlichen Finalgleichungen, wie in §. 56 finden.

II. Es seien die beiden Gleichungen

$$x^2+px+q=0, \; x^2+p'x+q'=0.$$

Man mache zuerst das Produkt der beiden Gleichungen

$$a^2+pa+q=0 \text{ und } b^2+pb+q=0.$$

dasselbe wird sein

$$a^2b^2+pab(a+b)+p^2ab+q(a^2+b^2)+pq(a+b)+q^2=0.$$

Nun ist $ab=q'$, $a+b=-p'$, $a^2+b^2=S_2=p'^2-2q'$.

Daher das obige Resultat, wenn man diese Werthe einführt,

$$(q-q')^2+(pq'-p'q)(p-p')=0, \text{ wie in §. 53.}$$

Anmerkung. Die Aufgabe aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y eine derselben zu eliminiren, wäre hiernach, ohne Einführung von etwas Fremdartigem, vollständig gelöst. Die Rechnung hat jedoch viel Langwieriges; dahin gehört namentlich die Entwicklung des Produktes $A \cdot B \cdot C \ldots$, und seine Reduktion auf Summenausdrücke.

§. 132. Es sei m der Grad der Gleichung $Z=0$, d. h. die größte Summe der Exponenten von x und y in den einzelnen Gliedern derselben, y wird mithin in dem Coefficienten p von x^{m-1} nicht den ersten Grad, im Coefficienten q von x^{m-2} nicht den zweiten Grad übersteigen, u. s. w.; ebenso sei n der Grad der Gleichung $T=0$. Wir wollen nun zeigen, daß sich der Grad der Finalgleichung nicht über das Produkt mn der Grade der vorgelegten Gleichungen erstrecken kann. Wenn man nämlich die Gleichungen, welche die Werthe von S_1, S_2, $S_3 \ldots$ bestimmen, näher untersucht; so sieht man auf der Stelle, daß S_1 in Bezug auf y nur vom ersten Grade, S_2 bloß vom zweiten, $2S_1$ u. s. w. sein kann. Andrerseits ist in einem Gliede $y^i\left[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\right]$ des Produktes $A \cdot B \cdot C \ldots$ der Grad $i+\alpha+\beta+\gamma \ldots$ höchstens $=mn$, weil jedes Glied von A höchstens vom $m$ten Grade ist, und die Anzahl der Faktoren von A, B, $C \ldots$ sich auf n beläuft. Ueberdem

folgt aus den Formeln des §. 125, vermittelst welcher die symmetrischen Funktionen sich darstellen lassen, daß der Exponent von y in dem Ausdrucke $[a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots]$ die Zahl $\alpha+\beta+\gamma \ldots$ nicht übersteigen kann. Gedachtes Glied hat also keine höhere Potenz von y als y^{mn}. Das von irgend einem Gliede Erwiesene gilt für jedes Glied insbesondere, mithin kann in der Endgleichung keine höhere Potenz von y, als die mnte vorkommen.

Fünftes Kapitel.

Von den Kettenbrüchen.

Entstehung und Eigenschaften derselben.

§. 133. Um der Wurzel einer Gleichung $fx=0$ näher zu kommen, sei y die unmittelbar kleinere ganze Zahl die jener Wurzel zunächst liegt, und x' eine neue Unbekannte >1, in der Art, daß $x=y+\frac{1}{x}$. Aus der Substitution dieses Werthes in die vorgelegte Gleichung $fx=0$ ergibt sich die transformirte $Fx'=0$. Es sei y' abermals diejenige ganze kleinere Zahl, welche der Wurzel x' am nächsten liegt, so daß $x'=y'+\frac{1}{x''}$. Ferner sei $x''=y''+\frac{1}{x'''}$, u. s. w., wo $x', x'', x''' \ldots\ldots$ die Einheit übertreffen. Auf solche Weise entstehen die folgenden Gleichungen (A), und der Werth von x unter der Form (B), welcher ein Kettenbruch genannt wird.

$$x=y+\frac{1}{x'}$$

$$x'=y'+\frac{1}{x''}, \quad \text{(A)}$$

$$x''=y''+\frac{1}{x'''}; \text{ etc.}$$

$$x=y+\cfrac{1}{y'+\cfrac{1}{y''+\cfrac{1}{y'''+\cfrac{1}{y^{IV}} \text{ etc.}}}} \quad \text{(B)}$$

Die Ganzen $y, y', y'', y''' \ldots$ sind die Glieder des Kettenbruches, welchen wir, der Kürze halber, durch

$$x = y, y', y'', y''' \ldots .$$

bezeichnen wollen.

Die Verwandlung eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen geht folgendermaßen vor sich. Um dieß deutlicher zu machen, sei das Beispiel:

$$x = 2, 1, 3, 2, 4 = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}.$$

Man nehme zuvörderst den am Ende befindlichen Theil $2 + \frac{1}{4}$ und reducire ihn auf $\frac{9}{4}$. Der Werth von x verwandelt sich hierauf, weil die Einheit durch $\frac{9}{4}$ dividirt, $\frac{4}{9}$ gibt, in

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{9}}}.$$

Ebenso hat man $3 + \frac{4}{9} = \frac{31}{9}$, ferner $1 : \frac{31}{9} = \frac{9}{31}$; woraus $x = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{9}{31}}$, was mit $2 + 1 : \frac{40}{31} = 2 + \frac{31}{40}$ gleichbedeutend ist: endlich $x = \frac{111}{40}$. Der Gang dieser Rechnung ist offenbar derselbe wie der im §. 30 der Arithmetik eingeschlagene, um den gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden. In den nachstehenden Beispielen enthält die erste Linie die Glieder des Kettenbruches, und die Operation geschiebt wie folgt: Man multiplicire jedes Glied mit der darunter befindlichen Zahl, und addire zu dem Produkte diejenige, welche auf der rechten Seite dieser letztern steht, zu deren Linken dann die so gefundene Summe angeschrieben wird. Hiernach steht die Rechnung:

x = 2, 1, 3, 2, 4	x = 3, 2, 1, 1, 3, 2, 4
111, 40, 31, 9, 4, 1.	617, 182, 71, 40, 31, 9, 4, 1.

Man hat daher einerseits $x = \frac{111}{40}$, und andererseits $x = \frac{617}{182}$.

Wenn der Kettenbruch sich ins Unendliche erstreckt, so bleibt man bei einem seiner Glieder stehen, indem man alle darauf folgenden vernachläßigt: auf diese Weise erhält man nur einen Näherungswerth von x. Läßt man z. B. x^{IV} in den Gleichungen (A) weg, indem man $x''' = y'''$ setzt; so ist x''' zu klein genommen, mithin $x'' = y'' + \frac{1}{y'''}$ zu groß geworden: seinerseits wird x' wieder dadurch

zu klein u. s. f. Ueberhaupt erhält man einen größeren oder kleineren Werth als x, je nachdem man den Kettenbruch bei einem Gliede von gerader oder ungerader Rangordnung abbricht. Indem man also von einem Kettenbruche successive das erste Glied y, das zweite y', das dritte y'', u. s. w. nimmt, sind die dadurch gewonnenen Resultate wechselweise kleiner und größer als x, das zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden liegt. Diese Resultate, welche die **reducirten Werthe** des Kettenbruches, oder **Näherungsbrüche**, oder auch Partialbrüche heißen, mögen hier durch

$$\frac{a}{a'},\ \frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'},\ \frac{d}{d'},\ \ldots\ \frac{m}{m'},\ \frac{n}{n'},\ \frac{p}{p'},\ \ldots \quad (C)$$

dargestellt sein.

Indem nach und nach $y, y', y'', y''', \ldots$ als letztes Glied genommen wird, hat man

$$\frac{a}{a'} = \frac{y}{1},\ \frac{b}{b'} = \frac{yy'+1}{y'},\ \frac{c}{c'} = \frac{yy'y''+y''+y}{y'y''+1}\ \ldots$$

Man sieht auf der Stelle, daß $\frac{c}{c'} = \frac{by''+a}{b'y''+a'}$. Um nun $\frac{d}{d'}$, zu erhalten, braucht man nur $y''+\frac{1}{y'''}$, statt y'' zu schreiben. Dadurch verwandelt sich $x = y, y', y''$, in $x = y, y', y'', y'''$. Dabei wird der Zähler d in

$$by''+a+\frac{b}{y'''} = c+\frac{b}{y'''} = \frac{cy'''+b}{y'''},$$

und der Nenner d' in

$$\frac{c'y'''+b'}{y'''} \text{ übergehen; hieraus } \frac{d}{d'} = \frac{cy'''+b}{c'y'''+b'}.$$

Vergleicht man diese Werthe von $\frac{c}{c'}$, $\frac{d}{d'}$ mit einander, so ist ersichtlich, daß der Zähler eines reducirten Werthes gefunden wird, wenn man die beiden nächstvorhergehenden Zähler beziehungsweise mit 1, und dem zugehörigen Endgliede multiplicirt, und beide Producte addirt: eben dieses Bildungsgesetz gilt auch für den Nenner. Die eben ausgesprochene Regel ist übrigens auf alle Näherungsbrüche (C) anwendbar, weil für jeden einzelnen derselben, abgesehen von den beigefügten Accenten, eine ganz ähnliche Rechnung stattfindet. Folglich

$$p = ny^{i} + m,\ p' = n'y^{i} + m' \ \ldots \ (D),$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{ny^{i} + m}{n'y^{i} + m'} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (E).$$

Es reicht also hin, die zwei ersten Näherungsbrüche zu bilden, um stufenweise alle übrigen daraus abzuleiten.

$x = 2, 1, 3, 2, 4$ z. B. gibt, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{25}{9}$, $\frac{111}{40}$, Brüche, die wechselweise kleiner und größer als x sind, dessen genauer Werth $\frac{111}{40}$ beträgt. Dieses Verfahren bietet demnach ein zweites Mittel dar, den letzteren Werth zu erhalten.

Anmerkung. Es ist übrigens für sich klar, wenn x rational, und durch irgend einen Bruch ausgedrückt ist, daß dieser Bruch das letzte Glied der Reihe (C) sein wird, weil in diesem Falle der Kettenbruch ein endlicher ist. Wenn aber die Größe x sich irrational herausstellt, so wird die Reihe (C) der Näherungsbrüche ins Unendliche fortgehen, weil der Kettenbruch alsdann ein unendlicher ist.

§. 134. Eliminirt man y^i zwischen den Gleichungen (D), so entsteht $pn' - p'n = -(nm' - n'm)$, d. h. die Differenz der Produkte, welche man findet, wenn man die Glieder zweier benachbarten Näherungsbrüche (C) über's Kreuz mit einander multiplicirt, bleibt stets dieselbe mit abwechselnd positiven und negativen Zeichen. Nun beträgt aber für die beiden ersten Partialbrüche

$$\frac{a}{a'} = \frac{y}{1}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{yy'+1}{y'}$$

diese Differenz 1; mithin ist

$$pn' - p'n = \pm 1, \quad \frac{p}{p'} - \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{p'n'} \quad \ldots \text{(F)},$$

wo das Zeichen + gilt, wenn y^i und $\frac{p}{p'}$ von gerader Rangordnung, oder $\frac{p}{p'} > \frac{n}{n'}$, und das Zeichen —, wenn dieselben von ungerader Rangordnung sind, oder $\frac{p}{p'} < \frac{n}{n'}$.

Anmerkung. Die Differenzen zwischen den successiven Näherungsbrüchen sind:

$$\frac{b}{b'} - \frac{a}{a'} = \frac{1}{a'b'}, \quad \frac{c}{c'} - \frac{b}{b'} = -\frac{1}{b'c'}, \ldots, \quad \frac{p}{p'} - \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{p'n'}, \ldots$$

Die Summe aller dieser Gleichungen reducirt sich auf

$$\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} + \frac{1}{a'b'} - \frac{1}{b'c'} + \frac{1}{c'd'} \ldots \pm \frac{1}{p'n'},$$

zu klein u. s. f. Ueberhaupt erhält man einen größeren oder kleineren Werth als x, je nachdem man den Kettenbruch bei einem Gliede von gerader oder ungerader Rangordnung abbricht. Indem man also von einem Kettenbruche successive das erste Glied y, das zweite y', das dritte y'', u. s. w. nimmt, sind die dadurch gewonnenen Resultate wechselweise kleiner und größer als x, das zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden liegt. Diese Resultate, welche die reducirten Werthe des Kettenbruches, oder Näherungsbrüche, oder auch Partialbrüche heißen, mögen hier durch

$$\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, \frac{d}{d'}, \ldots \frac{m}{m'}, \frac{n}{n'}, \frac{p}{p'}, \ldots \text{(C)}$$

dargestellt sein.

Indem nach und nach y, y', y'', y''', ... als letztes Glied genommen wird, hat man

$$\frac{a}{a'} = \frac{y}{1}, \frac{b}{b'} = \frac{yy'+1}{y'}, \frac{c}{c'} = \frac{yy'y''+y''+y}{y'y''+1} \ldots$$

Man sieht auf der Stelle, daß $\frac{c}{c'} = \frac{by''+a}{b'y''+a'}$. Um nun $\frac{d}{d'}$, zu erhalten, braucht man nur $y''+\frac{1}{y'''}$, statt y'' zu schreiben. Dadurch verwandelt sich $x = y, y', y''$, in $x = y, y', y'', y'''$. Dabei wird der Zähler d in

$$by''+a+\frac{b}{y'''} = c+\frac{b}{y'''} = \frac{cy'''+b}{y'''},$$

und der Nenner d' in

$$\frac{c'y'''+b'}{y'''}$$ übergehen; hieraus $$\frac{d}{d'} = \frac{cy'''+b}{c'y'''+b'}.$$

Vergleicht man diese Werthe von $\frac{c}{c'}$, $\frac{d}{d'}$ mit einander, so ist ersichtlich, daß der Zähler eines reducirten Werthes gefunden wird, wenn man die beiden nächstvorhergehenden Zähler beziehungsweise mit 1, und dem zugehörigen Endgliede multiplicirt, und beide Producte addirt: eben dieses Bildungsgesetz gilt auch für den Nenner. Die eben ausgesprochene Regel ist übrigens auf alle Näherungsbrüche (C) anwendbar, weil für jeden einzelnen derselben, abgesehen von den beigefügten Accenten, eine ganz ähnliche Rechnung stattfindet. Folglich

$$p = ny^i + m, \; p' = n'y^i + m' \ldots \text{(D)},$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{ny^i + m}{n'y^i + m'} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E)}.$$

Es reicht also hin, die zwei ersten Näherungsbrüche zu bilden, um stufenweise alle übrigen daraus abzuleiten.

$x = 2, 1, 3, 2, 4$ z. B. gibt, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{25}{9}$, $\frac{111}{40}$, Brüche, die wechselweise kleiner und größer als x sind, dessen genauer Werth $\frac{111}{40}$ beträgt. Dieses Verfahren bietet demnach ein zweites Mittel dar, den letzteren Werth zu erhalten.

Anmerkung. Es ist übrigens für sich klar, wenn x rational, und durch irgend einen Bruch ausgedrückt ist, daß dieser Bruch das letzte Glied der Reihe (C) sein wird, weil in diesem Falle der Kettenbruch ein endlicher ist. Wenn aber die Größe x sich irrational herausstellt, so wird die Reihe (C) der Näherungsbrüche ins Unendliche fortgehen, weil der Kettenbruch alsdann ein unendlicher ist.

§. 134. Eliminirt man y^i zwischen den Gleichungen (D), so entsteht $pn' - p'n = -(nm' - n'm)$, d. h. die Differenz der Produkte, welche man findet, wenn man die Glieder zweier benachbarten Näherungsbrüche (C) über's Kreuz mit einander multiplicirt, bleibt stets dieselbe mit abwechselnd positiven und negativen Zeichen. Nun beträgt aber für die beiden ersten Partialbrüche

$$\frac{a}{a'} = \frac{y}{1}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{yy'+1}{y'}$$

diese Differenz 1; mithin ist

$$pn' - p'n = \pm 1, \quad \frac{p}{p'} - \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{p'n'} \quad \ldots \text{(F)},$$

wo das Zeichen + gilt, wenn y^i und $\frac{p}{p'}$ von gerader Rangordnung, oder $\frac{p}{p'} > \frac{n}{n'}$, und das Zeichen —, wenn dieselben von ungerader Rangordnung sind, oder $\frac{p}{p'} < \frac{n}{n'}$.

Anmerkung. Die Differenzen zwischen den successiven Näherungsbrüchen sind:

$$\frac{b}{b'} - \frac{a}{a'} = \frac{1}{a'b'}, \quad \frac{c}{c'} - \frac{b}{b'} = -\frac{1}{b'c'} \ldots, \quad \frac{p}{p'} - \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{p'n'} \ldots$$

Die Summe aller dieser Gleichungen reducirt sich auf

$$\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} + \frac{1}{a'b'} - \frac{1}{b'c'} + \frac{1}{c'd'} \ldots \pm \frac{1}{p'n'},$$

welche Gleichung den genauen Werth von x liefert, wenn der Kettenbruch ein endlicher ist, einen bloßen Näherungswerth aber davon gibt, wenn der Kettenbruch in's Unendliche fortgeht. Wegen des fortwährenden Wachsens der Nenner läßt die letzte Entwickelung über die Convergenz des Kettenbruches keinen Zweifel übrig. In dem obengewählten Beispiele haben wir sonach

$$x = \frac{111}{40} = \frac{2}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{36} - \frac{1}{360}.$$

§. 135. Aus dem Vorhergehenden lassen sich mehrere nützliche Folgerungen ziehen:

1) Zähler und Nenner der Näherungsbrüche sind immer relative Primzahlen. Denn hätten p und p' einen von der Einheit verschiedenen gemeinschaftlichen Theiler, so müßte derselbe auch 1 theilen.

2) Substituirt man in die Gleichung (E) für y^i den Totalwerth z des Kettenbruches von dem Gliede y^i an bis ans Ende desselben, nämlich $z = y^i, y^{i+1}, \ldots$; so ist klar, daß man statt eines bloßen Partialbruches, den genauen Werth von

$$x = \frac{nz + m}{n'z + m'} \quad \ldots . \text{(G) hat.}$$

Dieser Bruch, durch dessen Entwicklung der vorgelegte Kettenbruch entstanden gedacht werden kann, wollen wir den vollständigen Bruch nennen.

3) Subtrahiren wir $\frac{m}{m'}$ und $\frac{n}{n'}$ von x, so sind die Differenzen δ und δ', zwischen dem letztern, und jenen beiden reducirten Werthen durch die Gleichungen

$$\delta' = \pm \frac{z}{m'(n'z + m')}, \quad \delta = \frac{\mp 1}{n'(n'z + m')} \quad \ldots \text{(H) bestimmt.}$$

Die Zeichen sind einander entgegengesetzt, weil x zwischen den beiden reducirten Werthen eingeschlossen ist. Die zweite Differenz ist kleiner als die erste, weil $m' < n'$ und $z > 1$, indem das positive Ganze y^i einen Bestandtheil von z ausmacht. Es liegt folglich x näher an $\frac{n}{n'}$ als an $\frac{m}{m'}$. Die reducirten Werthe, welche abwechselnd kleiner

und größer als x sind, und von denen jeder folgende diesen Totalwerth genauer als der vorhergehende darstellt, führen daher mit Recht den Namen: Näherungsbrüche.

4) Bricht man den Kettenbruch ab, um zwei benachbarte Näherungsbrüche daraus abzuleiten; so haben die dabei begangenen Fehler δ, δ' in den Formeln (H) ihren Ausdruck. Da nun $z > 1$, und der zweite Bruch vermehrt wird, wenn man darin $z = 1$ setzt; so ist

$$\delta = x - \frac{n}{n'} < \frac{\mp 1}{n'(n'+m')} \quad \ldots (K).$$

Der Fehler, welchen man begeht, wenn man einen dieser Näherungsbrüche statt des Kettenbruches nimmt, ist also kleiner als der Quotient, welchen die Einheit, dividirt durch das Produkt aus seinem Nenner n' mit der Summe $n'+m'$ dieses Nenners und desjenigen des vorhergehenden Näherungsbruches, geben würde. So hat man in unserm gewählten Beispiele die Brüche $\frac{11}{4}$ und $\frac{25}{9}$, wovon der letztere nicht um $\frac{1}{9(9+4)} = \frac{1}{117}$ von dem wahren Werthe abweicht. Man vernachläßigt öfters das Glied m', was den Bruch (K) noch vermehrt, und man hat dann $\delta < \frac{1}{n'^2}$. Der Unterschied zwischen einem Näherungsbruche, und dem wahren Werthe ist daher immer kleiner als 1 dividirt durch das Quadrat des Nenners des Partialbruches. So differirt $\frac{25}{9}$ weniger als um $\frac{1}{81}$ von dem wahren Werthe.

§. 136. Es seien $\frac{h}{h'}$, $\frac{k}{k'}$, $\frac{l}{l'}$ beliebige, wachsende Brüche in der Art, daß die Differenz zwischen den äußersten die Differenz zwischen jedem derselben, und dem mittlern übertrifft. Ueberdem seien h, h', l, l' von solcher Beschaffenheit, daß man $lh' - l'h = 1$ habe. Man findet

$$\frac{l}{l'} - \frac{h}{h'} = \frac{1}{l'h'} > \frac{kh' - k'h}{k'h'} \text{ und } > \frac{lk' - kl'}{k'l'}.$$

Da diese Zähler ganzzahlig und positiv sind, so müssen sie mindestens 1 betragen. Ersetzen wir dieselben durch 1, so kommt $l'h' <$ $h'k'$ und $< k'l'$. Hieraus folgt $k' > l'$ und h', wenn man die gemeinsamen Faktoren wegläßt. Ebenso sieht man, wenn man die drei Brüche umkehrt, daß $k > h$ und l. Der mittlere Bruch wird also mit größeren Zahlen als die beiden äußersten geschrieben. Nun liegt

aber x zwischen $\frac{m}{m'}$ und $\frac{n}{n'}$; soll daher der Bruch $\frac{k}{k'}$ den Totalwerth von x genauer als jene zwei Näherungsbrüche angeben, so muß er zwischen ihnen eingeschlossen, folglich mit größeren Zahlen geschrieben werden. Jeder Näherungsbruch liegt also dem wahren Werthe von x näher als jeder andere aus kleineren Zahlen gebildete Bruch.

Mittelst der beiden Näherungsbrüche $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, wollen wir die beiden Brüche

$$\frac{h}{h'} = \frac{m+(t-1)n}{m'+(t-1)n'}, \quad \frac{l}{l'} = \frac{m+tn}{m'+tn'}$$

zusammensetzen, in denen t nach und nach die Werthe 1, 2, 3 . . . bis y^i erhält, welches das in dem darauf folgenden Näherungsbruche vorkommende Ganze ist.

Wir hätten demnach:

$$\frac{m}{m'}, \frac{m+n}{m'+n'}, \frac{m+2n}{m'+2n'}, \ldots \frac{m+y^i n}{m'+y^i n'} = \frac{p}{p'} \ldots (L).$$

Nun ist $\frac{l}{l'} - \frac{h}{h'} = \frac{\pm 1}{h'l'}$ welchen von jenen Werthen t auch haben mag. Die Brüche (L) lassen sich folglich nicht weiter reduciren; auch nähern sie sich dem Werthe von x mehr als jeder andere durch kleinere Zahlen ausgedrückte Bruch. Diese Brüche wachsen vom ersten bis zum letzten, dabei nähern sie sich dem Totalwerthe von x entweder durch Abnahme oder Zunahme, je nachdem die äußersten von ungerader oder gerader Rangordnung sind. Der Unterschied δ zwischen einem derselben $\frac{l}{l'}$ und x ist kleiner als $\frac{i}{h'l'}$, weil x zwischen den beiden Brüchen $\frac{l}{l'}$ und $\frac{h}{h'}$ liegt. Man kann also zwischen zwei benachbarten Näherungsbrüchen (C) (Hauptbrüche) $y^i - 1$ andere Brüche (Nebenbrüche) einschalten, welche die nämlichen Eigenschaften wie jene besitzen. Diese eingeschalteten Brüche bilden zwei Reihen von Brüchen, welche sich der Größe x nähern, nämlich wachsende Brüche, die kleiner als x sind, und abnehmende Brüche, die größer als x sind. Man erhält die Nebenbrüche dadurch, daß man die Hauptbrüche $\frac{m}{m'}$ und $\frac{n}{n'}$ Glied für Glied y^imal nach einan-

der zusammenaddirt. In unserem Beispiel $x=2, 1, 3, 2, 4,$ hat man die Hauptbrüche

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{11}{4}, \frac{25}{9}, \frac{111}{40}.$$

Nimmt man $\frac{2}{1}$ und $\frac{3}{1}$, so leitet man $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{3}$ und $\frac{11}{4}$ ab, welcher letztere der dritte Hauptbruch ist. Geht man von $\frac{11}{4}$ und $\frac{25}{9}$ aus; so findet man

$$\frac{36}{13}, \frac{61}{22}, \frac{86}{31}, \frac{110}{40}.$$

Die Brüche von gerader Rangordnung werden auf dieselbe Art behandelt. Hiernach steht:

$$\left(\frac{2}{1}\right), \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \left(\frac{11}{4}\right), \frac{36}{13}, \frac{61}{22}, \frac{86}{31}, < x = \left(\frac{111}{40}\right), \text{ und}$$

$$\frac{3}{1}, \frac{14}{5}, \left(\frac{25}{9}\right), \frac{136}{49}, \frac{247}{89}, \frac{358}{129}, \frac{469}{169} \ldots > x.$$

Zu bemerken ist noch, daß der Reihe (C) die Hülfsbrüche $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ vorgesetzt werden können; die zur Berechnung der reducirten Werthe gegebene Vorschrift wird dadurch für den zweiten schon anwendbar.

Bestimmte und unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

§. 137. Um den Werth von x aus der Gleichung $Ax=B$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, muß man nach dem im §. 133 Gesagten das in $x=\frac{B}{A}$ enthaltene Ganze y suchen. Dadurch entspringt $x=y+\frac{R}{A}\;y+\frac{1}{x'}$, wobei R den Rest der Division von B durch A bedeutet. Man hat ferner

$$x'=\frac{A}{R}=y'+\frac{R'}{R},\; x''=\frac{R}{R'}=y''+\frac{R''}{R'} \text{ u. s. w.; folglich}$$

$$x=y+\cfrac{1}{y'+\cfrac{1}{y''+\cfrac{1}{y'''\text{ 2c.}}}}=y, y', y'' \ldots.$$

Diese Operation gibt zu Gliedern des Kettenbruches die successiven Quotienten, welche man bei dem Aufsuchen des gemeinschaftlichen Theilers zwischen A und B findet; der Kettenbruch ist hier immer ein endlicher, wenn A und B rational sind.

Für die Gleichung $2645x - 9752$ z. B. hat man

$$9752 \left|\frac{2645}{3}\right|\frac{1817}{1}\left|\frac{828}{2}\right|\frac{161}{5}\left|\frac{23}{7}\right., \; x = \frac{424}{115} = 3, 1, 2, 5, 7.$$

Hieraus zieht man mittelst der Formeln (E) und (L) die Haupt- und Neben-Brüche, nämlich:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \left(\frac{3}{1}\right), \frac{7}{2}, \left(\frac{11}{3}\right), \frac{70}{19}, \frac{129}{35}, \frac{188}{51} \ldots < x = \frac{424}{115}, \text{ und}$$

$$\left(\frac{4}{1}\right), \frac{15}{2}, \frac{26}{7}, \frac{37}{10}, \frac{48}{13}, \left(\frac{59}{16}\right), \frac{483}{131}, \frac{907}{246} \ldots > x.$$

Der Bruch $\frac{26}{7}$ gibt den Werth von x genauer an, als jeder andere mit einfachern Ziffern geschriebene Bruch; er ist von dem letztern um weniger als $\frac{1}{13}$ verschieden.

Man findet ebenso für $x = \frac{409}{119}$ 3, 2, 3, 2, 7 die Brüche

$$\left(\frac{3}{1}\right), \frac{10}{3}, \left(\frac{24}{7}\right), \frac{79}{23}, \frac{134}{39} \ldots , . < x,$$

$$\left(\frac{7}{2}\right), \frac{31}{9}, \left(\frac{55}{16}\right), \frac{464}{135} \ldots . > x.$$

Folgende Aufgabe wäre demnach gelöst: Zu einem gegebenen Bruche alle die aus kleineren Zahlen gebildeten Brüche zu finden, welche dem erstern näher kommen, als jeder andere durch einfachere Ziffern ausgedrückte Bruch.

§. 138. Wir wollen jetzt einige Anwendungen davon machen.

I. Der englische Yard hält 405,34 und der Meter 443,29 französische Linien; man soll einfache, jedoch möglichst genaue Näherungsverhältnisse zwischen diesen beiden Längenmaßen aufstellen. Man hat also 44329 Yard = 40534 Meter. Der Bruch $\frac{44329}{40534}$ gibt die Quotienten

1, 10, 1, 2, 7, 2, 9, 1, 1, 1, 2,

Daraus entspringen die Näherungsbrüche

$$\frac{1}{1}, \frac{11}{10}, \frac{12}{11}, \frac{35}{32}, \frac{257}{235}, \frac{549}{502}, \frac{5198}{4753}, \frac{5747}{5255} \text{ ic.}$$

Folglich ziemlich genau 35 Yard = 32 Meter,
genauer . . . 257 „ = 235 „
noch genauer . 549 „ = 502 „ ic.

II. Das Verhältniß π des Umkreises zum Durchmesser ist $=3,1415926$ . . . Verwandelt man diesen Bruch in einen Kettenbruch, so kommt

$$\pi = 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14\ \ldots$$

Hieraus leitet man nach der gegebenen Methode die Hauptbrüche und eingeschalteten Brüche ab, unter denen die von Archimedes und Adrian Metius aufgestellten Verhältnisse mit inbegriffen sind. Man wird auf diese Art haben:

$$\left(\frac{3}{1}\right),\ \frac{25}{8},\ \frac{47}{15},\ \frac{69}{22},\ \frac{91}{29},\ \frac{113}{36},\ \frac{135}{43},\ \frac{157}{50},\ \frac{201}{64},\ \frac{223}{71}\ \ldots < \pi, \text{ und}$$

$$\frac{4}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \left(\frac{22}{7}\right),\ \left(\frac{355}{113}\right),\ \frac{104348}{33215},\ \frac{312689}{99532},\ \ldots > \pi.$$

III. Das tropische Jahr heißt die Zeit, innerhalb welcher die Erde wieder zu demselben Aequinoctialpunkt zurückkehrt; es beträgt 365, 2422181 Tage. Das bürgerliche Jahr rechnet man dagegen zu 365 Tagen, mithin kommt die Erde nach 4 Jahren ohngefähr einen Tag später erst wieder in dieselbe Lage gegen die Sonne. Um daher die Umdrehung der Erde um die Sonne mit dem bürgerlichen Jahre in Uebereinstimmung zu bringen, muß man jedem vierten Jahre einen Tag hinzusetzen; ein solches Jahr heißt ein Schaltjahr. Diese Zeitrechnung wurde von Julius Cäsar eingeführt, und heißt deshalb Julianische Zeitrechnung. Allein da hierbei das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tage gerechnet ward, beging man jährlich einen Fehler, indem das bürgerliche Jahr jetzt zu lang gegen das Sonnenjahr angenommen wurde. Um diesen Fehler zu verbessern, bestimmte der Pabst Gregor XIII, daß innerhalb des Zeitraumes von 400 Jahren 3 Schalttage weggelassen, d. h. in 400 Jahren nur 97 Tage eingeschaltet werden sollten. Wenn man diese Anordnung näher prüfen will, so muß man unserer Theorie zufolge den Bruch $\frac{2422181}{10000000}$ in einen Kettenbruch verwandeln.

Wir bekommen auf diese Art

$x = 0,\ 4,\ 7,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 2\ \ldots$ und die Näherungsbrüche

$$\frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{31}{128},\ \frac{39}{161},\ \frac{70}{289}.$$

Wählen wir z. B. den Bruch $\frac{8}{33}$, d. h. nehmen wir an, daß das Sonnenjahr $365\frac{8}{33}$ Tage habe, so müßte man in 33 Jahren 8 Tage einschalten, um das bürgerliche Jahr mit jenem Zeitraume in Einklang zu bringen. Man würde demnach jedes vierte Jahr zu 366 Tagen festsetzen, dabei das 8te Schaltjahr erst am Ende von 5 Jahren eintreten, und hierauf eine ähnliche Periode von 33 Jahren anfangen lassen. Es ist dieß die Zeitrechnung der alten Perser.

Es ist zu bemerken, daß der Bruch $\frac{97}{400}$ sich weder unter den Hauptbrüchen noch unter den eingeschalteten befindet; man hätte daher eine der Wahrheit näher kommende Einschaltung wählen können als diejenige ist, worauf sich der Gregorianische Kalender gründet. Uebrigens ist dieser Mißstand von keiner großen Bedeutung.

Anmerkung. Den verbesserten Gregorianischen Kalender haben jetzt fast alle christliche Völker angenommen, während der Julianische Kalender in Europa nur noch bei den Russen und den Christen der griechischen Kirche im Gebrauch ist. Das Jahr desselben fängt jetzt 12 Tage später an als das unserige, und daher rührt der Unterschied zwischen unserm Datum und dem ihrigen.

IV. Der synodische Monat beträgt 29,5305887 Tage, der tropische Monat hingegen, 30,4368515 Tage. Das Verhältniß x dieser Zahlen in einen Kettenbruch verwandelt, gibt die Näherungsbrüche:

$$\left(\frac{1}{1}\right),\ \left(\frac{34}{33}\right),\ \frac{101}{98},\ \left(\frac{168}{163}\right)\ \ldots < x, \text{ und}$$

$$\left(\frac{33}{32}\right),\ \left(\frac{67}{60}\right),\ \frac{235}{228}\ \ldots > x.$$

Betrachtet man z. B. $\frac{235}{228}$ als den Werth von x, so nimmt man an, daß 235 synodische Revolutionen des Mondes in 228 oder 19 mal 12 Sonnenmonaten vor sich gehen; die Differenz beträgt 7: man müßte demnach in 19 Sonnenjahren 7 synodische Mondsmonate hinzusetzen, damit Sonne und Mond wieder in dieselbe gegenseitige Lage zu einander kämen. Dieses vorausgesetzt, bildet man nun 19 Tafeln, welche die verschiedenen Mondsphasen mit den entsprechenden Zeiten angeben; so werden diese Tafeln das Wiederkehren jener Phasen wäh-

rend sämmtlicher Perioden von 19 Jahren anzeigen, wofern man die Tafeln in ihrer gehöriger Aufeinanderfolge nimmt. Der Grieche Meton lehrte diese Periode seine Landsleute kennen, deren Kalender nach der Sonne, d. h. nach den Jahreszeiten, und dem Monde, d. h. nach den Abwechslungen der Mondsgestalten, zugleich eingerichtet war. Jene Periode, derzufolge nach 19 Jahren die Neu- und Vollmonde wieder nahe auf dieselben Monatstage fallen, ist noch jetzt in unsern Kalendern unter dem Namen der goldenen Zahl bekannt.

Anmerkung. Der tropische Monat ist eigentlich die Zeit, welche der Mond gebraucht, um seinen Umlauf am Himmel in Bezug auf denselben Aequinoctialpunkt zu machen. Die Zeit zwischen zwei zunächst auf einander folgenden Voll- oder Neumonden hingegen heißt ein synodischer Monat, und eine Periode von zwölf synodischen Monaten macht ein Mondjahr aus, welches daher 354,3670 Tage beträgt, oder 10,8752 Tage kürzer ist als das tropische Sonnenjahr.

Man vergleiche Littrows populäre Astronomie. Erster Theil. Wien. bei Heubner.

Ferner Bohnenberger's Astronomie. Tübingen, bei Cotta.

§. 139. Wir haben im §. 28 der niedern Algebra gesehen, daß es hinreichend ist von der Gleichung $ax+by=c$ eine Auflösung $x=\alpha$, $y=\beta$ zu kennen, um alle übrigen daraus herzuleiten. Die Werthe von x und y bilden eine arithmetische Progression, deren constante Differenz b für x und $-a$ für y ist, wonach $x=\alpha+bt$, und $y=\beta-at$.

Die Theorie der Kettenbrüche bietet ein sehr einfaches Mittel dar, die Zahlen α und β zu finden. Denn verwandelt man den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und bezeichnet $\frac{p}{p'}$ den Näherungsbruch, welcher dem vorgelegten zunächst vorhergeht; so wird man haben (§. 133)

$$ap'-bp=\pm 1, \text{ woraus } ap'c-bpc=\pm c;$$

das Zeichen $+$ oder $-$ gilt, je nachdem der Kettenbruch, in seiner Gesammtheit genommen, aus einer geraden oder ungeraden Anzahl Gliedern besteht. Aus der Zusammenstellung der vorigen Gleichung mit der vorgelegten sieht man, daß der letztern Genüge geschieht durch

$\alpha = p'c$, $\beta = -pc$ im Falle die beiden Glieder einerlei Zeichen haben, und durch $\alpha = -p'c$, $\beta = pc$ in dem entgegengesetzten Falle.

Nichts ist also leichter, als eine Auflösung in ganzen Zahlen von der Gleichung $ax + by = c$ zu erhalten. Man verwandle zu diesem Behufe den Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch, suche dann den, dem vorgelegten Bruche unmittelbar vorhergehenden, Näherungsbruch $\frac{p}{p'}$; die daraus resultirende Gleichung $ap' - pb = \pm 1$ multiplicire man durch c, und vergleiche dieselbe endlich Glied für Glied mit $ax + by = c$.

§. 140. Wir wollen nun einige hierhergehörige Aufgaben lösen.

I. Es sei die Gleichung $105x - 43y = 17$.

Die Methode des gemeinschaftlichen Theilers gibt

$$\frac{105}{43} = 2,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,;\ \frac{22}{9} = 2,\ 2,\ 3,\ 1;$$

der letzte Bruch wird erhalten, indem man das Glied 4 wegläßt. Man hat dann ferner $105 \cdot 9 - 43 \cdot 22 = -1$, wo das Zeichen $-$ genommen wird, weil der Kettenbruch 5 Glieder besitzt; übrigens zeigen die entwickelten Produkte, daß die Differenz negativ ist. Multiplicirt man die vorige Gleichung durch -17, und vergleicht sie mit der vorgelegten, so findet man $x = -9 \cdot 17$, $y = 22 \cdot 17$; hieraus

$$x = -153 + 43t,\ y = -374 + 105t.$$

II. Für die Gleichung $424x + 115y = 539$ bekommt man $\frac{424}{115} = 3,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7.$ Läßt man 7 außer Acht, so entsteht $\frac{59}{16}$.

Es kommt alsdann die Gleichung $424 \cdot 16 - 115 \cdot 59 = -1$, welche durch -539 multiplicirt und mit der vorgelegten verglichen, $x = -16 \cdot 539$ und $y = 59 \cdot 539$ gibt. Folglich

$$x = -8624 + 115t,\ y = 31801 - 424t.$$

Man vereinfacht diese Gleichungen, wenn man bemerkt, daß 424 in 31801 genau 75mal enthalten ist, und t mit $t + 75$ vertauscht; dadurch entsteht

$$x = 1 + 115t,\ y = 1 - 424t.$$

III. Die Gleichung $19x + 7y = 117$ gibt $\frac{19}{7} = 2, 1, 2, 2;\ \frac{8}{3} = 2,\ 1,\ 2.$

Man hat alsdann $19 \cdot 3 - 8 \cdot 7 = 1$, woraus man, nach vorhergegangener Multiplication mit 117, folgert

$$x = 351 - 7t,\; y = -936 + 19t, \text{ oder } x = 1 - 7t,\; y = 14 + 19t.$$

IV. Für $9y - 4x = 15$ hat man $9 \cdot 15 - 4 \cdot 30 = 15$, woraus $x = 30 + 9t$ und $y = 15 + 4t$.

Bestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

§. 141. Wir wollen zuerst die Methode angeben, nach welcher die Wurzeln der Gleichung $Ax^2 - 2\alpha x = k$, deren Coefficienten A, α und k ganze Zahlen sind, unter denen A immer auch positiv angenommen wird, in einen Kettenbruch entwickelt werden. Die Wurzel wird hier irrational und positiv gedacht; wäre sie negativ, so vertauscht man $-x$ mit x, und setzt hernach dem Resultat das Zeichen $-$ vor. Wenn der Coefficient des zweiten Gliedes keine gerade Zahl ist, so multiplicirt man die ganze Gleichung mit 2. Die beiden Wurzeln sind nun

$$x = \pm \frac{\sqrt{t} + \alpha}{A} \;\ldots\, (1), \text{ wenn man } t = \alpha^2 + Ak \;\ldots\ldots\, (2) \text{ macht,}$$

wobei t eine positive Zahl, jedoch kein vollständiges Quadrat ist. Nimmt man zuvörderst $\sqrt{t}$ mit dem Zeichen $+$, und ist y die größte in x enthaltene ganze Zahl; so hat man

$$x = y + \frac{1}{x'} = \frac{\sqrt{t} + \alpha}{A},\quad x' = \frac{A}{\sqrt{t} + \alpha - Ay}.$$

Man setze nun $\beta = Ay - \alpha \;\ldots\ldots\, (3)$.

Multiplicirt man hierauf den Werth von x' oben und unten mit $\sqrt{t} + \beta$, so kommt $x' = \frac{A(\sqrt{t} + \beta)}{t - \beta^2}$. Aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt sich aber

$$t - \beta^2 = A(k - Ay^2 + 2\alpha y),$$

so daß A gemeinschaftlicher Faktor ist.

Wird ferner

$$k - Ay^2 + 2\alpha y = B \;\ldots\ldots\, (4) \text{ gesetzt, so entsteht}$$

$$t - \beta^2 = AB,\quad x' = \frac{\sqrt{t} + \beta}{B} \;\ldots\ldots\, (5).$$

Da dieser Werth von x' die nämliche Form wie der von x hat;

so zieht man die größte darin enthaltene ganze Zahl heraus und fährt dann gerade wie vorhin fort.

Man erhält hierauf $x'' = \frac{\sqrt{t}+\gamma}{C}$, ferner $x''' = \frac{\sqrt{t}+\delta}{D}$ u. s. w.

Endlich

$$t = \alpha^2 + Ak \quad = \beta^2 + AB \quad = \gamma^2 + BC \quad = \delta + CD \ldots \text{(a)}$$

$$x = \frac{\sqrt{t}+\alpha}{A},\ x' = \frac{\sqrt{t}+\beta}{B},\ x'' = \frac{\sqrt{t}+\gamma}{C},\ x''' = \frac{\sqrt{t}+\delta}{D} \ldots \text{(b)}$$

$$\beta = Ay - \alpha, \quad \gamma = By' - \beta, \quad \delta = Cy'' - \gamma \ldots, \text{(c)}$$

§. 142. Lassen wir alle Raisonnements bei Seite, um nur das Materielle der Rechnung beizubehalten; so sehen wir, daß in jedem vollständigen Bruch (b) statt $\sqrt{t}$ die größte darin enthaltene ganze Zahl zu setzen ist, und hierauf die Divisionen $\frac{m+\alpha}{A}$, $\frac{m+\beta}{B}$, $\frac{m+\gamma}{C}\ldots$ auszuführen sind, welche die ganzen Quotienten $y, y', y'' \ldots$ und die Reste $r, r', r'', \ldots$ geben werden. Hiernach steht

$$m+\alpha = Ay + r,$$
$$m+\beta = By' + r',$$
$$m+\gamma = Cy'' + r''; \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen (c) liefern aber $Ay = \alpha + \beta$, $By' = \beta + \gamma$, u. s. f. Hieraus folgt durch Substitution:

$$\left.\begin{array}{l} \beta = m - r \\ \gamma = m - r' \\ \delta = m - r'' \text{ u. s. f.} \end{array}\right\} \ldots \text{(d)}$$

Ueberdem ist uns die Kenntniß der Divisoren nöthig. Zu diesem Behufe geben uns die Gleichungen (a)

$$AB = \alpha^2 - \beta^2 + Ak = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) + Ak = Ay(\alpha-\beta) + Ak; \text{ folglich}$$

$$B = k + y(r + \alpha - m),$$

wenn man die Gleichung (d) zu Hülfe nimmt.

Ebenso ist

$$BC = \beta^2 - \gamma^2 + AB = By'(\beta - \gamma) + AB,$$
$$C = A + y'(r' - r)$$
$$D = B + y''(r'' - r'), \text{ u. s. f.}$$

Die folgende Tafel zeigt uns den Gang an, welchen wir bei diesen Operationen zu befolgen haben.

Dividenden.	Divisoren.	Quotienten.	Reste.	Differenzen.
	k		$R=m-\alpha$	
$m+\alpha$	A	y	r	$r\ -R$
$2m-r$	$B=k+y\ \ (r\ -R)$	y'	r'	$r'\ -r$
$2m-r'$	$C=A+y'\ (r'\ -r)$	y''	r''	$r''-r'$
$2m-r''$	$D=B+y''\ (r''-r')$	y'''	r'''	$r'''-r''$
$2m-r'''$	$E=C+y'''(r'''-r'')$	y^{IV}	r^{IV}	$r^{IV}-r'''$
rc.	rc.	rc.	rc.	rc.

Nachdem also $R=m-\alpha$, der Quotient y, und der Rest r gebildet worden, nimmt man die Differenzen $r-R$, $2m-r$, und berechnet B; der Bruch $\frac{2m-r}{B}$ gibt y' und r'. Hierauf bildet man die Differenzen $r'-r$, $2m-r'$ und sucht C; der Bruch $\frac{2m-r'}{C}$ gibt y'' und r''; u. s. f.

Wenn man wieder auf einen der vorhergehenden vollständigen Brüche gelangt, so ist klar, weil daraus der schon einmal gefundene Quotient als Rest sich ergibt, daß der Kettenbruch periodisch ist.

Beispiele: I. Es sei die Gleichung $9x^2-39x+41=0$. Man verdoppelt dieselbe, um dem zweiten Gliede einen geraden Coefficienten zu verschaffen. Es ist dann

$$A=18,\ \alpha=39,\ k=-82 \text{ und } x=\frac{39\pm\sqrt{45}}{18}.$$

Das größte in $\sqrt{45}$ enthaltene Ganze m ist 6. Hiernach $m-\alpha$ $=R=-33$. Man darf hier nicht den, den beiden Gliedern des Bruches gemeinschaftlichen, Faktor 3 weglassen. Nehmen wir die Wurzelgröße mit dem Zeichen $+$, so haben wir

$$k=-82,\ R=m-\alpha=-33.$$

$m+\alpha\ =45,\ A=18,\ \frac{45}{18},\ \ y\ =2,\ r\ =9$ Diff. $\quad 42$
$2m-r\ =\ 3,\ B=\ 2,\ \frac{3}{2},\ \ y'\ =1,\ r'\ =1$ $\quad -8$
$2m-r'\ =11,\ C=10,\ \frac{11}{10}*,\ y''=1,\ r''=1$ $\quad 0$
$2m-r''=11,\ D=\ 2,\ \frac{11}{2},\ \ y'''=5,\ r'''=1$ $\quad 0$
$2m-r'''=11,\ E=10,\ \frac{11}{10}*,$ (schon gefundener Bruch).

Folglich $x=2,1[1,5]$, wobei, der Abkürzung halber, der unendlichemal sich wiederholende Theil des Kettenbruches zwischen zwei Klammern eingeschlossen ist.

II. Die Gleichung $2x^2-14x+17=0$ gibt

$x=\frac{7\pm\sqrt{15}}{2}$ $A=2$, $\alpha=7$, $k=-17$, $m=3$, $m-\alpha=R=-4$. Hiernach

$m+\alpha=10$, $A=2$, $\frac{10}{2}$, $y=5$, $r=0$, Diff. 4
$2m-r=6$, $B=3$, $\frac{6}{3}$*, $y'=2$, $r'=0$, 0
$2m-r'=6$, $C=2$, $\frac{6}{2}$, $y''=3$, $r''=0$,
$2m-r''=6$, $D=3$, $\frac{6}{3}$*, (schon gefundener Bruch)

folglich $x=5[2,3]$.

Die Gleichungen (d) dienen überdem zur Bestimmung der Zahlen α, β, γ . . . , welche unsere Dividenden abgeben, insofern man jede um m vermehrt; die successiven vollständigen Brüche können daher auch auf diese Weise gefunden werden, was zuweilen nützlich ist.

In dem ersten Beispiele sind diese Brüche:

$\frac{39+\sqrt{45}}{18}=2+$, $\frac{\sqrt{45}-3}{2}=1+$, $\frac{*\sqrt{45}+5}{10}=1+$, $\frac{\sqrt{45}+5}{2}=5+$, u. s. f.

§. 143. Was die zweite Wurzel der Gleichung $Ax^2-2\alpha x=k$ anlangt, so schreibt man $x=-\frac{\sqrt{t}-\alpha}{A}$, wenn sie negativ ist, und behandelt diesen Bruch, wie oben gesagt worden. Ist die Wurzel positiv, so hat man $x=\frac{\alpha-\sqrt{t}}{A}=v+\frac{1}{x'}$, wo v die größte in x enthaltene ganze Zahl oder das erste Glied des Kettenbruches bezeichnet. Man zieht daraus

$$x'=\frac{A}{\alpha-Av-\sqrt{t}}=\frac{A(\alpha-Av+\sqrt{t})}{(\alpha-Av)^2-t}=\frac{\sqrt{t}+\beta'}{B'},$$

insofern man berücksichtigt, daß A oben und unten als gemeinsamer Faktor erscheint; wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man wie vorhin verfährt. Da $\sqrt{t}$ hier das Zeichen + hat, so kommt man auf den früher behandelten Fall wieder zurück.

In unserm ersten Beispiel haben wir $x=\frac{39-\sqrt{45}}{18}=1+\frac{1}{x'}$, woraus $x'=\frac{21+\sqrt{45}}{22}$. Dieser Bruch ist aber die größte Wurzel der

Gleichung: $22x'^2 - 42x' + 18 = 0,$

aus welcher entsteht:

$$\begin{array}{lllll}
\alpha = 21, & m = 6, & k = -18, & m - \alpha = -15, & \text{Diff. } 20, \\
m + \alpha = 27, & A = 22, & \frac{27}{22}, & y = 1, \; r = 5, & -4 \\
2m - r = 7, & B = 2, & \frac{7}{2}, & y' = 3, \; r' = 1, & 0 \\
2m - r' = 11, & C = 10, & \frac{11}{10}^*, & y'' = 1, \; r'' = 1, & 0 \\
2m - r'' = 11, & D = 2, & \frac{11}{2}, & y''' = 1, \; r''' = 1, & 0 \\
2m - r''' = 11, & E = 10, & \frac{11}{10}^*, & \text{(schon gefundener Bruch).} &
\end{array}$$

Folglich die zweite Wurzel $x = 1, 1, 3\,[1, 5]$.

Sind einmal die beiden Wurzeln in Kettenbrüche entwickelt, so lassen sich die Näherungsbrüche, welche nichts anders als bis auf bekannte Grade genäherte Werthe davon sind, ohne Schwierigkeit bilden. Das in §. 133 Gesagte findet hier seine ganze Anwendung.

§. 144. Es werde irgend ein beliebiger, vollständiger Bruch $z = \frac{\sqrt{t} + \pi}{P}$ hervorgehoben, dessen genäherte ganze Zahl y^i darstellt; der entsprechende Näherungsbruch sei $\frac{p}{p'}$, und $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$ die demselben unmittelbar vorangehenden.

Nach §. 135 ist $x = \frac{n\,z + m}{n'z + m'}$. Substituirt man für z und x ihre vollständigen Bruchwerthe, so kommt $\frac{\sqrt{t} + \alpha}{A} = \frac{n\,(\sqrt{t} + \pi) + Pm}{n'(\sqrt{t} + \pi) + Pm'}$. Reduciren wir auf einerlei Nenner, und setzen die irrationalen Glieder für sich einander gleich, so haben wir

$$\pi n' = An - \alpha n' - Pm', \quad \pi(An - \alpha n') = P\alpha m' - APm + n't.$$

Durch Elimination von π, weil $m'n - mn' = \pm 1$, finden wir

$$(An - \alpha n')^2 = \pm PA + n'^2 t, \text{ oder}$$

$$A\left[\frac{n}{n'}\right]^2 - 2\alpha\left[\frac{n}{n'}\right] - k = \pm\frac{P}{n'^2} \quad . \; . \; . \; (f)$$

Diese Rechnung läuft dahinaus, m und m' zwischen den drei obigen Gleichungen zu eliminiren; und die Gleichung (f) drückt sofort aus, daß der Bruch $\frac{n}{n'}$ einer von den Näherungsbrüchen von x

ist; dabei gilt das Zeichen + oder —, je nachdem dieser Bruch von einer geraden oder ungeraden Rangordnung ist.

Zwei Fälle bieten sich hier dar:

1) Wenn z von ungerader Rangordnung ist, so muß man das Zeichen + nehmen. Alsdann ist aber $\frac{n}{n'}$ von gerader Rangordnung und $>x$. Dasselbe für x in $Ax^2-2\alpha x-k$ substituirt, wird daher ein positives Resultat liefern, was nothwendigerweise zur Folge hat, daß P eine positive Zahl ist; die Nenner der vollständigen Brüche von ungerader Rangordnung sind daher sämmtlich positiv.

2) Ist z von gerader Rangordnung, so muß man das Zeichen — wählen. Liegt nun $\frac{n}{n'}$ zwischen den beiden Wurzeln, so wird für diesen Werth von x das Trinom $Ax^2-2\alpha x-k$ negativ, was abermals mit sich bringt, daß P das Zeichen + hat. Ist aber jener Näherungsbruch kleiner als die beiden Wurzeln, so besitzt P das Zeichen —. Die Nenner der vollständigen Brüche von gerader Rangordnung sind also positiv oder negativ, je nachdem die entsprechenden Näherungsbrüche von ungerader Rangordnung zwischen den beiden Wurzeln liegen oder kleiner als dieselben sind.

Diese Nenner sind also nur in den geraden Rangordnungen negativ, überdem müssen dabei die zwei Wurzeln von x hinlänglich einander genähert sein, um gleichzeitig zwischen die beiden entsprechenden successiven Näherungsbrüche zu fallen; die Anfangsglieder der beiden Kettenbrüche sind alsdann die nämlichen. Da aber die Annäherung mit Hülfe der Kettenbrüche sehr rasch vorschreitet, so wird man bald zu einem Näherungsbruche von gerader Rangordnung gelangen, welcher zwischen den Wurzeln liegt. Von da an bis ins Unendliche können dann keine negative Nenner mehr vorkommen. Nun ist jeder vollständige Bruch größer als 1, der Zähler muß daher, wenn der Nenner P negativ ist, gleichfalls negativ sein; folglich ist π negativ und $>\sqrt{t}$, so daß dieser vollständige Bruch die Form $\frac{\sqrt{t}-\pi}{-P}$ hat.

§. 145. Es seien $\frac{\sqrt{t}+\delta}{D}$, $\frac{\sqrt{t}+\varepsilon}{E}$, $\frac{\sqrt{t}+\varphi}{F}$ .... aufeinanderfolgende vollständige Brüche, die keine negativen Nenner haben,

was schon bei dem ersten von allen stattfindet, sobald der ganzzahlige Bestandtheil den beiden Wurzeln von x nicht gemeinsam zugehört. Die Gleichungen (a) geben $DE+\varepsilon^2=t$; folglich sind $D, E, \varepsilon^2 < t$; daher

$$D, E, F \ldots < t; \ \varepsilon, \varphi, \ldots < \sqrt{t}.$$

Man mache die Annahme, daß $\frac{\sqrt{t}-\varphi}{F}$ erhalten werde. Es ist aber $EF=t-\varphi^2$; ferner $Ey^{IV}=\varepsilon-\varphi$ nach den Gleichungen (a). Die erstere gibt

$$EF=(\sqrt{t}+\varphi)(\sqrt{t}-\varphi), \ \frac{\sqrt{t}-\varphi}{F}=\frac{E}{\sqrt{t}+\varphi};$$

aus der zweiten folgt $Ey^{IV}<\varepsilon$; folglich $E<\sqrt{t}$, und unser vollständiger Bruch <1, was nicht möglich ist. Die Theile $\alpha, \beta \ldots$ können sich daher wohl auch negativ herausstellen, so lange man negative Nenner findet; über diese Grenze hinaus werden sie aber alle das Zeichen + haben, und die Gleichung $Ey^{IV}=\varepsilon+\varphi$ gibt alsdann $E<\varepsilon+\varphi$, oder $E<2\sqrt{t}$; die Nenner können also nicht das Doppelte von $\sqrt{t}$ erreichen. Da die Größen $\varepsilon, \varphi \ldots, D, E \ldots$ positive, ganze Zahlen sind, ihre Anzahl aber unendlich groß ist, sie überdem in bestimmte Grenzen eingeschlossen werden; so muß man früher oder später irgend einen schon gefundenen vollständigen Bruch, mithin auch die nachfolgenden vollständigen Brüche mit dem nämlichen darin enthaltenen Ganzen, wieder bekommen. Die Glieder des Kettenbruches kehren also in derselben Ordnung wieder, d. h., nach einer gewissen Anzahl von Anfangsgliedern wird der Kettenbruch periodisch, was man schon an den behandelten Beispielen gesehen hat.

Zu bemerken ist, daß man der Periode [a, b, c, ... g, h] die Form a[b, c ... g, h, a,], oder a, b [c, ... g, h, a, b], u. s. w. geben kann, indem man sie bei einem beliebigen Gliede beginnen läßt, wofern man die weggestrichenen Anfangsglieder ans Ende der Periode stellt. Die Periode besteht zwar noch aus den nämlichen Gliedern, sie befolgen aber eine verschiedene Anordnung. Das Nähere über dergleichen Rechnungen möge noch durch folgende zwei Beispiele erläutert werden:

I. Die Gleichung $59x^2-319x+431=0$ multiplicire man durch 2, damit der zweite Coefficient eine gerade Zahl werde.

Man findet successive folgende Resultate:

$$x=\frac{\sqrt{45}+319}{118}=2+,\ \frac{\sqrt{45}-83}{-58}=1+,\ \frac{\sqrt{45}+25}{10}=3+,$$

$$\frac{{}^*\sqrt{45}+5}{2}=5+,\ \frac{\sqrt{45}+5}{10}=1+,\ \frac{{}^*\sqrt{45}+5,}{2}=5+,\ \text{u. s. w.};$$

folglich $x=2,\ 1,\ 3\ [5,\ 1]$.

Für die zweite Wurzel hat man:

$$x=\frac{319-\sqrt{45}}{118}=2+,\ \frac{\sqrt{45}+83}{58}=1+,\ \frac{\sqrt{45}-25}{-10}=1+,$$

$$\frac{\sqrt{45}+15}{18}=1+,\ \frac{\sqrt{45}+3}{2}=4+,\ \frac{\sqrt{45}+5}{10}\ \text{wie oben};$$

also $x=2,\ 1,\ 1,\ 1, 4\ [1, 5]$.

II. Für die Gleichung $1801x^2-3991x+2211=0$ findet man:

$$x=\frac{\sqrt{37}+3991}{3602}=1+,\ \frac{\sqrt{37}-389}{-42}=9+,\ \frac{\sqrt{37}+11}{2}=8+,$$

$$\frac{{}^*\sqrt{37}+5}{6}=1+,\ \frac{\sqrt{37}+1}{6}=1+,\ \frac{\sqrt{37}+5}{2}=5+,\ \frac{{}^*\sqrt{37}+5}{6};$$

folglich $x=1,\ 9,\ 8\ [1,\ 1,\ 5]$.

Die zweite Wurzel wird auf die nämliche Art gefunden; dieselbe ist $x=1,\ 9,\ 2,\ 2\ [5, 1, 1]$

§. 146. Man nehme an, daß die Periode schon im ersten Gliede beginne, mithin $x=[a, b, c, d]$, was auf $x=a, b, c, d, 'x$ zurückkommt. Hieraus zieht man, wenn die Glieder gehörig auf die andere Seite geschafft werden:

$$a-x=-\left[\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{x}\right],\ \frac{1}{a-x}=-\left[b+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{x}\right],$$

$$b+\frac{1}{a-x}=-\left[\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{x}\right],\ \frac{1}{b+\frac{1}{a-x}}=-\left[c+\frac{1}{d}+\frac{1}{x}\right],$$

$$d+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a-x}=-\frac{1}{x},\ -x=\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a-x}.$$

Durch fortwährendes Substituiren dieses Werthes von $-x$ in $a-x$, findet man endlich

$$-x=0, d, c, b, a, d, c \ldots = 0(d, c, b, a).$$

Wenn daher die Periode einer der Wurzeln schon im ersten Gliede ihren Anfang nimmt, so wird die andere Wurzel zwischen 0 und -1 liegen, und ihre Periode aus den nämlichen Gliedern, in umgekehrter Ordnung geschrieben, bestehen.

Umgekehrt ist eine der Wurzeln von $x>1$, und wird die andere zwischen 0 und -1 eingeschlossen; so haben diese Wurzeln die Form:

$$x=[a, b, c \ldots g, h], -x=0\,[h, g, \ldots c, b, a],$$

In der That entsteht aus $x=y+\frac{1}{x'}$, $x'=\frac{1}{x-y}$. Da nun eine der Wurzeln zwischen 0 und -1 liegend angenommen wird, so werden die beiden Werthe von x' denselben Bedingungen, wie die von x, Genüge thun, nämlich die eine >1 sein, und die andere sich zwischen 0 und -1 befinden. Dasselbe gilt auch von x'' in $x'=y'+\frac{1}{x''}$, u. s. f.

Hätte man jetzt $x=y[a, b \ldots g, h]$, wo das erste Glied y allein der Periode nicht angehört, so würde man haben $x'=[a, b, \ldots g, h]$, folglich, wie so eben bewiesen worden, $-x'=0[h, g \ldots b, a]$. Hieraus $\frac{1}{x'}=-\left[h+\frac{1}{g+\text{ꝛc.}}\right]$; der zweite Werth von x wäre demnach $x=y+\frac{1}{x'}=y-h-\left[\frac{1}{g+\text{ꝛc.}}\right]$. Damit diese Größe, wie die Annahme verlangt, noch zwischen 0 und -1 liege, müßte $y=h$ sein, und die erste Wurzel wäre daher $x=[h, a, b \ldots g]$, so daß $y=h$ zur Periode gehören würde, was unserer Annahme widerstreitet. Die Periode kann also nicht im zweiten Gliede des Kettenbruches ihren Anfang nehmen. Aus ähnlichem Grunde darf man nicht $x'=y'[a, b \ldots h]$, oder $x=y \cdot y'[a, b \ldots]$ setzen, d. h. die Periode im dritten Gliede anfangen lassen; u. s. f.

Die Gleichung $10x^2-14x=5$ gibt $x=\frac{7\pm\sqrt{99}}{10}$, und die Wurzeln sind $x=[1, 1, 2, 3]$, $-x=0[3, 2, 1, 1]$. Für die Gleichung $5x^2-7x=3$ findet man

$x=\frac{7\pm\sqrt{109}}{10}$, $x=[1, 1, 2, 1, 9, 1, 2]$, und $-x=0\,[2, 1, 9, 1, 2, 1, 1]$.

§. 147. Ereignet es sich, daß die Periode im ersten Gliede schon beginnt, und überdem symmetrisch ist, d. h., daß sie als dieselbe erscheint, wenn man sie rückwärts liest, mithin die von den äußersten gleich weit abstehenden Glieder einander gleich sind; so haben die beiden Wurzeln einerlei Periode. In diesem Falle sind x und $-\frac{1}{x}$ einander gleich, d. h. die vorgelegte Gleichung wird nicht geändert, wenn man x mit $-\frac{1}{x}$ vertauscht; die Form der Gleichung ist daher $Ax^2-Bx=A$.

Die Wurzeln der Gleichung $7x^2-8x=7$ sind $x=\frac{4\pm\sqrt{65}}{7}$. Man findet die erste $x=[1, 1, 2, 1, 1]$, die zweite $-x=0[1, 1, 2, 1, 1]$.

§. 148. Die vorgelegte Gleichung sei $x^2-2\alpha x=k$ .... Setzen wir $A=1$ in den Formeln des Paragraphen 141, so kommt $x=\alpha\pm\sqrt{t}$. Trifft es sich, daß die größte in $\sqrt{t}$ enthaltene Zahl gerade α macht; so ist die eine Wurzel >1, und die zweite liegt zwischen 0 und -1: diese zwei Wurzeln haben daher die Form $x=[2m, a, b\,..\,g, h]$, $-x=0[h, g\,...\,a, 2m]$. Ziehen wir m von x ab, so erhalten wir für die zwei Werthe von $\pm\sqrt{t}$:

$$\sqrt{t}=m\,[a, b\,...\,g, h, 2m], \quad -\sqrt{t}=-m\,[h, g\,..\,a, 2m].$$

Man weiß aber, daß diese zwei Ausdrücke einander gleich und mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind; folglich $a=h, b=g, ...$ so daß die Entwicklung von $\sqrt{t}$ in einen Kettenbruch liefert: $\sqrt{t}=m\,[a, b\,...\,b, a, 2m]$. Hieraus ergibt sich:

1) Die Periode von $\sqrt{t}$ fängt im zweiten Gliede an.

2) Das letzte Glied dieser Periode beträgt das Doppelte des Anfangsgliedes, das keinen Bestandtheil derselben ausmacht.

3) Die Periode ist, abgesehen vom letzten Gliede, symmetrisch, d. h. sie bleibt unverändert, wenn man sie rückwärts liest.

Man findet $\sqrt{61}=7\,[1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14]$.
$\sqrt{19}=4\,[2, 1, 3, 1, 2, 8]$.

Das Glied 2 in der Mitte von $\sqrt{61}$ findet sich wiederholt, ein Umstand, der bei $\sqrt{19}$ nicht vorkommt; es rührt dieß daher, daß die Anzahl der Glieder der Periode in dem einen Falle ungerade, und in dem andern gerade ist.

Die hinten stehende Tafel I (Seite 237) gibt die Perioden der Quadratwurzeln der ganzen Zahlen bis zu 78 an. Man hat daselbst öfters nur die Hälfte der Periode aufgenommen, indem das mittlere Glied mit dem Zeichen ″, wenn es wiederholt wird, hingegen mit dem Zeichen ′ versehen wird, wenn es nur einmal geschrieben werden sollte. Auch hat man zuweilen die größte in $\sqrt{t}$ enthaltene Zahl, welche den Anfang macht, weggelassen.

Um den Werth von $\frac{\alpha\pm\sqrt{t}}{A}$ annäherungsweise zu finden, setzt man statt $\sqrt{t}$ einen der Näherungsbrüche, welche man bei der Entwicklung in einen Kettenbruch erhält, so wie ihn unsere Tafel I gibt, oder wie man ihn auf direkte Art ableitet, wobei die symmetrische Form der Periode gestattet, nur die Hälfte der Glieder davon zu berechnen. Für unser erstes Beispiel $x=\frac{39\pm\sqrt{45}}{18}$ finden wir:

$\sqrt{45}=6[1, 2, 2, 2, 1, 12]$, woraus $\sqrt{45}=\frac{658806}{98209}$, ein bis auf die 10te Decimalstelle genauer Werth; und

$$x=\frac{39}{18}\pm\frac{1}{18}\sqrt{45}=2{,}1666\cdot\pm0{,}37267799625 \ldots\ldots$$ Endlich

$x=2{,}53934466291$, und $x=1{,}79398867041$.

§. 149. Es wird uns in der Folge von Nutzen sein, bei der Entwicklung von $\sqrt{t}$ die vollständigen Brüche, deren Nenner 1 ist, zu kennen, nämlich $z=\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}$, und $P=1$. Die größte im Zähler enthaltene ganze Zahl ist $m+\pi$, demnach $\frac{\sqrt{t}+\pi}{1}=m+\pi+\frac{1}{z'}$, woraus $z'=\frac{1}{\sqrt{t}-m}=\frac{\sqrt{t}+m}{t-m^2}$. Dieser Bruch ist aber gerade derjenige, welcher das Anfangsglied der Periode und weiterhin ihre übrigen Glieder bestimmt; woraus erhellet, daß man in der Entwicklung von $\sqrt{t}$ keinen andern vollständigen Bruch mit dem Nenner 1 finden kann, als den ersten $x=\frac{\sqrt{t}+0}{1}=m+$, und den Bruch $\frac{\sqrt{t}+m}{1}=2m+$, welcher das letzte Glied $2m$ der Periode bei ihrem jedesmaligen Wiederkehren hervorbringt. Da $\pi<\sqrt{t}$ sein muß, so ist m der größte Werth, welchen jenes π erreichen kann; überdem ist

$2m$ das größte Glied des Bruches, und entspringt bloß aus dem Nenner $P=1$.

Anmerkung. Es seien $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungswerthe von $\sqrt{t}$, ferner $\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}$ der dem convergirenden $\frac{n}{n'}$ entsprechende vollständige Bruch. Wir haben alsdann

$$\sqrt{t}=\frac{n\left[\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}\right]+m}{n'\left[\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}\right]+m'}=\frac{n\sqrt{t}+n\pi+mP}{n'\sqrt{t}+n'\pi+m'P} \text{(Formel G, §. 135)},$$

woraus die beiden Gleichungen

$$n't=n\pi+mP,\ n=n'\pi+m'P$$

entspringen, die

$$m'n't-mn=(nm'-mn')\pi, \text{ und } n^2-n'^2t=(nm'-mn')P$$

geben. Es ist aber der Eigenschaft der Kettenbrüche zufolge $nm'-mn'=\pm1$, je nachdem $\frac{n}{n'} >$ oder $<\sqrt{t}$ ist; woraus hervorgeht, daß $n^2-n'^2t$ und $nm'-mn'$ stets einerlei Zeichen haben, mithin ist P immer positiv. Ebenso verhält es sich mit π; denn einerseits folgt aus der Gleichung $n=n'\pi+m'P$,

$$\frac{\frac{n}{n'}-\pi}{P}=\frac{m'}{n'},$$ also, weil m' von n' übertroffen wird, $P>\frac{n}{n'}-\pi$ oder $P>\sqrt{t}-\pi$; andererseits hat man $\frac{\sqrt{t}+\pi}{P}>1$, oder $P<\sqrt{t}+\pi$, welche zwei Bedingungen sich widersprechen, wenn π negativ ist.

§. 150. Es ist jetzt leicht eine Wurzel aus der andern, welche als bekannt ersehen wird, herzuleiten. Es sei nämlich gegeben: $x=p, q, \ldots u\,[a, b, \ldots f, g, h]$. Setzen wir $z=[a, b, \ldots f, g, h]$, so haben wir außerdem $-z=0[h, g, f, \ldots b, a]$. Durch Substitution des einen oder des andern dieser Werthe in $x=p, q \ldots u, z$ ergeben sich die beiden Wurzeln von x. Da der zweite Kettenbruch aus einem Glied 0 und negativen Theilen zusammengesetzt ist, so befreien

wir ihn erst davon mit Hülfe folgender Relationen, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann, nämlich:

$$(e)\ \frac{1}{0+\frac{1}{s}} = s,\ -\frac{1}{\varphi} = -1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{\varphi-1}\ (k)$$

Die zweite Wurzel $x = p, q \ldots u, 0 - [h, g \ldots b, a]$ wird hiernach

$$x = p, q \ldots (u-h) - \left[\frac{1}{g} + \frac{1}{f}\text{ ꝛc.}\right];$$

wir schaffen alsdann die negativen Zeichen weg, indem wir $\varphi = g + \frac{1}{f}$ ꝛc. in der Gleichung (k) setzen.

Es sei z. B. $x = 1, 7\ [1, 1, 1, 3, 3, 2] = 1, 7, z$, indem man $z = [1, 1, 1, 3, 3, 2]$ setzt, mithin $-z = 0[2, 3, 3, 1, 1, 1]$. Man hat für die zweite Wurzel

$$x = 1 + \frac{1}{7} - 2 - \left(\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\text{ ꝛc.}\right) = 1 + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3+}\frac{1}{3}\text{ ꝛc.}\right).$$

Setzt man $\varphi = 3 + \frac{1}{3} +$ ꝛc., $-\frac{1}{\varphi} = -1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3}$ ꝛc.,

so kommt $x = 1 + \frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3}$ ꝛc. $= 1, 4, 1, 2[3, 1, 1, 1, 2, 3]$

$= 1, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 1\ [2, 3, 3, 1, 1, 1]$.

Es sei noch $x = 1, 6[3, 2, 2] = 1, 6, z$, wo $z = [3, 2, 2]$.

Die zweite Wurzel ist

$$x = 1 + \frac{1}{6} - \left(2 + \frac{1}{2+}\frac{1}{3}\text{ ꝛc.}\right) = 1 + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2+}\frac{1}{3}\text{ ꝛc.}\right).$$

Schreibt man in (k), $\varphi = 2 + \frac{1}{3}$ so kommt

$$x = 1 + \frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2}\text{ ꝛc.} = 1, 3, 1, 1\ [3, 2, 2]$$

$= 1, 3, 1, 1, 3\ [2, 2, 3]$.

Entwickelt man also die beiden Wurzeln einer Gleichung vom zweiten Grade in Kettenbrüche, so sind diese Kettenbrüche periodisch, und zwar hat der Kettenbruch, welcher die zweite Wurzel ausdrückt, die umgekehrte Periode des ersten.

§. 151. Aus einem gegebenen periodischen Bruche die Gleichung zu finden, deren Wurzel er ist.

I. Fall. Die Periode nehme im ersten Gliede ihren Anfang. $z=[a, b, \ldots g, h]$. Wir suchen zu diesem Behufe die beiden, den Endgliedern der Periode entsprechenden Näherungswerthe

$$\frac{m}{m'}=a, b \ldots g, \quad \frac{n}{n'}=a, b \ldots g, h.$$

Es ist aber $z=\frac{nz+m}{n'z+m'}$ nach Formel (G) §. 135, woraus

$$n'z^2-(n-m')z=m \quad \ldots . (1).$$

So z. B. aus $z=[1, 1, 2, 1]$ finden wir

$$\frac{5}{3}=1, 1, 2 \text{ und } \frac{7}{4}=1, 1, 2, 1; \text{ folglich}$$

$$z=\frac{7z+5}{4z+3}, \text{ oder } 4z^2-4z=5,$$

welche in der That $z=[1, 1, 2, 1]$ und $-z=0[1, 2, 1, 1]$ zu Wurzeln hat.

Besteht die Periode nur aus einem Gliede $z=[p]$, woraus $z=p+\frac{1}{z}$; so hat man $z^2-pz=1$. Besteht sie aus zwei Gliedern $z=[p, q]$, woraus

$$z=p+\frac{1}{q}+\frac{1}{z};$$

so erhält man $qz^2-pqz-p=0$, der Coefficient des zweiten Gliedes stimmt daher mit dem Produkte der beiden äußersten Coefficienten überein; und in der That ergibt sich aus der Gleichung $qz(z-p)=p$ folgende:

$$z-p=\frac{p}{qz}, \quad z=p+\frac{p}{qz}=p+\frac{1}{q}+\frac{1}{z},$$

wenn man für qz seinen Werth $pq+\frac{p}{z}$ substituirt.

II. Fall. Der Periode gehe ein nicht regelmäßiger Theil voran. $x=y, y', y'' \ldots [a, b \ldots g, h]$. Die Periode durch z darstellend, was uns auf die Gleichung (1) führt, haben wir $x=y, y', y'' \ldots z$. Indem wir die beiden Näherungswerthe $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$, welche den Endgliedern des unregelmäßigen Theils angehören, berechnen, entsteht

$$x=\frac{nz+m}{n'z+m'}, \text{ woraus } z=-\frac{m'x-m}{n'x-n}.$$

Es bleibt jetzt noch übrig, diesen Werth von z in die Gleichung (1) einzuführen, wodurch wir eine Gleichung vom zweiten Grade in x erhalten, deren eine Wurzel durch den gegebenen Kettenbruch ausgedrückt wird.

Jeder periodische Kettenbruch ist also die Wurzel einer Gleichung vom zweiten Grade. Es sei

$$x=1, 1, 3\,[1, 1, 2, 1]=1, 1, 3, z.$$

Man hat zuvörderst die Näherungsbrüche $\frac{2}{1}$ und $\frac{7}{4}$, woraus

$$x=\frac{7z+2}{4z+1}, \quad z=-\frac{x-2}{4x-7}.$$

Substituiren wir diesen Werth in die Gleichung $4z^2-4z=5$, welche wir für $z=[1, 1, 2, 1]$ gefunden haben; so kommt $60x^2-204x+173=0$. Und in der That gibt die größte Wurzel $x=\frac{102+\sqrt{24}}{60}$ in einen Kettenbruch verwandelt den vorgelegten Bruch.

Die zweite Wurzel ist

$$x=\frac{102-\sqrt{24}}{60}=1, 1, 1, 1, 1, 1\,[1, 1, 1, 2].$$

Es sei noch $x=1, 6\,[3, 2, 2]$. Für $z=[3, 2, 2]$ haben wir die Näherungsbrüche $\frac{7}{2}$ und $\frac{17}{5}$, ferner $5z^2-15z=7$. Außerdem ist $x=1, 6, z$, was uns die Näherungswerthe $\frac{1}{1}$, $\frac{7}{6}$, und die Gleichung $z=-\frac{x-1}{6x-7}$ gibt. Substituiren wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, so kommt $157x^2-383x+233=0$. Und in der

That sind die Wurzeln dieser Gleichung $x = \frac{383 \pm \sqrt{365}}{314}$. Die oben auseinander gesetzten Rechnungen mit der zweiten Wurzel vorgenommen, geben für den Werth von x den vorgelegten Kettenbruch, während die andere Wurzel $x = 1, 3, 1, 1, 3\,[2, 2, 3]$ ist.

Anmerkung. Aus der Gleichung $x = \frac{p + \sqrt{(p^2+4)}}{2}$ folgt:

$$\frac{\sqrt{(p^2+4)}}{2} = \frac{p}{2} + x = \frac{p}{2} + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p \text{ u. s. w.}}}}$$

Der aus einer Periode p bestehende Kettenbruch $[p]$ kann also füglich zur Berechnung der Quadratwurzel der Zahl $\sqrt{(p^2+4)}$ benutzt werden. Setzt man $p=2$, so kommt

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \text{ u. s. w.}}}}$$

I. Tafel der Perioden von $\sqrt{t}$. (Siehe §. 148).

t.	Periode.	t.	Periode.	t.	Periode.	t.	Periode.	t.	Periode.
2	1(2)	19	2.1.3′	34	(1.4.1.10)	50	7(14)	65	8(16)
3	1(1.2)	20	4(2.8)	35	5(1.10)	51	7(7.14)	66	8(8.16)
5	2(4)	21	1.1.2′	37	6(12)	52	4.1.2′	67	5.2.1.1.7′
6	2(2.4)	22	1.2.4′	38	6(6.12)	53	(3.1.1.3.14)	68	8(4.16)
7	2(.1.1.1.4)	23	1.3′	39	6(4.12)	54	2.1.6′	69	3.3.1.4′
8	2(1.4)	24	4(1.8)	40	6(3.12)	55	(2.2.2.14)	70	2.1.2′
10	3(6)	26	5(10)	41	6(2.2.12)	56	7(2.14)	71	2.2.1.7′
11	3(3.6)	27	5(5.10)	42	6(2.12)	57	1.1.4′	72	8(2.16)
12	3(2.6)	28	3.2′	43	1.1.3.1.5′	58	1.1.1″	73	1.1.5″
13	(1.1.1.1.6)	29	2.1″	44	1.1.1.2′	59	1.2.7′	74	(1.1.1.1.16)
14	(1.2.1.6)	30	5(2.10)	45	1.2.2′	60	1.2′	75	(1.1.1.16)
15	3(1.6)	31	1.1.3.5′	46	1.3.1.1.2.6′	61	1.4.3.1.2″	76	1.2.1.1.5.4′
17	4(8)	32	1.1′	47	6(1.5.1.12)	62	7(1.6.1.14)	77	1.3.2′
18	4(4.8)	33	1. 2′	48	6(1.12)	63	7(1.14)	78	(1.4.1.16)

II. Tafel der Perioden der Reste von x^2, dividirt durch m. (Siehe §. 152).

m.	Perioden.	m.	Per. 1.4.9.16.	m.	Perioden 1.4.9.16.25.36.
5	(1.4.4.1.0)	17	8.2.15.13″...	37	12.27.7.26.10.33.21.11.3.34.30.28″...
6	(1.4.3.4.1.0)	19	6.17.11.7.5″...		
7	1.4.2″..	21	4.15.7.1.18.16″	41	8.23.40.18.39.21.5.32.20.10.2.37.
8	1.4.1.0′...	23	2.13.3.18.12.8.6″		33.31.″...
9	1.4.0.7.″...	25	0.11.24.14.6.0.	43	6.21.38.14.35.15.40.24.10.41.31.23.
10	1.4·9.6.5′...		21·19″...		17.13.11″.
11	1.4·9.5.3″...	27	25.9.22.10.0.19.	47	2.17.34.6.27.3.28.8.37.21.7.42.32.
12	1.4.9.4.1.0′		13.9.7″...		24.18.14.12″...
13	1.4.9.3.12.10″	29	25.7.20.6.23.13.5	49	0·15.32.2.23.46.22.0.29.11.44.30.
14	1.4.9.2.11.8.7′		28.24.22″		18.8.0.43.39.37.″...
15	1.4.9.1.10.6.4″	31	25 5.18.2.19.7.28.	53	49.11.28.47.15.38.10.37.13.44.24.
16	1.4.9.0.9.4.1.0′		20.14.10.8″		6.43.29.17.7.52.46.42.40″.

Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

§. 152. Wir wollen vorerst die Gleichung $my=x^2\pm a$ in ganzen Zahlen auflösen, d. h. die Größe $\frac{x^2-r}{m}$ zu einer ganzen Zahl machen, wobei r den negativen Rest ($<m$), welchen a dividirt durch m liefert, darstellt. Die aus der Division von x^2 durch m entspringenden Reste bieten, wenn nach und nach $x=1,2,3,\ldots$ gesetzt wird, eine sehr merkwürdige Eigenschaft dar.

Ist nämlich m gerade, so werde $x=\frac{1}{2}m\pm\alpha$ genommen. Alsdann hat man

$$\frac{x^2}{m}=\frac{\frac{1}{4}m^2\pm m\alpha+\alpha^2}{m}=\pm\alpha+\frac{\frac{1}{4}m^2+\alpha^2}{m};$$

die Reste stimmen folglich mit einander überein, wenn man für x die beiden Zahlen $\frac{1}{2}m\pm\alpha$ nimmt. Dergestalt werden für $x=0,1,2,3\ldots m$ die Reste, welche $\frac{x^2}{m}$ gibt, wieder in umgekehrter Ordnung zum Vorschein kommen, wenn man über $x=\frac{1}{2}m$ hinausgegangen ist. So erhält man für den Divisor 14 die folgenden Reste:

1, 4, 9, 2, 11, 8, 7, 8, 11, 2, 9, 4, 1.

Ist m ungerade, so sind $\frac{1}{2}(m\pm1)$ gerade Zahlen. Indem man $x=\frac{1}{2}(m\pm1)\pm\alpha$ setzt, hat man $x^2=\frac{1}{4}(m\pm1)^2\pm\alpha(m\pm1)+\alpha^2$, wo die Zeichen $\pm$ sich gegenseitig entsprechen. Wenn man nun durch m dividirt, so findet man, es mag das obere oder untere Zeichen genommen werden, daß der Rest der Division mit dem von $\frac{1}{4}(m^2+1)+\alpha+\alpha^2$ gleichlautend ist; für diese zwei Werthe von x sind also die Reste von x^2 dividirt durch m abermals dieselben. Ist man über $x=\frac{1}{2}(m-1)$ hinausgekommen, so findet man die nämlichen Reste in umgekehrter Ordnung wieder. Das mittlere Glied erscheint hier doppelt. Für den Divisor 17 sind die successiven Reste folgende:

1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13, 13, 15, 2, 8, 16, 9, 4, 1.

Ist $x>m$, nämlich $x=tm+\alpha$, so hat man den nämlichen Rest, wie wenn $x=\alpha<m$ gesetzt wäre, weil

$$\frac{x^2}{m}=t^2m+2\alpha t+\frac{\alpha^2}{m}.$$

Hieraus ergeben sich mehrere Folgerungen:

1) Nimmt man $x=1, 2, 3 \ldots$ bis ins Unendliche fort, so wiederholen sich die Reste der Division von x^2 durch m, und bilden eine aus m Gliedern bestehende Periode. Die Tafel II gibt diese Periode für die einfachsten Divisoren an.

2) Die Größe $\frac{x^2-r}{m}$ kann nur ganzzahlig werden, insofern r ein Glied jener Periode ausmacht. Bezeichnet α die Rangordnung dieses Gliedes, so erhält man für $x=\alpha$ bei der Division von x^2 durch m den Rest r, und man hat in der Gleichung $x=tm\pm\alpha$, wo t eine beliebige ganze Zahl bedeutet, eine unendliche Anzahl von Auflösungen.

3) Jedesmal wenn r in die Periode fällt, hat man einen Werth von α und eine ähnliche Gleichung, welche ein System von Auflösungen in sich begreift.

4) Man braucht blos die halbe Periode zu berücksichtigen, weil das Wiederkehren des Restes in den von den äußersten gleichweit entfernten Stellen α und $m-\alpha$ eintritt, und aus dem letztern Werthe keine neue Auflösung weiter hervorgeht.

Man bemerke, daß im Fall m einem Produkte pp' gleichgeltend ist, x^2-r nur durch m theilbar wird, insofern es durch p und p' sich gleichzeitig theilen läßt. Man wird daher $\frac{x^2-r}{p}$ und $\frac{x^2-r}{p'}$ durch geeignete Werthe wie $x=tp\pm\alpha$, $x=t'p'\pm\alpha'$ ganzzahlig machen. Es bleibt hierauf nur noch übrig, diese Auflösungen mit einander in Uebereinstimmung zu bringen; denn die Werthe von t und t' müssen dergestalt gewählt werden, daß sie für x die nämliche Zahl liefern. Man wird alsdann

$$\frac{x^2-r}{p}, \quad \frac{x^2-r}{p'}, \quad \frac{x\pm\alpha}{p}, \quad \frac{x\pm\alpha'}{p'}$$

gleich ganzen Zahlen setzen, (siehe niedere Algebra §. 31). Wenn p selbst in zwei Faktoren zerlegbar ist, wird man den ersten Bruch durch zwei andere ersetzen, u. s. f.

Beispiele. I. Die Gleichung $13y=x^2+40$ gibt $\frac{x^2+40}{13}$ oder $\frac{x^2-12}{13}=$ einer ganzen Zahl. In der halben Periode des Divisors

13 findet sich der Rest 12 erst in der 5ten Stelle; folglich $x = 13\,t \pm 5$.

II. Der Gleichung $x^2 = 17y + 7$ durch ganze Zahlen Genüge zu thun, ist nicht möglich, weil 7 sich in der Periode des Divisors 17 nicht vorfindet.

III. Für die Gleichung $x^2 - 4 = 12y$ haben wir $x = 12t \pm 2$ und ± 4, weil 4 in der 2ten und 4ten Stelle der halben Periode des Divisors 12 vorkommt.

IV. Um die Gleichung $315y = x^2 - 46$ in ganzen Zahlen aufzulösen, wird man $x^2 - 46$ durch 9, 7 und 5 theilbar machen, weil 315 $= 9 \cdot 7 \cdot 5$. Hiernach, wenn man die Ganzen auszieht,

$$\frac{x^2-1}{9},\ \frac{x^2-4}{7},\ \frac{x^2-1}{5} =$$

ganzen Zahlen.

Die Perioden dieser Divisoren liefern $\alpha = 1$, $\alpha' = 2$, $\alpha'' = 1$; man muß daher, ohne gegenseitige Bezugnahme der Zeichen $\pm$, die Größen

$$\frac{x \pm 1}{9},\ \frac{x \pm 2}{7},\ \frac{x \pm 1}{5}$$

ganzzahlig machen.

Man findet endlich $x = 315t \pm k$, wobei k irgend eine von den vier Zahlen 19, 89, 26 und 44 bedeutet. Hieraus

$\pm x = 19, 26, 44, 89, 226, 271 \ldots$ und $y = 1, 2, 6, 25, 162, 233 \ldots$

§. 153. Um die Gleichung $my = ax^2 + 2bx + c$ in ganzen Zahlen aufzulösen, multipliciren wir mit a, was uns gibt

$$ay = \frac{(ax+b)^2 - (b^2 - ac)}{m} = \frac{z^2 - D}{m},$$

indem $ax + b = z$, $b^2 - ac = D$ gesetzt wurde. Man sucht zuerst die Auflösungen $z = mt \pm \alpha$, welche den Bruch $\frac{z^2 - D}{m}$ auf eine ganze Zahl bringen. Alsdann löst man die Gleichung vom ersten Grad $ax + b = mt \pm \alpha$ auf, d. h. man nimmt nur diejenigen ganzen Werthe von t, welche x ganzzahlig machen. Wenn a und m Primzahlen unter sich sind, so wird $z^2 - D$ ein Vielfaches von a und m sein, weil durch a multiplicirt worden ist; das Resultat durch a dividirt wird

sofort geben. Haben a und m einen gemeinschaftlichen Faktor δ, so muß derselbe auch Faktor von $2bx+c$ sein. Man sucht dann vorerst die allgemeine Form der Werthe von x, welche diese Bedingung erfüllen; nach vorgenommener Substitution verschwindet der gemeinsame Faktor δ.

Beispiele. I. Die Gleichung $7y=3x^2-5x+2$ wird mit 2 multiplicirt, damit der Coefficient von x gerade werde. Alsdann ist $a=6$, $b=-5$, $c=4$, $D=1$. Die Größe z^2-1 wird ein Vielfaches von 7 für $z=7u\pm1$. Ueberdem ist $z=6x-5$; folglich $x=7t+1$ und $+3$.

II. Die Gleichung $11y=3x^2-5x+6$ läßt keine Auflösungen in ganzen Zahlen zu.

III. Für $15y=6x^2-2x+1$ verwandelt man zuvörderst $2x-1$ in ein Vielfaches von 3, dem gemeinsamen Factor von 15 und 6, nämlich $x=x'+2$. Dadurch entsteht $5y=18x'^2+22x'+7$. Zieht man die Ganzen heraus, so erübrigt noch, $3x'^2+2x'+2$ zu einem Vielfachen von 5 zu machen. Man findet:

$$z=5t=3x'+1;\ \text{folglich}\ x'=3,\ x=11,\ \text{ferner}\ x=15t'+11.$$

§. 154. Es handle sich jetzt darum, die Gleichung $az^2+2byz+cy^2=M$ in ganzen Zahlen aufzulösen. Wir haben hier vier Fälle zu unterscheiden.

I. Fall. Es sei $b^2-ac=0$. Indem wir die Gleichung durch a multipliciren, wird der erste Theil derselben ein vollständiges Quadrat; nämlich $(az+by)^2=aM$; es muß daher aM ebenfalls ein Quadrat h^2 darstellen, widrigenfalls ist das Problem ungereimt. Es bleibt demnach noch die unbestimmte Gleichung $az+by=\pm h$ aufzulösen übrig. Für $4z^2-20zy+25y^2=49$ setzt man $2z-5y=\pm7$; woraus $y=2t\mp1$, $z=5t\pm1$.

II. Fall. Es sei $b^2-ac<0$. Die vorgelegte Gleichung kommt dann auf:

$$(az+by)^2+Dy^2=aM,\ u^2+Dy^2=aM$$

zurück, wenn man $b^2-ac=-D$, $az+by=u$ macht.

Demnach muß M positiv sein. Man setzt hierauf $y=0, 1, 2, \ldots$, und behält nur diejenigen Werthe bei, welche $aM-Dy^2$ zu einem vollständigen Quadrat machen. Die Anzahl dergleichen Versuche ist

begrenzt, weil $Dy^2 < aM$. Sind y und u einmal bestimmt, so nimmt man nur diejenigen Zahlen, für welche sich z als ganze Zahl herausstellt.

Für $3z^2-2zy+7y^2=27$ findet man

$(3z-y)^2+20y^2=81$, $81-20y^2=u^2$, $3z-y=u$. Hieraus $\pm y=0$ und 2, $\pm u=9$ und 1, $\pm z=3$ und 1.

III. Fall. Es sei b^2-ac eine positive, quadratische ganze Zahl k^2. Wird abermals das Ganze durch a multiplicirt, der erste Theil in seine Faktoren zerlegt; so ist die vorgelegte Gleichung gleichgeltend mit

$$[az+y(b+k)][az+y(b-k)]=aM.$$

Bezeichnen f und g zwei Faktoren, welche aM hervorbringen, und setzen wir sie denen des ersten Theils gleich; so kommt

$$y=\frac{f-g}{2k},\ z=\frac{f-y(b+k)}{a}.$$

Nachdem man also aM auf alle mögliche Arten in zwei Faktoren zerlegt hat, nimmt man diese nach und nach, den einen für f, den andern für g an, und behält nur diejenigen Systeme bei, welche vorerst y und dann z in ganzen Zahlen bestimmen. Zu diesen Auflösungen sind dann noch jene hinzuzufügen, welche man dadurch erhält, daß man den Faktoren f und g die entgegengesetzten Zeichen beilegt.

Die Gleichung $2z^2+9yz+7y^2=38$ wird verdoppelt, um den Coefficienten von yz in eine gerade Zahl zu verwandeln.

Man hat dann

$$a=4,\ b=9,\ c=14,\ k=5,\ aM=304.$$

Die Zerfällung von 304 in zwei Faktoren liefert folgende Resultate:

$$2\times152=8\times38=4\times76=1\times304=16\times19,$$

von denen die beiden ersten Systeme allein genügen, und geben

$$\pm y=15 \text{ und } 3,\ \mp z=63 \text{ und } 1.$$

IV. Fall. Es sei b^2-ac eine positive, nicht quadratische ganze Zahl. Um das, was wir hier zu bemerken haben, besser mit dem früher Gesagten vergleichen zu können, wollen wir die vorgelegte Gleichung unter der Form $Az^2-2\alpha zy-ky^2=P$ betrachten. Die irrationalen Wurzeln der Gleichung $Ax^2-2\alpha x=k$, wo $t=\alpha^2+Ak$ eine positive ganze Zahl, aber kein vollständiges Quadrat ist, denke man

sich in Kettenbrüche entwickelt. Aus der Gleichung (f) (§. 144) ergibt sich nun, daß $\frac{n}{n'}$ den dem vollständigen Bruch $\frac{\sqrt{t+\pi}}{P}$ vorhergehenden Näherungswerth ausdrückt, wenn die Bedingungsgleichung

$$An^2-2\alpha nn'-kn'^2=\pm P$$

befriedigt wird; dabei hängt das Zeichen von P von der geraden oder ungeraden Rangordnung jenes Näherungsbruches ab. Stellt man diese Gleichung mit der vorgelegten zusammen, so erkennt man sofort, daß $z=n$ und $y=n'$ der Aufgabe genügen, wenn das Vorzeichen von P beiderseits einerlei ist. Um also die Werthe von y und z zu erhalten, entwickele man die Wurzeln von x in Kettenbrüche. Finden sich dann unter den Brüchen $\frac{\sqrt{t+\alpha}}{A}$, $\frac{\sqrt{t+\beta}}{B}$ .... solche, deren Nenner mit dem zweiten Theil P der vorgelegten Gleichung übereinstimmt; so bleibt man in dem Kettenbruche bei dem durch den vorhergehenden vollständigen Bruch gegebenen Gliede stehen, und sucht hierauf den entsprechenden Näherungswerth $\frac{n}{n'}$, woraus die Auflösung $z=n$, $y=n'$ entspringt. Dabei muß aber dieser Näherungswerth von gerader Rangordnung sein, wenn P positiv ist, und von ungerader, wenn P negativ ist, wofern die Entwicklung der größern Wurzel angehört; das Gegentheil gilt für die kleinere Wurzel. Jeder in einer passenden Stelle befindliche vollständige Bruch liefert eine Auflösung, so daß aus jeder in einer Periode vorgefundenen Auflösung sich unzählig viele andere Werthe für z und y ableiten lassen, welche der vorgelegten Gleichung ebenfalls Genüge thun.

Es sei z. B. die Gleichung $2z^2-14yz+17y^2=5$ gegeben. Im Paragraphen 142 wurde gefunden, daß in der Gleichung $2x^2-14x+17=0$ die kleinere Wurzel $x=1, 1, 1\ (3, 2)$ ist, und daß der zweite vollständige Bruch 5 zum Nenner hat. Der in einer ungeraden Stelle befindliche Näherungsbruch $\frac{1}{1}$ gibt die einzige Auflösung $z=1, y=1$, weil hier die Periode keine weitere Beachtung verdient.

Beträgt der zweite Theil + 3 anstatt 5, so ist die Gleichung durch ganze Zahlen nicht lösbar, weil die vollständigen Brüche, denen der Nenner 3 angehört, geradstellig bei der größern, und ungeradstellig bei der kleinern Wurzel sind, mithin in keiner passenden Stelle sich befinden.

Ist aber der zweite Theil — 3, so bleibt man in der Entwicklung der größern Wurzel $x=5(2,3)$ bei den Stellen 1, 3, 5, 7 . . . stehen, weil die darauf folgenden Brüche 3 zum Nenner haben; daraus entspringen die Näherungsbrüche $\frac{5}{1}, \frac{38}{7}, \frac{299}{55}$ . . . . die ebensoviele Auflösungen liefern. Die kleinere Wurzel $x=1, 1, 1(3, 2)$ gibt ebenso in den Stellen 2, 4, 6 . . . . die Näherungsbrüche $\frac{2}{1}, \frac{11}{7}, \frac{86}{55}$ . . . Folglich hat man für $\pm y=1, 7, 55$ . . . . die zugehörigen Werthe $\pm z=5, 38, 299$ . . . . oder 2, 11, 86 . . .

Macht endlich der zweite Theil 2, so findet man ähnlicherweise

$\pm y=0, 2, 16, 126, 992, \ldots$ mit

$\pm z=1, 11, 87, 685, 5393 \ldots$ oder $1, 3, 25, 197, 1551 \ldots .$

§. 155. Das eben auseinandergesetzte Verfahren gibt zu einigen Bemerkungen Anlaß:

1) Da die Näherungsbrüche nicht weiter reducirbar sind, so erhält man auf solche Weise nur die Auflösungen in relativen Primzahlen. Man nehme daher an, daß die vorgelegte Gleichung durch Zahlen, welche einen gemeinschaftlichen Faktor ϑ besitzen, wie $z=\vartheta z'$, $y=\vartheta y'$, befriedigt werde. Man hat alsdann

$$\vartheta^2(az'^2+2bz'y'+cy'^2)=P,$$

woraus hervorgeht, daß P ein Vielfaches von ϑ^2 ist. Bezeichnet P′ den Quotienten von P durch ϑ^2, so bleibt nur übrig, aus einer der vorgelegten ähnlichen Gleichung, deren zweiter Theil P′ ist, die Werthe z' und y' abzuleiten. Soll demnach die Auflösung nicht bloß in relativen Primzahlen geschehen, so sind ebensoviele Gleichungen, die bloß hinsichtlich ihres zweiten Gliedes $P'=\frac{P}{\vartheta^2}$ sich von einander unterscheiden, aufzustellen und in relativen Primzahlen zu lösen, als P quadratische Faktoren besitzt.

Es sei z. B. die Gleichung $z^2+2zy-5y^2=9$, welche keine Auflösungen in relativen Primzahlen zuläßt. Da $9=3^2$ ist, so löst man die Gleichung $z'^2+2z'y'-5y'^2=1$. Für die Hülfsgleichung $x^2+2x=6$ findet man

$$x=\frac{\sqrt{6}-1}{1}=1+, \frac{{}^*\sqrt{6}+2}{2}=2+, \frac{\sqrt{6}+2}{1}=4+, \frac{{}^*\sqrt{6}+2}{2} \text{ ꝛc.}$$

ferner $x=1(2,4)$, und die Näherungsbrüche, $\frac{1}{0}, \frac{3}{2}, \frac{26}{20}, \frac{287}{198} \ldots$ Die Glieder dieser Brüche sind die gesuchten Werthe von z' und y'. Indem man dieselben oben und unten mit 3 multiplicirt, erhält man endlich

$$\pm z = 3,\ 9,\ 87,\ 861 \ldots \text{ mit } \pm y = 0,\ 6,\ 60,\ 594 \ldots$$

Die zweite Wurzel von x gibt keine neue Auflösung.

2) Da die Nenner der vollständigen Brüche $< 2\sqrt{t}$ sind, so darf man nicht hoffen, wenn P diese Grenze überschreitet, dasselbe unter jenen Nennern anzutreffen; unser Verfahren reicht also hier nicht mehr aus, um die Auflösungen kennen zu lernen. Man setze dann $y = nz + fy'$, wo f einen Faktor von P, dergestalt daß $P = P'f$ ist, und n eine beliebige ganze Zahl darstellt. Substituirt man diesen Werth von y, so kommt

$$\frac{(a+2bn+cn^2)}{f} z^2 + 2y'z(b+cn) + cfy'^2 = P'.$$

Man mache den ersten Coefficienten durch einen schicklichen Werth von n (§. 153) zu einer ganzen Zahl. Bei jedesmaligem Vorkommen von $b^2 - ac$ in der halben Periode des Divisors f wird man Werthe von $\pm n$ erhalten, und ebensoviele Gleichungen von der Form

$$Az^2 + 2By'z + Cy'^2 = P',$$

in denen C, P' und $B^2 - AC$ einerlei sind, zu lösen haben. Man kann hiernach P auf $P' < 2\sqrt{t}$, und selbst bis auf $P' = \pm 1$ reduciren, wenn man $y = nz + Py'$ setzt. Wird $\frac{a+2bn+cn^2}{f}$ für keinen Werth von n, zwischen den angegebenen Grenzen, eine ganze Zahl, so ist die Auflösung unmöglich.

Es sei die Gleichung $66z^2 - 18yz + y^2 = 34$. Nimmt man $f = 17$, so muß $\frac{66 - 18n + n^2}{17}$ eine ganze Zahl werden. Für $n = 2$ und 16 ist diese Bedingung erfüllt. Man erhält damit

$$y = 17y' + 2z \text{ oder } + 16z,\ 2z^2 \pm 14y'z + 17y'^2 = 2.$$

Die eine der transformirten Gleichungen wurde im vorigen Paragraphen gelöst; die andere unterscheidet sich nur rücksichtlich des Zeichens von y'. Man findet endlich folgende Auflösungen:

$\pm z = 1,\ 11,\ 87, \ldots 3,\ 25 \ldots$ mit $\pm y = 2,\ 56,\ 446 \ldots 40,\ 322 \ldots$ oder mit $\pm y = 16,\ 142,\ 1120 \ldots 14,\ 128.$

3) Haben die 3 Zahlen a, $2b$ und c einen gemeinsamen Faktor f, so muß P auch durch f theilbar sein, und man kann diesen Faktor weglassen.

4) Man kann auch nachweisen, daß auf dem vorgeschriebenen Wege alle Auflösungen in ganzen Zahlen gefunden werden, was wir hier unterlassen wollen.

Anmerkungen. 1) Eine der beiden Zahlen x und y besitze mit P einen gemeinschaftlichen Faktor, z. B. $y=fy'$, $P=P'f$. Alsdann kommt

$$\frac{a}{f}z^2+2bzy'+cfy'^2=P';$$

Da nun z, als relative Primzahl gegen y, nicht durch f theilbar ist; so muß $\frac{a}{f}$ eine ganze Zahl sein. So viele gemeinschaftliche Faktoren daher a und P haben, so viele verschiedene Gleichungen erhält man, welche nicht bloß in relativen Primzahlen zu lösen sind, sondern in welchen auch y' und P' keinen gemeinsamen Faktoren mehr besitzen.

2) Es sei $z=\alpha$ und $y=\beta$ eine Auflösung der Gleichung $az^2+2bzy+cy^2=P$. Man setze $z=\alpha z'+ky'$ und $y=\beta z'+ly'$, wo z' und y' die neuen unbestimmten, k und l hingegen zwei willkührliche Größen darstellen, die wir dazu benutzen wollen, um das Glied $y'z'$ in dem durch Substitution dieser Werthe entstehenden Resultate zum Verschwinden zu bringen. Hiernach erhält man

$$Pz'^2+y'^2(ak^2+2bkl+cl^2)=P \text{ und } k(a\alpha+b\beta)+l(b\alpha+\beta c)=0.$$

Der letzteren Gleichung geschieht Genüge durch

$$k=\pm(b\alpha+\beta c) \text{ und } l=\mp(a\alpha+b\beta).$$

Es ergibt sich hiernach:

$$z=\alpha z'+y'(b\alpha+\beta c),\ y=\beta z'-y'(a\alpha+b\beta) \text{ und}$$
$$z'^2-ty'^2=\pm1, \text{ wo } t=b^2-ac \text{ ist.}$$

§. 156. Mit großer Leichtigkeit lassen sich unsere Rechnungsoperationen an der Gleichung $z^2-ty^2=\pm1$ ausführen. Man entwickle deshalb $\sqrt{t}$ in einen Kettenbruch $\sqrt{t}=u(u', u'' \ldots u', 2u)$,

und bleibe nur bei den vollständigen Brüchen, deren Nenner 1 ist, stehen, nämlich bei den ungeradstelligen für $+1$, und den geradstelligen für -1. Nun ist aber bewiesen worden (§. 149), daß bloß diejenigen vollständigen Brüche, abgesehen von dem ersten $\sqrt{t}$, mit dem Nenner 1 behaftet sind, welche das letzte Glied $2u$ der Periode geben und die Form $\frac{\sqrt{t}+u}{1}$ haben. Die Näherungsbrüche $\frac{n}{n'}$, welche dem jedesmaligen Wiederkehren des dem $2u$ vorhergehenden Gliedes u' entsprechen, geben folglich, wofern sie sich in passenden Stellen befinden, $\pm z = n$, $\pm y = n'$; dabei stehen diese Zeichen in keiner gegenseitigen Beziehung zu einander. Besteht die Periode aus einer geraden Anzahl von Gliedern, so gibt jede Periode eine Auflösung der Gleichung $z^2 - ty^2 = +1$, während in solchem Falle die Gleichung $z^2 - ty^2 = -1$ durch ganze Zahlen nicht lösbar ist. Sind die Glieder der Periode aber in ungerader Anzahl vorhanden, so geschieht der Gleichung $z^2 - ty^2 = -1$ durch die ungeradstelligen Näherungsbrüche Genüge, während die Gleichung $z^2 - ty^2 = +1$ durch die geradstelligen befriedigt wird.

Beispiele. I. Für die Gleichung $z^2 - 14y^2 = \pm 1$ hat man $\sqrt{14} = 3(1, 2, 1, 6)$. Da das der Zahl 6 vorhergehende Glied 1 bloß in geraden Stellen erscheint, so kann der Gleichung $z^2 - 14y^2 = -1$ durch ganze Zahlen kein Genüge geleistet werden.

Für die Gleichung $z^2 - 14y^2 = +1$ hingegen liefern die Kettenbrüche

$$\frac{1}{0}, \frac{15}{4}, \frac{449}{120}, \frac{13455}{3596} \ldots$$

folgende Werthe, in denen übrigens die Zeichen beliebig sind:

$$\pm z = 1, 15, 449 \ldots \quad \pm y = 0, 4, 120 \ldots$$

II. Es sei $z^2 - 13y^2 = \pm 1$. Man hat $\sqrt{13} = 3(1, 1, 1, 1, 6)$; die dem Wiederkehren des Gliedes 1, das der Zahl 6 vorhergeht, entsprechenden Näherungsbrüche sind:

$$\frac{1}{0}, \frac{18}{5}, \frac{649}{180}, \frac{23882}{6485} \ldots \quad \text{Hieraus}$$

$z = 1, 649 \ldots, y = 0, 180 \ldots$ für $+1$; und

$z = 18, 23882 \ldots, y = 5, 6485 \ldots$ für -1.

III. Es sei $z^2-3y^2=1$. Man hat $\sqrt{3}=1(1, 2)$. Sämmtliche Näherungsbrüche

$$\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}, \frac{362}{209} \dots$$

liefern Auflösungen, welche nicht mehr stattfinden, wenn der zweite Theil -1 ist.

IV. Für die Gleichung $z^2-5y^2=\pm 1$ geben die Brüche

$$\frac{1}{0}, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305}, \frac{2889}{1292} \dots$$

abwechselnd Auflösungen in $+1$ und in -1.

Anmerkungen. 1) Um aus einer Auflösung der Gleichung $z^2-ty^2=1$, die immer möglich ist, unendlich viele abzuleiten, kann man folgendermaßen verfahren:

Es sei $\alpha^2-t\beta^2=1$. Man setze $z+\sqrt{t}\cdot y=(\alpha+\beta\sqrt{t})^m$ (1), und nehme für m eine beliebige positive, ganze Zahl. Die Entwickelung von $(\alpha+\beta\sqrt{t})^m$ enthält einen rationalen und einen irrationalen, mit dem Faktor $\sqrt{t}$ behafteten Theil. Der rationale ist z, der irrationale, durch $\sqrt{t}$ dividirt, y. Da diese Bestimmung keineswegs von dem Zeichen von $\sqrt{t}$ abhängt, so hat man gleichzeitig

$$(\alpha-\beta\sqrt{t})^m=z-y\sqrt{t} \dots (2).$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen (1) und (2) miteinander, so entsteht

$$z^2-ty^2=(\alpha^2-\beta^2 t)^m=1^m=1.$$ Die Werthe

$$z=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{t})^m+(\alpha-\beta\sqrt{t})^m}{2}$$ und

$$y=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{t})^m-(\alpha-\beta\sqrt{t})^m}{2\sqrt{t}}$$

genügen daher der Gleichung $z^2-ty^2=1$, welche ganze Zahl der Exponent m auch sein mag.

Für die Gleichung $z^2-19y^2=1$ hat man $\alpha=170$, $\beta=39$. Hieraus $z+y\sqrt{19}=(170+39\sqrt{19})^m$. Setzt man $m=0, 1, 2, \dots$ so findet man $z=1, 170, 57799 \dots$, $y=0, 39, 13260 \dots$

2) Im Fall $\alpha^2-t\beta^2=-1$, oder die Anzahl der Glieder der Periode ungerade ist, sieht man bald, daß die geraden Po-

tenzen von $(\alpha+\beta\sqrt{t})$ der Gleichung $z^2-ty^2=+1$, und die ungeraden Potenzen von $(\alpha+\beta\sqrt{t})$ der Gleichung $z^2-ty^2=-1$ Genüge thun. Denn setzt man $(\alpha+\beta\sqrt{t})^{2m+1}=z+y\sqrt{t}$, so hat man $z^2-ty^2=(-1)^{2m+1}=-1$.

§. 157. Es sei die ungerade Zahl $N=2m+1$ gegeben. Denkt man sich dieselbe in ihre Theile m und $m+1$, ferner jeden der Theile wieder in zwei andere zerlegt; so kann man diese Theile immer dergestalt wählen, daß ihre respektiven Produkte einander gleich werden, nämlich:

$$x+x'=m,\ y+y'=m+1,\ xx'=yy'.$$

In der That ergibt sich durch die Elimination von x' und y' das Resultat $y^2-x^2=(m+1)y-mx$.

Diese Gleichung läßt sich, wie so eben gezeigt worden, auflösen, wenn man

$$x=\tfrac{1}{2}(z+m),\ y=\tfrac{1}{2}(t+m+1)$$

setzt; es entsteht dann

$$t^2-z^2=(m+1)^2-m^2=2m+1=N.$$

Um also t und z zu finden, wird man N in zwei solche Theile zerfällen, daß diese Zahl die Differenz ihrer Quadrate abgibt. Stellen nun α und β zwei ungerade, das Produkt N hervorbringende Faktoren dar, d. h. $N=\alpha\beta$; so kommt:

$$(t+z)(t-z)=\alpha\beta,\ t+z=\alpha,\ t-z=\beta.\ \text{Hieraus}$$

$$t=\frac{\alpha+\beta}{2},\ z=\frac{\alpha-\beta}{2},\ x=\frac{\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)+m}{2},\ y=\frac{\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+m+1}{2}.$$

Da α und β ungerade Zahlen bedeuten, so sind $\tfrac{1}{2}(\alpha\pm\beta)$ ganzzahlig, und man sieht leicht ein, daß eine dieser Zahlen gerade, und die andere ungerade ist. Damit aber x eine ganze Zahl werde, muß m gleichzeitig gerade oder ungerade mit $\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$ sein, welche Bedingung y ebenfalls zu einem Ganzen macht; z. B. für $N=105=2\cdot52+1$ hat man, wenn 105 in 35×3 zerlegt wird,

$$t=19,\ z=16,\ m=52,\ x=34,\ y=36,\ x'=18,\ y'=17,$$

und in der That ist

$$34\times18=36\times17=612.$$

Zu bemerken ist, wenn man $\beta=1$ für den einen Faktor von N, und $\alpha=2m+1$ für den andern nimmt, daß $t=m+1$, $z=m$, $x'=y'=0$ ist;

die vier Theile von N reduciren sich daher auf zwei. Aus dem eben Gesagten folgt dann, daß jede ungerade Zahl die Differenz der beiden Quadrate $(m+1)^2-m^2$ ist, wie wir es schon in der niedern Algebra (§. 44) angeführt haben. Diese Zerlegung in zwei Quadrate kann auf mehrere Arten bewerkstelligt werden, wenn man für die das Produkt $2m+1$ erzeugenden Faktoren α und β solche Zahlen nimmt, daß $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ gerade oder ungerade mit m ist. Wird die Zahl $2m+1$ aber eine Primzahl, so läßt sich diese Zerfällung nur auf eine einzige Weise zu Stande bringen.

§. 158. Wir wollen noch die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade in ganzen Zahlen auflösen; sie kommt auf die schon früher behandelten zurück, wenn man die Glieder, in denen die Unbekannten sich auf dem ersten Grade befinden, wegschafft. Zu diesem Behufe mache man

$z=kz'+\alpha, y=ly'+\beta$, ferner $2a\alpha+2b\beta+d=0$, $2\beta c+2\alpha b+\varepsilon=0 \ldots (1)$, oder

$$\alpha=\frac{cd-b\varepsilon}{2D},\quad \beta=\frac{a\varepsilon-bd}{2D},$$

wo $b^2-ac=D$ gesetzt worden.

Es ist nun klar, daß diese Transformation nur von Nutzen ist, wofern z' und y' gleichzeitig mit z und y Ganze sind. Wir setzen deshalb die unbestimmten Größen $k=l=\frac{1}{2D}$, nämlich:

$$z=\frac{z'+cd-b\varepsilon}{2D},\quad y=\frac{y'+a\varepsilon-bd}{2D} \ldots . (2).$$

Die gesuchten Werthe von z' und y' werden ganzen Zahlen für z und y entsprechen; das Umgekehrte hat jedoch nicht statt. Man wird alle Auflösungen in ganzen Zahlen von z' und y' verwerfen, welche z und y nicht dazu machen. Auf solche Weise wird man sämmtliche verlangten Werthe bekommen, wofern man für z' und y' nur diejenigen Auflösungen beibehält, welche die geeignete Form haben (§. 139).

Multipliciren wir jetzt die Gleichung (1) bezüglich mit α und β, und addiren die Resultate; so finden wir

$$-(a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2)=\frac{d\alpha+\varepsilon\beta}{2}=\frac{a\varepsilon^2-2b\varepsilon d+cd^2}{4D}.$$

Bezeichnen wir den Zähler durch N, so ist die transformirte Gleichung

$$az'^2+2bz'y'+cy'^2+4D^2f+ND=0 \quad (3),$$

die wir aufzulösen wissen.

Ist $b^2-ac=0$, so läßt sich diese Rechnung nicht mehr bewerkstelligen. Multiplicirен wir aber die Gleichung mit a, so bilden die drei ersten Glieder das Quadrat von $(az+by)$. Der Rest der Rechnung bietet keine weitere Schwierigkeit dar, wenn man dieses Binom $=z'$ setzt.

Es sei $7z^2-2zy+3y^2-30z+10y+8=0$. Die Gleichungen (2) sind hier $z=\frac{z'-80}{-40}$, $y=\frac{y'+40}{-40}$. Es werden aber y und z nur dadurch zu Ganzen, daß der den Constanten gemeinsame Factor 40 solches auch von z' und y' ist, welche man mit $40z'$ und $40y'$ vertauschen kann. Auf diese Art geht der Faktor 40 fort, und man setzt

$$z=z'+2, \; y=y'-1; \; 7z'^2-2z'y'+3y'^2=27.$$

Die letztere Gleichung wurde im §. 154 gelöst, sie gab uns $\pm z'=0$ und 2, $\pm y'=3$ und 1; folglich hat man $z=4$, 0, 2 und 2 mit $y=0$, -2, 2 und -4.

§. 159. Will man in der Gleichung $az^2+2bzy+cy^2+dz+ey+f=0$ für z und y bloß rationale Werthe finden, es seien ganze oder gebrochene Zahlen, so löse man die Gleichung in Bezug auf y auf. Es entsteht dadurch ein Ausdruck von der Form: $y=\alpha z+\beta\pm\sqrt{(nz^2+mz+p)}$. Die ganze Schwierigkeit besteht nur darin, für z Werthe zu finden, welche die Größe nz^2+mz+p zu einem vollkommenen Quadrat machen. Bezeichnet $(zx+u)^2$ dieses Quadrat, so ist

$$nz^2+mz+p=z^2x^2+2zxu+u^2.$$

Es gibt hiernach drei Fälle, in denen z und y rational werden können.

I. Fall. n sei ein positives Quadrat: Man nehme $x^2=n$, alsdann $z=\frac{u^2-p}{m-2xu}$; folglich z rational, welchen Werth auch u haben mag.

II. Fall. p sei ein positives Quadrat: Man mache $u^2=p$, alsdann $z=\frac{2xu-m}{n-x^2}$, folglich z rational für jeden Werth von x.

III. Fall. nz^2+mz+p sei in zwei rationale Faktoren $(f+gz)$ $(h+kz)$ zerlegbar: Man setze $(f+gz)x=\sqrt{(h+kz)(f+gz)}$, alsdann $(f+gz)x^2=h+kz$, woraus $z=\frac{fx^2-h}{k-gx^2}$; folglich z rational für jeden Werth von x.

Unbestimmte Gleichungen höherer Grade.

§. 160. Um die Gleichung $my=a+bx+cx^2+\ldots kx^n$ in ganzen Zahlen aufzulösen, bemerken wir vorerst, daß, wenn $x=\alpha$ der Gleichung genügt, sofort alle in der Formel $x=\alpha\pm mt$ begriffenen Werthe mit dieser Eigenschaft behaftet sind, wo t eine beliebige ganze Zahl bedeutet, weil durch Substitution dieses Werthes statt x der zweite Theil die Form $a+b\alpha+c\alpha^2+\ldots.+mT$ annimmt, welcher Ausdruck offenbar durch m theilbar ist. Wäre $\alpha>m$, und nähme man statt t das in $\frac{\alpha}{m}$ enthaltene Ganze, so fiele der Werth $x=\alpha\pm mt$ zwischen $+\frac{1}{2}m$ und $-\frac{1}{2}m$. Hat also die vorgelegte Gleichung eine Auflösung in ganzen Zahlen, so gibt es eine unendliche Anzahl anderer, und zwar ist in jedem System $x=\alpha\pm mt$ wenigstens ein Werth von $x<\frac{1}{2}m$. Dividirt man diejenigen von den Coefficienten $a, b, c\ldots$, welche $>m$ sind durch m, und zieht die Ganzen daraus; so wird das Problem vereinfacht. Uebrigens ist es zur Auflösung der Gleichung hinreichend, nach und nach für x alle ganze Zahlen unter $\frac{1}{2}m$ zu probiren. Sind einmal die einfachen Zahlen α gefunden, so hat man alle übrigen in der Formel $x=\alpha\pm mt$.

Es sei die Gleichung

$$7y=17+9x-3x^2+5x^3;\ \text{woraus}\ y=2+x+\frac{3+2x-3x^2+5x^3}{7}.$$

Nimmt man hierauf $x=0, 1, 2, 3$ und 4, sowohl mit dem Zeichen $+$ als $-$; so erkennt man bald, daß $x=2$ und ± 1 allein genügen; es sind dieß die Werthe von α in der Gleichung $x=\alpha+7t$, welche alle Auflösungen in sich begreift, und uns in Stand setzt, die entsprechenden Werthe von y zu bestimmen.

§. 161. Die allgemeine Gleichung zwischen zwei Unbekannten, von denen nur eine auf der ersten Potenz vorkommt, ist

$$y(a'+b'x+c'x^2\ldots)=a+bx+cx^2\ldots$$

Um alle Auflösungen in ganzen Zahlen zu erhalten, setzen wir

$$a'+b'x+c'x^2 \ldots = m',\ a+b+cx^2 \ldots = m,$$

woraus $m'y=m$. Eliminiren wir x aus den beiden ersten Gleichungen, so werden wir zwischen m und m' eine Gleichung von der Form

$$A+Bm+Cm'+Dm'^2+Emm'+Fm'^2 \ldots = 0$$

finden. Durch Substitution von $m=m'y$ wird diese Gleichung in

$$A+Bm'y+Cm'+Dm'^2y^2+ \ldots = 0$$

übergehen. Da hier alle Glieder, mit Ausnahme des erstern, durch m' theilbar sind; so muß es A ebenfalls sein, wofern x und y ganze Werthe bekommen sollen. Wir müssen demnach alle Theiler $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ von A suchen. Es sind dieß die einzigen Werthe, welche m' haben kann. Nehmen wir successive jeden jener Theile für m', so werden wir die Gleichungen

$$\alpha=a'+b'x+c'x^2 \ldots,\ \beta=a'+b'x+ \ldots,\ \gamma=a'+b'x \ldots \text{ rc.}$$

erhalten, aus welchen die ganzen Wurzeln zu suchen sind. Diejenigen dieser Wurzeln, vermittelst welcher m ein Vielfaches von m' wird, werden allein der Aufgabe genügen.

Die Weitläufigkeit der Rechnung, welche die obengedachte Elimination erheischt, um die Zahl A kennen zu lernen, wird dadurch um Vieles verringert, daß man m und m' gleich Null setzt, d. h., daß man den gemeinschaftlichen Theiler zwischen den Polynomen $a'+b'x+ \ldots$ und $a+bx+ \ldots$ sucht; dabei darf man aber nicht die numerischen Faktoren, mit welchen sämmtliche Glieder eines der Reste etwa behaftet sein könnten, wegstreichen, wie man solches bei der gewöhnlichen Aufsuchung des gemeinschaftlichen Theilers zu thun das Recht hat. Diese Operation liefert uns den Werth von A in dem Finalrest; denn wäre ein gemeinschaftlicher Theiler vorhanden, so würde man ihn in der vorgelegten Gleichung unterdrücken.

Es sei $y(x^3-3)=x^2+1$. Das Aufsuchen des gemeinschaftlichen Theilers zwischen x^3-3 und x^2+1 führt auf den Finalrest 10, dessen Theiler 1, 2, 5 und 10 sind. Nehmen wir diese vier Werthe sowohl mit dem Zeichen + als − statt m' in den Gleichungen

$$x^3-3=m',\ x^2+1=m,$$

so finden wir, daß nur folgende Werthe zuläßig sind:

$$m' = -2, \text{ woraus } x=1, \ m=2, \ y=-1$$
$$m' = +5, \qquad x=2, \ m=5, \ y=+1;$$

es sind dieß die zwei einzigen Auflösungen.

Wir wollen uns mit den Gleichungen, in denen die beiden Unbekannten auf höhern Potenzen vorkommen, nicht weiter beschäftigen, weil man keine allgemeine Methode zu ihrer Auflösung besitzt; für jeden einzelnen Fall gelangt man nur durch ganz besondere Verfahrungsweisen dazu.

Anmerkung. Diejenigen Leser, welche über die in diesem Kapitel behandelten Gegenstände noch näher sich unterrichten wollen, verweisen wir auf folgende Werke:

Den zweiten Theil von Eulers Anleitung zur Algebra, nach der französischen Ausgabe von Lagrange, mit Anmerkungen übersetzt von Ph. Gruson. Berlin, bei Lagarde.

La Grange, Auflösung numerischer Gleichungen, übersetzt von A. L. Crelle. Berlin, bei Reimer.

K. F. Gauss Disquisitiones arithmeticæ. Leipzig, bei Fleischer.

Essai sur la théorie des nombres par Legendre. Paris.

Mémoires de l'académie des sciences de Paris. Année 1772 ꝛc.

Die Abhandlungen der Akademie zu Berlin von den Jahren 1767—1776 ꝛc.

Verschiedene Bände, (namentlich X und XI) des Journals für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Crelle.

Anfangsgründe der höhern Arithmetik von Minding. Berlin, bei Reimer.

Bestimmte Gleichungen höherer Grade.

§. 162. Es sei $fx=0$ eine Gleichung, welche dergestalt zubereitet worden, daß sie weder commensurable, noch vielfache, noch mehrere zwischen zwei successiven ganzen Zahlen gleichzeitig liegende Wurzeln besitzt (§. 75.) Angenommen, daß für jede irrationale Wurzel die ganze Zahl α, welche zunächst kleiner als die gesuchte ist, bekannt sei, wollen wir nun zur genauern Bestimmung derselben schreiten. Der im Paragraphen 133 gegebenen Regel zufolge machen wir $x=\alpha+\frac{1}{x'}$. Dieser Ausdruck in $fx=0$ eingeführt, liefert die trans-

formirte Gleichung $f_1 x'=0$, von derselben Ordnung wie die vorgelegte. Der Voraussetzung gemäß wird diese Gleichung nur eine einzige positive, die Einheit übersteigende Wurzel zulassen, welche dem Werth von x entspricht, dessen ganzzahliger Bestandtheil α ist, und den näher zu kennen es sich handelt. Wir nennen β die ganze Zahl, welche unmittelbar kleiner als jene Wurzel x' ist, und setzen $x'=\beta+\frac{1}{x''}$. Aus der Substitution des letztern Werthes in $f_1 x'=0$ entspringt die transformirte Gleichung $f_2 x''=0$, die ebenfalls nur eine positive die Einheit übertreffende Wurzel hat. Durch ein so weiter fortgesetztes Verfahren lernt man nach und nach die Glieder α, β, γ... des die Wurzel x darstellenden Kettenbruches $x=\alpha, \beta, \gamma \ldots$ kennen, dessen reducirte Werthe abwechselnd größer und kleiner als der wahre Werth sind, dem sie um so näher liegen, zu je spätern Gliedern sie gehören; dabei vermag man den Grad ihrer Annäherung anzugeben.

Was die Berechnung der Polynome $f_1, f_2, \ldots$ anlangt, so ist dieselbe äußerst leicht. Es sei nämlich

$$fx=kx^i + px^{i-1} + qx^{i-2} + \ldots + u=0.$$

Setzt man $x=\alpha+t$, so ergibt sich

$$f\alpha+tf'\alpha+\tfrac{1}{2}t^2f''\alpha+\ldots+kt^i=0.$$

Hier ist aber $t=\frac{1}{x'}$, folglich, wenn das Ganze durch x'^i multiplicirt wird,

$$f\alpha \cdot x'^i + f'\alpha \cdot x'^{i-1} + \ldots + =0.$$

Die Ausdrücke $f\alpha, f'\alpha \ldots$ sind nichts anderes als die Werthe von fx und den zugehörigen Derivationen, wenn man daselbst $x=\alpha$ setzt. Man berechnet also vorerst diese Coefficienten und substituirt sie dann in die vorige Gleichung.

Wir wollen unsere Methode auf die Gleichung $x^3-2x-5=0$ anwenden, deren einzige reelle Wurzel zwischen 2 und 3 liegt (§. 94).

Macht man $x=2$ in x^3-2x-5, $3x^2-2$, $3x$ und 1, so findet man -1, 10, 6 und 1 zu Coefficienten der Gleichung in x'.

Es liegt aber x' zwischen 10 und 11, und man findet auf ähnliche Weise für die Gleichung in x'' die Coefficienten 61, -94, -20, -1. Hiernach stehen folgende Resultate, wobei man sich der

Mühe überhoben hat, die Potenzen von x, x', x'' zu schreiben, indem sie hinlänglich durch die Stellen der Glieder angedeutet sind:

fx	=		x^3	+	$0x^2$	—	2x	—	5	= 0	Ganzes	2,
f_1	=	—	1	+	10	+	6	+	1	= 0	....	10,
f_2	=		61	—	94	—	20	—	1	= 0	....	1,
f_3	=	—	54	—	25	+	89	+	61	= 0	....	1,
f_4	=		71	—	123	—	187	—	54	= 0	....	2,
f_5	=	—	352	+	173	+	303	+	71	= 0	....	1,
f_6	=		195	—	407	—	883	—	352	= 0	....	3.

Folglich $x=2, 10, 1, 1, 2, 1, 3 \ldots\ldots = \frac{576}{275} = 2,09455\ldots,$ ein Werth, welcher bis auf 5 Decimalstellen richtig ist, weil er von dem wahren nicht um $\left[\frac{1}{275}\right]^2$ abweicht.

Die Gleichung $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ hat ihre drei Wurzeln reell, und zwischen 1 und 2, 0 und 1, —1 und —2 eingeschlossen.

Um der erstern näher zu kommen, haben wir:

f		x^3	—	x^2	—	2x	+	1	= 0	Ganzes	1,
f_1 ...	—	1	—	1	+	2	+	1	= 0	....	1,
f_2		1	—	3	—	4	—	1	= 0	....	4,
f_3 ...	—	1	+	20	+	9	+	1	= 0	....	20,
f_4		181	—	391	—	40	—	1	= 0	....	2,
f_5 ...	—	197	+	568	+	695	+	181	= 0	....	3,
f_6		2059	—	1216	—	1205	—	197	= 0	....	1.

ꝛc.

Also $x=1, 1, 4, 20, 2, 3, 1, 6, 10, 5, 2 = \frac{1289054}{715371} = 1,8019377358.$

Die zweite Wurzel wird auf ähnliche Art gefunden. Von der zweiten Operation an erhält man die transformirte (2) wieder, worauf sich die Gleichungen 3, 4, 5 ... wiederholen; hieraus

$$x=0, 2, 4, 20, 2, 3, 1, 6, 10, 5, 2 = \frac{573683}{1289054} = 0,4450418679.$$

Für die negative Wurzel vertauscht man x mit —x, und bekommt dann

$$-x=1, 4, 20, 2, 3, 16, 10, 5, 2 = \frac{715371}{573683} = 1,2469796037.$$

Wir stoßen hier auf eine diesem Beispiele eigenthümliche Sonderbarkeit, welche darin besteht, daß die drei Wurzeln aus den nämlichen Gliedern zusammengesetzt sind, weshalb man die Rechnung nur für eine Wurzel zu machen nöthig hat.

Für	fx	$=$	$2x^2$	$-$	$14x$	$+$	17	$= 0$	Ganzes	5
hat man	f_1	$=-$	3	$+$	6	$+$	2	$= 0$	....	2
	f_2	$=+$	2	$-$	6	$-$	3	$= 0$	....	3
	f_3	$=-$	3	$+$	6	$+$	2	$= 0$	....	2

Man findet f_1 wieder; folglich $x = 5\,(2,3)$ wie in §. 142.

§. 163. Wir wollen jetzt die Mittel auseinander setzen, vermittelst welcher sich diese Rechnungen abkürzen lassen. Man sei in der Entwickelung des Kettenbruches $x = \alpha, \beta, \gamma \ldots v$ bis zum Gliede y^i fortgeschritten, so daß $\frac{m}{m'}$ und $\frac{n}{n'}$ die beiden letzten Näherungswerthe darstellen. Aus der Gleichung G(§. 135) folgt, wenn z den noch übrigen Theil des Kettenbruches bezeichnet,

$z = -\frac{m'x-m}{n'x-n} = -\frac{m'}{n'} \mp \frac{1}{n'(n'x-n)}$, insofern man die Division beginnt und erwägt, daß $m'n - mn' = \pm 1$.

Bedeutet δ die Differenz zwischen x und dem Näherungswerth $\frac{n}{n'}$, oder $\delta = \frac{n}{n'} - x$, so hat man $n'x - n = -n'\delta$, woraus

$$z = -\frac{m'}{n'} \pm \frac{1}{\delta . n'^2}.$$

Es stellt zwar hier x die Wurzel dar, der man näher kommen will, und z einen davon abhängigen Werth; jede der andern Wurzeln $x_1, x_2, x_3 \ldots$ der vorgelegten Gleichung gibt aber eine ähnliche Gleichung, so daß man hat, wenn $z', z'' \ldots$ die zugehörigen Werthe von z sind:

$$z' = -\frac{m'}{n'} \pm \frac{1}{\delta' n'^2},\; z'' = -\frac{m'}{n'} \pm \frac{1}{\delta'' n'^2},\; \text{etc.}$$

Werden diese $(i-1)$ Gleichungen addirt, und der Kürze halber $\Delta = \frac{1}{\delta'} + \frac{1}{\delta''} + \ldots$ gesetzt, so haben wir

$$z' + z'' + z''' \ldots = -\frac{m'}{n'}(i-1) \pm \frac{\Delta}{n'^2}.$$

Die aus der vorgelegten durch die Substitution von $x = \frac{nz+m}{n'z+m'}$ entspringende Gleichung in z hat die Form $Az^i + Bz^{i-1} + \ldots = 0$, deren Summe der Wurzeln

$$z + z' + z'' \ldots = -\frac{B}{A} \text{ ist.}$$

Indem die obige Gleichung davon abgezogen wird, kommt

$$z = \frac{m'}{n'}(i-1) - \frac{B}{A} \mp \frac{\Delta}{n'^2} \ldots (a).$$

Der Bruch $\frac{n}{n'}$ kann jedoch, wenn in der Bildung der transformirten Gleichungen ununterbrochen weiter geschritten wird, dem Werthe von x), (folglich jede der Differenzen δ', δ'' ... der correspondirenden $x-x_1$, $x-x_2$, ...) so nahe gebracht werden, als man nur immer will; mithin ist die Summe Δ bei dem unendlichen Wachsen von r keines unendlichen Zunehmens fähig, sondern an die Grenze $\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots$ gebunden. Aber n' wächst immer mehr und mehr; das letzte Glied in dem Ausdrucke (a) nimmt daher fortwährend ab, und kann zuletzt unberücksichtigt bleiben, so daß man hat:

$$z = \frac{m'}{n'}(i-1) - \frac{B}{A} \ldots (b).$$

Diese Gleichung gibt nicht blos das in z enthaltene Ganze π, sondern es lassen sich selbst aus der Entwickelung seines Werthes in einen Kettenbruch nach der Methode des gemeinschaftlichen Theilers mehrere successive Glieder daraus nehmen, und den Werth von x damit ergänzen, in der Art, daß $z = \pi, \varrho, \sigma \ldots$ liefert $x = \alpha, \beta, \gamma \ldots \nu, \pi, \varrho, \sigma \ldots$ Bleibt man in der Entwickelung von z bei einem seiner Glieder σ stehen, und bezeichnet durch $\frac{p}{p'}$, $\frac{q}{q'}$ die beiden letzten Näherungswerthe so; ist, $z = \frac{q\sigma+p}{q'\sigma+p'}$. Indem man den letztern Bruch in die transformirte Gleichung substituirt, geht man sofort zu derjenigen, welche dem Gliede σ entspricht, über, wobei die Annahme gemacht wird, daß in der That dieses Glied dem Werthe von x zukomme. Die Gleichung $z = -\frac{m'x-m}{n'x-n}$ zeigt, daß es hinreichend sei, zwei genäherte Grenzen von x zu kennen, zwischen denen der wahre Werth eingeschlossen ist, und solche Grenzen in diesen Bruch zu

substituiren, um die von z zu erhalten: werden nämlich dieselben in Kettenbrüche verwandelt, so werden ihre gemeinschaftlichen Glieder auch gemeinschaftliche von z sein, und den Werth von x ergänzen.

Um die erste Wurzel des zweiten der obigen Beispiele zu berechnen, gehen wir von der transformirten Gleichung f_4 aus. Die Näherungswerthe sind $\frac{9}{5} = 1, 1, 4$; $\frac{182}{101} = 1, 1, 4, 20$: hieraus

$$z = \frac{10}{101} + \frac{391}{181} = \frac{41301}{18281} = 2, 3, 1, 6 \ldots$$

Man bemerkt, daß die 4 ersten Glieder den Werth von x ergänzen, welcher sofort 8 Glieder erhält. Man leitet aus dem Werthe von z die Näherungsbrüche $\frac{9}{4}$ und $\frac{61}{27}$ ab, woraus $z = \frac{61\,u + 9}{27\,u + 4}$. Die Substitution dieses Werthes in f_4 liefert die transformirte f_8; u. s. f.

Wenn die Wurzel commensurabel ist, so wird der Kettenbruch ein begrenzter, sonst geht er ins Unendliche fort. Besitzt die vorgelegte Gleichung einen rationalen Faktor vom zweiten Grad, so erhält man eine Periode; das Wiederkehren der nämlichen Glieder zeigt diesen Umstand an.

So gibt die Gleichung

$$x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 22x - 22 = 0,$$

wenn man die zwischen 3 und 4 liegende Wurzel genauer finden will:

$$f_1 = -\ 10 + 22 + 27 + 10 + 1 = 0 \quad \text{Ganzes } 3$$
$$f_2 = 58 - 314 - 315 - 98 - 10 = 0 \quad \ldots\ldots 6$$
$$f_3 = -\ 4594 + 12322 + 6561 + 1078 + 58 = 0 \quad \ldots\ldots 3 \text{ rc.}$$

Die letzte Gleichung liefert

$$z = \frac{9}{19} + \frac{12322}{4594} = \frac{275464}{87286} = 3, 6 \ldots$$

Das Wiederkehren der Ziffern (3,6) läßt eine Periode vermuthen. Angenommen, daß solche existire, so muß der, dem Kettenbruche 3(3,6) entsprechende, Ausdruck $x^2 - 11$ ein Theiler von dem vorgelegten Polynom sein.

Verrichtet man diese Division, so ergibt sich der genaue Quotient $x^2 - 2x + 2$.

Die Auflösung der Gleichung $x^i = A$ oder die Wurzelausziehung läßt sich mittelst dieser Methode leicht bewerkstelligen. So z. B. für $x^3 = 17$ findet man $x = 2, 1, 1, 3, 138 \ldots = \frac{2489}{968}$.

Bildet man den Werth von z, so wird z=1, 3, 2 .... gefunden. Hieraus

$$x=\frac{22527}{8761}=2,5712818.$$

Anmerkung. Die bei der Entwickelung des Werthes von x (b) in einen Kettenbruch, gewonnenen Glieder $\pi, \sigma, \varrho \ldots$ können zur weitern Fortsetzung der Näherungswerthe von x dienen, so lange die Differenz zwischen jedem derselben und der ersten Annäherung $\frac{n}{n'}$ die Grenze $\frac{1}{n'^2}$ nicht erreicht, weil die Differenz zwischen x und $\frac{n}{n'}$ kleiner als $\frac{1}{n'^2}$ sein muß.

§. 164. Der Werth des Logarithmen, welcher mittelst des in der Note 8 der niedern Algebra angezeigten Verfahrens gefunden wurde, läßt sich ohne Weiteres in der Form eines Kettenbruches darstellen. Für die Gleichung $10^x=29$ hat man, da x zwischen 1 und 2 eingeschlossen wird, $10^{1+\frac{1}{x'}}=29$, woraus $10=(2,9)^{x'}$. Man hat ferner

$$x'=2+\frac{1}{x''}, \text{ woraus } \left[\frac{1000}{841}\right]^{x''}=2,9 \text{ u. s. f.}$$

Folglich $x=1, 2, 6, 6, 1, 2, 1, 2 \ldots=\frac{1439}{984}=1,4623980$, welcher Werth den gesuchten übertrifft, von demselben aber weniger als um $\frac{1}{(984)^2}$ abweicht, demnach bis auf 6 Dezimalstellen genau ist.

Für $10^x=23$ erhält man auf die nämliche Weise

$$x=1, 2, 1, 3, 4, 17, 2=\frac{2270}{1667}=1,3617278.$$

Daß übrigens diese Methode für jede beliebige Basis gelte, ist einleuchtend.

Sechstes Kapitel.

Von der Methode der unbestimmten Coefficienten.

Zerlegung rationaler Brüche.

§. 165. Es seien F und φ zwei identische Funktionen von x, welche sich nur rücksichtlich ihrer algebraischen Darstellungsweise von einander unterscheiden, so daß man nicht nöthig hat, dem x gewisse Werthe beizulegen, um der Gleichung $F=\varphi$ zu genügen, welche sonach für jeden beliebigen Werth von x ihre Gültigkeit behält. Angenommen nun, daß man mittelst gehöriger Rechnungsoperationen dahin gelangt sei, die Funktionen F und φ in Bezug auf x zu ordnen, und auf einerlei Form, wie

$$a+bx+cx^2+dx^3\ldots=A+B+Cx^2+Dx^3\ldots$$

zu bringen; so wird man genau auf der einen Seite Alles finden müssen, was auf der andern steht, weil zwischen F und φ ein scheinbarer, blos von den Formen, unter denen diese Funktionen dargestellt werden, herrührender Unterschied statt hatte, welcher Unterschied jetzt nicht mehr vorhanden ist; man hat daher $a=A$, $b=B$, $c=C$ .... In der That, weil die Gleichung für jeden Werth von x bestehen soll, erhält man $a=A$, wenn $x=0$ gemacht wird. Diese beiden Coefficienten wurden aber durch die letzte Voraussetzung nicht erst gleich, sie waren dieß schon von vornherein; gedachte Voraussetzung war hier nur ein Mittel, die Wahrheit mehr zur Evidenz zu bringen.

Man hat demnach

$$bx+cx^2+\ldots=Bx+Cx^2+\ldots,$$

oder wenn durch x dividirt wird,

$$b+cx+\ldots=B+Cx+\ldots$$

Dasselbe Raisonnement zeigt, daß $b=B$, ferner $c=C$ und u. s. f.

Ist also eine Funktion F gegeben und hat man auf direkte Weise sich versichert, daß solche unter einer gewissen Form φ, welche die

constanten Coefficienten A, B, C .... enthält, dargestellt werden könne; so ist es leicht, jene Zahlen zu bestimmen. Zu diesem Zweck verfährt man, wie folgt: 1) Man schreibe die Identität $F=\varphi$, wo F die gegebene Funktion, und φ ihren unter eine andere, als passend erkannte Form, gebrachten Ausdruck darstellt, in welchem die unbestimmten Coefficienten A, B, C ... vorkommen; 2) durch eigends gewählte Rechnungen ordne man die beiden Theile F und φ nach den Potenzen von x; 3) die gleichnamigen Coefficienten, d. h. jene Coefficienten, welche beiderseits zu den nämlichen Potenzen von x gehören, setze man einander gleich; 4) eliminire endlich zwischen diesen Gleichungen, um daraus die Werthe der unbestimmten Coefficienten A, B, C, ... herzuleiten.

Dieser Satz, unter dem Namen der Methode der unbestimmten Coefficienten bekannt, wurde zuerst von Descartes aufgestellt; er kann mannigfach angewendet werden, wie z. B. zur Zerlegung der rationalen Brüche, und zur Entwickelung der Funktionen in Reihen.

§. 166. Einen rationalen Bruch, dessen Zähler N und dessen Nenner D ist, soll in andere Brüche, von denen er die Summe ausmacht, zerlegt werden. Da man jede gebrochene Funktion, in welcher der Zähler zu einer gleichen oder höhern Ordnung in Bezug auf x als der Nenner gehört, durch eine vorläufige Division in eine ganze Funktion, und eine solche gebrochene zerlegen kann, worin der Zähler zu einer niedern Ordnung als der Nenner gehört; so werden wir bei den folgenden Untersuchungen immer solche gebrochene Funktionen, in denen der Exponent von x im Zähler kleiner als im Nenner ist, voraussetzen. Es sei $D=P\times Q$, wo P und Q zwei Polynome von den Graden p und q bedeuten, welche keine gemeinschaftliche Faktoren besitzen. Man setze

$$\frac{N}{D}=\frac{Ax^{q-1}+Bx^{q-2}\ldots+L}{Q}+\frac{A'x^{p-1}+B'x^{p-2}\ldots+L'}{P}.$$

Um auf einerlei Nenner zu bringen, multiplicieren wir

$Ax^{q-1}+Bx^{q-2}+\ldots$ durch P, und $A'x^{p-1}+B'x^{p-2}+\ldots$ durch Q.

Unsere Produkte werden vom $(p+q-1)$ten Grade sein, d. h. sie werden ein vollständiges Polynom, das zu einer um 1 niedrigern Ordnung als D gehört, bilden. Da nun N höchstens von dem nämlichen Grade ist, so erhalten wir durch Vergleichung der gleichnamigen

Coefficienten von N mit denen gedachter Produkte, $(p+q)$ Gleichungen zwischen den unbestimmten Größen $A, A', B, B' \ldots$, deren Anzahl offenbar $(p+q)$ beträgt, indem unsere angenommenen Zähler q und p Glieder haben; die unbekannten Coefficienten, welche nur auf der ersten Potenz vorkommen, werden durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren bestimmt. Die angezeigte Zerlegung ist also statthaft, und die Rechnung gibt die Werthe sämmtlicher dazu erforderlichen Stücke.

Sind P und Q selbst in andere Primfaktoren unter sich zerlegbar, so ersetzt man, ohne weitere Bestimmung der Unbekannten $A, B \ldots A', B' \ldots$, jeden Bruch durch andere Brüche, welche nach demselben Principe gebildet werden; d. h., um einen gegebenen rationalen Bruch zu zerlegen, muß man die relativen Primfaktoren seines Nenners suchen, und den Bruch einer Reihe von Brüchen gleich setzen, welche jene Faktoren zu Nennern haben, und deren Zähler beziehungsweise um einen Grad niedriger als die Nenner sind. Man wird daher fürs erste den Nenner D gleich Null setzen, um ihn in seine einfachen Faktoren aufzulösen; je nach der Beschaffenheit dieser Faktoren unterscheiden wir zwei Fälle, nämlich, entweder besteht der Nenner D aus lauter ungleichen Faktoren, oder er besitzt auch gleiche Faktoren.

I. Fall. Es sei $D=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots$ Man setze

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots,$$

und es wird sich bloß darum handeln, $A, B, C \ldots$ nach dem oben auseinandergesetzten Verfahren zu bestimmen.

Beispiele. I. Um $\frac{kx+l}{(x-a)(x-b)}$ in Partialbrüche zu zerlegen, setzen wir

$$\frac{kx+l}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}.$$

daraus folgt: $kx+l=(A+B)x-Ab-Ba.$

Mithin $k=A+B, -l=Ab+Ba$

und endlich $A=-\frac{ka+l}{b-a}, B=\frac{kb+l}{b-a}.$

II. Für die Funktion $\frac{2-4x}{x^2-x-2}$, bei welcher der Nenner aus den Faktoren $(x+1)(x-2)$ besteht, setzen wir

$$\frac{2-4x}{x^2-x-2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Man findet $A=-2$ und $B=-2$

III. Ebenso ist $\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a(a+x)}+\frac{1}{2a(a-x)}$.

IV. Für $\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}+\frac{C}{a-x}$

findet man $1=Aa^2+ax(B+C)+x^2(C^2-A-B)$;

folglich $1=Aa^2$, $B+C=0$, $C-A-B=0$.

Durch Elimination bekommt man A, B und C, und hat endlich

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)}=\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{2a^2(a+x)}+\frac{1}{2a^2(a-x)}.$$

Die nämliche Rechnung läßt sich auch anwenden, wenn einige Binomialfaktoren von D imaginär sein sollten; man zieht jedoch in solchem Falle vor, D in reelle Trinomialfaktoren, wie x^2+px+q, zu zerlegen, wodurch die entsprechenden Partialbrüche in der Form $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ zum Vorschein kommen.

Beispiele. I. Für $\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}$ setze man

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}.$$ Man findet

$$C=\tfrac{3}{2},\ B=A=-\tfrac{1}{2}.$$

II. Für $\frac{x}{x^3-1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{x-1}$ hat man $-A=B=C=\frac{1}{3}$.

II. Fall. Jeder Faktor von der Form $(x-a)^i$ liefert den zugehörigen Partialbruch $\frac{Ax^{i-1}+Bx^{i-2}+\ldots}{(x-a)^i}$. Da der letztere selbst wieder zerfällbar ist, so setzt man sofort statt seiner die gleichgeltende Summe

$$\frac{A}{(x-a)^i}+\frac{B}{(x-a)^{i-1}}+\frac{C}{(x-a)^{i-2}}\ldots\ldots+\frac{L}{x-a}.$$

In der That bringt man auf einerlei Benennung, so hat der Zähler die nämliche Form wie vorhin, und die nämliche Anzahl von unbestimmten Coefficienten.

Beispiele. I. Für die Funktion $\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}$ setze man

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1}.$$

Man erhält

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{2}{x}-\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}-\frac{\frac{5}{4}}{x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{\frac{3}{4}}{x-1}.$$

II. Ebenso findet man

$$\frac{1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2+x+1}.$$

Befinden sich unter den gleichen Faktoren imaginäre, so ist dasselbe Verfahren anwendbar; man zieht jedoch wieder vor, die betreffenden reellen, quadratischen Faktoren von der Form $(x^2+px+q)^i$ in Rechnung zu bringen, denen der Zähler $Ax^{2i-1}+Bx^{2i-2}+\ldots$ entspricht; oder man nimmt vielmehr dafür die gleichgeltenden Partialbrüche

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^i}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{i-1}}+\ldots+\frac{Kx+L}{x^2+px+q}.$$

Beispiele. I. Für die Funktion $\frac{1}{(x+1)x^2(x^2+2)(x^2+1)^2}$ setze man

$$\frac{A}{1+x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}+\frac{Hx+I}{x^2+1}.$$

Die Rechnung gibt

$A=\frac{1}{12}$, $B=-C=\frac{1}{2}$, $D=-E=\frac{1}{6}$, $F=-G=\frac{1}{2}$, $H=-I=\frac{1}{4}$.

II. Ebenso ist

$$\frac{x^3-2x^2+x-3}{(x^2-2x+2)^2}=-\frac{x+3}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{x}{x^2-2x+2}.$$

§. 167. Wegen des häufigen Gebrauchs, welchen man von der Zerlegung der gebrochenen Funktionen in Partialbrüche macht, verdient nachstehende Methode, mittelst welcher die Operationen um vieles abgekürzt werden, einige Beachtung.

für $x=a$ annehmen. Besitzt aber der Nenner außer $(x-a)^i$ noch andere Faktoren, oder hat man $D=(x-a)^i S$, wobei S bekannt und durch $(x-a)$ nicht theilbar ist; so setze man

$$\frac{N}{D}=\frac{F}{(x-a)^i}+\frac{P}{S}\ldots(1),$$

woraus $N=P(x-a)^i+FS$.

Indem wir in dieser identischen Gleichung x mit $a+y$ vertauschen, und die Entwickelung nach §. 33 bewerkstelligen, finden wir

$$n+n'y+\tfrac{1}{2}n''y^2+\ldots=y^i(p+p'y+\tfrac{1}{2}p''y^2\ldots)$$
$$+(f'+f'y+\tfrac{1}{2}f''y^2\ldots)(s+s'y+\tfrac{1}{2}s''y^2\ldots),$$

wobei die oben gewählte Bezeichnung für n, d, s und f beibehalten worden. Durch Vergleichung der gleichartigen Coefficienten von y auf beiden Seiten haben wir:

$$n=fs,\ n'=f's+fs',\ n''=f''s+2f's'+fs''\ldots(2)$$
$$n^{(l)}=sf^{(l)}+ls'f^{(l-1)}+\tfrac{1}{2}l(l-1)s''f^{(l-2)}\ldots+fs^{(l)}\ldots;$$

l bedeutet hier eine beliebige ganze Zahl, kleiner als i. Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die Größen f, f', $f''\ldots$ finden; die Entwickelung des ersten Theils

$$\frac{F}{(x-a)^i}=\frac{f}{(x-a)^i}+\frac{f'}{(x-a)^{i-1}}+\frac{\tfrac{1}{2}f''}{(x-a)^{i-2}}+\ldots.$$

ist daher als bestimmt zu betrachten, gerade so als wäre in dem Nenner des vorgelegten Bruches nur $(x-a)^i$ enthalten. Aus der letztern Gleichung ergibt sich

$$F=f+f'(x-a)+\tfrac{1}{2}f''(x-a)^2+\ldots(3);$$

F ist mithin bekannt, und man hat

$$\frac{P}{S}=\frac{N-FS}{D}=\frac{N-FS}{(x-a)^i S}\ldots(4)$$

Diese Identität erheischt, daß $N-FS$ den Faktor $(x-a)^i$ enthalte; um den Quotienten P zu bekommen, wird man daher jene Division ausführen müssen. Der zweite Theil unseres vorgelegten Bruches wäre hiermit bekannt, welcher Theil seinerseits wieder in Partialbrüche zu zerfällen übrig bleibt.

Beispiele. I. In der Funktion $\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}$ sind $6x-7$ und 6 die Derivationen des Zählers. Hieraus ergeben sich für $x=1$ als Zähler der Partialbrüche die Zahlen 2, -1 und 3, und man hat sofort

$$\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}.$$

II. Um die Bruchfunktion $\frac{N}{D}=\frac{5x^4-13x^3+14x^2-5x+3}{(x-1)^3(x+1)x}$ in Partialbrüche zu zerlegen, mache man $x=1$ in

$$S=x^2+x=2,\ S'=2x+1=3,\ S''=2,$$

$$N=5x^4-13x^3\ldots=4,\ N'=20x^3+\ldots=4,\ N''=10.$$

Hieraus $4=2f,\ 4=2f'+3f,\ 10=2f''+6f'+2f;$

ferner $f=2,\ f'=-1,\ \tfrac{1}{2}f''=3,\ F=2-(x-1)+3(x-1)^2=3x^2-7x+6.$

Das Produkt FS von N abgezogen, gibt

$$2x^4-9x^3+15x^2-11x+3,$$

was, durch $(x-1)^3$ dividirt, $P=2x-3$ liefert. Es bleibt jetzt noch übrig, den Bruch $\frac{P}{S}=\frac{2x-3}{x^2+x}$ nach dem ersten Verfahren zu zerlegen.

Man hat $\frac{P}{S'}=\frac{2x-3}{2x+1}$, woraus für $x=-1$ und 0 die Resultate 5 und -3 entspringen. Folglich

$$\frac{N}{D}=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x}.$$

Man wäre in diesem Beispiele schneller zum Ziele gekommen, wenn man vorerst die beiden letztern Brüche bestimmt hätte, indem $x=-1$ und 0 in N und D' gesetzt würde. Es gibt dieß

$$\frac{N}{D}=\frac{F}{(x-1)^3}+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x}.$$

Schafft man die beiden letztern Brüche auf die andere Seite, und reducirt, so findet man leicht den ersten Bruch $\frac{F}{(x-1)^3}=\frac{3x^2-7x+6}{(x-1)^3}$; welcher auf den hier oben betrachteten Fall zurückkommt und sich leicht zerlegen läßt.

III. Für $\frac{N}{D} = \frac{x^3-6x^2+4x-1}{x^4-3x^3-3x^2+7x-6}$ macht man $x=2$ und 3 in N und D′ weil $D=(x+1)^2(x-2)(x-3)$. Daraus entstehen die Partialbrüche $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}$; dieselben von dem vorgelegten Bruche abgezogen lassen $\frac{x}{(x+1)^2}$, welches weiter zu zerlegen ist. Man findet $f=-1$,, $f'=1$. Es ist nunmehr Alles bestimmt, und sofort

$$\frac{N}{D} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}.$$

IV. Die Funktion $\frac{1}{x^3(1-x)^2(1+x)}$ findet man gleichgeltend mit

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{7}{4(1-x)} - \frac{1}{4(1+x)}.$$

Anmerkung. Die Leser, welche an der Zerlegung der rationalen Brüche, und überhaupt an den in diesem Kapitel behandelten Gegenständen Interessen finden, können nachschlagen:

Verschiedene Abhandlungen der Berliner Academie der Wissenschaften.

Mehrere Bände des Journals für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle.

Ferner: den ersten Theil von Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Lateinischen übersetzt von Michelsen. Berlin, bei Reimer.

Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von Huzler. Königsberg, bei den Gebrüdern Bornträger.

Convergenz der Reihen.

§. 168. Man kann die Summe der n ersten Glieder einer Reihe nur dann für einen genäherten Werth ihrer Gesammtheit annehmen, wenn diese Reihe convergirt, d. h. insofern bei dem fortwährenden Wachsen von n jene Summe sich einer bestimmten Grenze immer mehr und mehr nähert; besagte Grenze ist alsdann die Summe der ganzen Reihe. Leicht läßt sich erkennen, ob die Glieder einer Reihe im Abnehmen begriffen sind, wenn man das allgemeine Glied der-

selben, d. h. den analytischen Ausdruck für das nte Glied weiß. Die Anwesenheit dieser Eigenschaft einer Reihe ist übrigens noch kein sicheres Kennzeichen ihrer Convergenz, weil die Reihe divergent sein kann, wenn sie auch aus fortwährend abnehmenden Gliedern besteht. Um hievon ein Beispiel zu geben, betrachten wir die sogenannte harmonische Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots$, deren Glieder offenbar unendlich abnehmen. Denn die Summe von $\frac{1}{n+1}$ + den darauf folgenden Gliedern bis zum Gliede $\frac{1}{2n}$ inclusive, nämlich:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\ \ldots+\frac{1}{2n}$$

ist größer als das Produkt $n \times \frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$; ebenso ist die Summe der darauf folgenden $2n$ Glieder größer als $\frac{1}{2}$, u. s. w.; woraus erhellet, daß die ganze Summe die Größe $\frac{1}{2}\times\infty$ übertrifft, mithin keine Grenze hat.

Soll man über die Convergenz oder Divergenz einer Reihe urtheilen, so vergleicht man dieselbe mit andern, bereits als convergirend oder divergirend anerkannten Reihen, wobei man sich des folgenden, von selbst einleuchtenden Satzes bedient: eine Reihe, deren Glieder von einer gewissen Stelle an sämmtlich kleiner sind als die entsprechenden, mit dem nämlichen Zeichen versehenen Glieder einer convergirenden Reihe, convergirt; während eine Reihe, deren Glieder von einer gewissen Stelle an die correspondirenden, mit gleichen Zeichen behafteten Glieder einer divergirenden Reihe übertreffen, divergirt.

§. 169. Nachstehende Sätze reichen für viele Fälle aus, die Frage, ob Convergenz oder Divergenz stattfinde, genügend zu beantworten:

1) Die geometrische Progression $a+ax+ax^2\ldots$ ist convergirend für $x<1$; denn außerdem daß ihre Glieder unendlich abnehmen, werden auch die verschiedenen Summen, von dem Gliede x^n an gerechnet, nämlich:

$$x^n+x^{n+1}=x^n(1+x)=x^n\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right),$$

$$x^n+x^{n+1}+x^{n+2}=x^n\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right), \text{ u. s. w.}$$

beständig kleiner, in dem Maße als n zunimmt.

2) Wenn bei einer Reihe $u_0 + u_1 + u_2 \ldots$ für wachsende Werthe von n sich der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = F$ einer bestimmten Grenze L nähert, so convergirt oder divergirt die Reihe, je nachdem diese Grenze kleiner oder größer als die Einheit ist. Denn setzen wir zuvörderst $L < 1$ voraus, und nehmen eine beliebige zwischen L und 1 liegende Zahl l an, in der Art, daß $L < l < 1$; so wird, weil F bei dem beständigen Zunehmen dem L sich stets nähert, zuletzt kleiner als l werden. Folglich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l, \; u_{n+1} < lu_n, \; u_{n+2} < lu_{n+1}, \; u_{n+3} < lu_{n+2} \ldots,$$

und umsomehr $u_{n+1} < lu_n$, $u_{n+2} < l^2 u_n$, $u_{n+3} < l^3 u_n \ldots$

Da diese consecutiven Glieder sämmtlich kleiner als die correspondirenden Glieder der geometrischen Progression $u_n(l + l^2 + l^3 \ldots.)$ sind, welche convergirt, weil $l < 1$; so muß letzteres bei der vorgelegten Reihe um so mehr der Fall sein.

Man beweist auf ähnliche Weise, daß, wenn L die Einheit übertrifft, die Glieder u_{n+1}, u_{n+2}, ... größer sind als die entsprechenden Glieder einer geometrischen Progression, deren constanter Faktor $l > 1$ ist; man bekommt demnach Glieder, welche jede angebbare Größe übersteigen, woraus hervorgeht, daß die Reihe divergirt.

Für die Entwickelung von $(x+a)^m$ hat man $F = \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{x}{a}$. Bei dem fortwährenden Wachsen von n nähert sich unser Quotient F der Grenze $\frac{x}{a}$, welche er für $n = \infty$ erreicht. Folglich convergirt oder divergirt die Binomialformel, je nachdem $x <$ oder $> a$ ist.

Uebrigens sind die beiden nachstehenden Transformationen geeignet, die Convergenz dieser Reihen zu befördern.

$$x+a = \frac{x}{1 - \frac{a}{x+a}} = \frac{2a}{1 - \frac{x-a}{x+a}}$$

$$(x+a)^m = x\left(1 - \frac{a}{x+a}\right)^{-m} = 2^m a^m \left(1 - \frac{x-a}{x+a}\right)^{-m}$$

$$(x+a)^m = x^m \left\{1 + \frac{m}{1}\left(\frac{a}{x+a}\right) + \frac{m(m+1)}{1.2}\left(\frac{a}{x+a}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$= 2^m a^m \left\{1 + \frac{m}{1}\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + \frac{m(m+1)}{1.2}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2 + \ldots\right\}$$

Wir wollen noch die Reihe $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}\ldots$ betrachten, deren allgemeines Glied $\frac{x^n}{1\cdot2\cdots n}$ uns liefert: $F=\frac{x}{n+1}$, was bei dem fortwährenden Wachsen von n, für jeden bestimmten endlichen Werth von x, kleiner als jede denkbare Größe wird; die Reihe ist folglich convergirend.

3) Enthält eine Reihe negative Glieder und findet man, wenn die negativen Zeichen in positive umgeändert werden, daß eine Convergenz statt hat; so wird eine solche auch für die primitive Reihe eintreten. Denn da die negativen Glieder in Abzug kommen müssen, so wird die Gesammtsumme dadurch vermindert, mithin die Convergenz noch gesteigert. Nehmen wir die Reihe

$$x-\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7}+\ldots,$$

und machen darin alle Glieder positiv, so haben wir das allgemeine Glied $u_n=\frac{x^{2n-1}}{2\cdot3\ldots(2n-1)}$, ferner $F=\frac{x^2}{2n(2n+1)}$. Unsere Reihe convergirt für jeden bestimmten Werth von x, weil $n=\infty$ uns $F=0$ liefert. Ueberdieß findet man $x^2<4n^2+2n$, wenn $F<1$ ist. Nimmt man $4n^2>x^2$, oder $n>\frac{1}{2}x$, so sieht man, daß die Glieder vom $\frac{1}{2}x$ten anfangend, beständig abnehmen.

4) Eine Reihe, deren Glieder beständig abnehmen, ist allemal convergent, wenn ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind. Es sei $+a-b+c-d\ldots$ eine solche Reihe. Da jedes negative Glied sich von dem vorhergehenden positiven abziehen läßt, so hat man lauter positive Binome und die Summe erhält das Zeichen +. Man kann unsere Reihe auch wie folgt, schreiben: $a-(b-c)-(d-e)\ldots$ aus welcher Form hervorgeht, daß a die Summe der subtractiven Theile übertreffen müsse. Nun läßt sich aber in der Reihe für a ein hinlänglich entferntes Glied annehmen, so daß es kleiner als jede denkbare Größe ist; mithin wird dieß umsomehr bei der ganzen Summe von a an bis ins Unendliche der Fall sein. So z. B. ist die Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots$ convergirend, während sie es nicht ist, wenn die Zeichen sämmtlich positiv sind.

Anmerkungen. In dem Falle, daß die durch L bezeichnete Größe der Einheit gleich ist, bleibt es zweifelhaft, ob Convergenz oder Divergenz statt habe. Vermittelst der beiden folgenden Hülfssätze läßt sich öfters entscheiden, ob diese oder jene eintrete.

I. Die Reihe $u_1+u_2+u_3+u_4$ ꝛc. . . . . (1), in welcher jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende ist, convergirt oder divergirt gleichzeitig mit der Reihe

$$u_1+2u_2+4u_4+ \text{ꝛc.} \ldots (2).$$

Aus der Abnahme der Glieder folgt

$u_1=u_1$	$u_1=u_1$
$2u_2=2u_2$	$2u_2>u_2+u_3$
$4u_4<2u_3+2u_4$	$4u_4>u_4+u_5+u_6+u_7$
$8u_8<2u_5+2u_6+2u_7+2u_8$	$8u_8>u_8+u_9+\ldots u_{15}$

Die Addition dieser Sätze zeigt, daß die Reihe (2) kleiner als die doppelte Summe der Reihe (1), aber größer als die einfache Summe der letztern ist, woraus die Richtigkeit der Aussage erhellet. Wendet man dieß auf die Reihe

$$1+\frac{1}{2^u}+\frac{1}{3^u}+\ldots (1)$$

an, so ist die Reihe (2) folgende:

$$1+2^{1-u}+4^{1-u}+\ldots.$$

Dieselbe ist convergirend wenn $u>1$, dagegen divergirend, wenn $u=$ oder <1; Aehnliches gilt daher auch für die primitive Reihe.

II. Nähert sich bei dem fortwährenden Wachsen von n der Quotient $\dfrac{\log(u_n)}{\log\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ einer Grenze h, wobei die Logarithmen aus jedem beliebigen System genommen werden dürfen; so convergirt oder divergirt die Reihe $u_1+u_2+u_3+\ldots(1)$, je nachdem $h>$ oder $<$ als 1 ist. Es sei $h>1$. Wir denken uns eine zwischen 1 und h liegende Zahl a, in der Art, daß $h>$

$a>1$. Der Quotient $\dfrac{\log(u_n)}{\log\left(\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{\log\left(\dfrac{1}{u_n}\right)}{\log(n)}$ wird bei dem unendlichen Wachsen von n zuletzt größer als a sein, folglich auch $u_n < \dfrac{1}{n^a}$. Die Glieder der Reihe (1) werden daher kleiner als die correspondirenden Glieder der Reihe

$$1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}\;\ldots\ldots$$

sein, welche convergirt, wenn $a>1$. Es sei $h<1$. Wir denken uns abermals eine zwischen h und 1 liegende Zahl a, so daß $h<a<1$. Für sehr große Werthe von n wird $\dfrac{\log\left(\dfrac{1}{u^n}\right)}{\log(u)} < a$, mithin $u_n > \dfrac{1}{n^a}$. Die Glieder der Reihe (1) sind also größer als die correspondirenden Glieder der Reihe

$$1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots\ldots,$$

welche für $a<1$ divergirt.

Recurrente Reihen.

§. 170. Jeder nach den aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen x geordnete rationale Bruch, dessen Zähler N in Bezug auf x von einem niedrigern Grade als der Nenner D ist, läßt sich in eine unendliche Reihe von der Form $A+Bx+Cx^2+\ldots$ entwickeln. Es ergibt sich dieß unmittelbar aus der Division von N durch D, wobei der Quotient niemals negative oder gebrochene Exponenten für x liefern kann. Mit Hülfe dieser Division würden sich die Coefficienten $A, B, C\ldots$ bestimmen lassen; die folgende Rechnungsart erhält jedoch den Vorzug, indem sie das Gesetz der Reihe zur Evidenz bringt. Man setze

$$\frac{N}{D}=\frac{a+bx+cx^2+\ldots+hx^{i-1}}{1+\alpha x+\beta x^2+\ldots\vartheta x^i}=A+Bx+Cx^2+Dx^3\;\ldots\ldots$$

Man bekommt die zur Bestimmung der Coefficienten $A, B, C\ldots$ nöthigen Gleichungen, wenn man auf einerlei Nenner reducirt, und

hierauf die Glieder, in welchen x mit denselben Exponenten behaftet ist, mit einander vergleicht. Wir nehmen dabei an, daß der Nenner die Einheit zum constanten Gliede habe, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, indem man Zähler und Nenner durch das erste Glied, welches es auch sein mag, dividiren kann. Es sei zuvörderst

$$\frac{N}{D} = \frac{a}{1+\alpha x} = A+B+Cx^2 \ldots .$$

Man hat $a = A + B \mid x + C \mid x^2 + D \mid x^3 + \ldots$
$\qquad\qquad + A\alpha \mid B\alpha \mid + C\alpha \mid + \ldots;$

woraus folgt: $a=A$, $B+A\alpha=0$, $C+B\alpha=0 \ldots .$

Die erste dieser Gleichungen gibt A, die zweite B, die dritte C... Ueberhaupt besteht für zwei beliebige successive Coefficienten M und N unserer Reihe die Relation $N+M\alpha=0$, woraus $N=-M\alpha$: jedes Glied ist also das Produkt aus dem vorhergehenden, durch $-\alpha x$, d. h. die Reihe bildet eine geometrische Progression, die $-\alpha x$ zum Faktor hat. Man erhält so nach und nach alle Glieder, vom ersten $A=a$ an gerechnet, welches man auch dadurch bekommt, daß man in dem vorgelegten Bruche $x=0$ macht. Folglich

$$\frac{a}{1+\alpha x} = a\left[1-\alpha x+\alpha^2x^2-\alpha^3x^3 \ldots + (-\alpha x)_n \ldots .\right].$$

Das allgemeine Glied T, oder das Glied, dem n Glieder vorhergehen, und das summatorische Glied Σ, oder die Summe der n ersten Glieder sind:

$$T = a(-\alpha x)^n,\ \Sigma = a\,\frac{1-(-\alpha x)^n}{1+\alpha x}$$ (Niedere Algebra §. 54).

Umgekehrt, kennt man die Reihe und das Gesetz ihrer Bildung, so kann daraus die gebrochene Funktion, aus welcher jene Reihe entstanden ist, d. h. der erzeugende Bruch gefunden werden. Denn das erste Glied a bildet den Zähler, und 1— dem Faktor der Progression den Nenner des fraglichen Bruches. Die gebrochene Funktion $\frac{3}{6-4x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}x}$ gibt, nachdem oben und unten durch 6 dividirt worden, die Reihe $\frac{1}{2}(1+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}x^2+\ldots)$ deren erstes Glied $\frac{1}{2}$ und deren Faktor $\frac{2}{3}x$ ist.

Man findet $T=\frac{2^{n-1}x^n}{3^n}$, $\Sigma=\frac{1}{2}\,\frac{[1-(\frac{2}{3}x)^n]}{1-\frac{2}{3}x}$.

Ist dagegen diese Reihe und ihr Bildungsgesetz bekannt, so erhält man den Erzeugungsbruch, wenn man das erste Glied $\frac{1}{2}$ durch $1-$ dem Faktor $\frac{2}{3}x$ dividirt.

Es sei ferner $\frac{a+bx}{1+\alpha x+\beta x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ \ldots$;

man hat
$$a+bx=\begin{array}{l|l|l|l} A+B & x+C & x^2+D & x^3\ \ldots\ldots \\ \quad +A\alpha & \ \ +B\alpha & \ \ +C\alpha & \quad\ \ldots\ldots \\ & \ \ +A\beta & \ \ +B\beta & \quad\ \ldots\ldots \end{array},$$

woraus $A=a$, $B+Aa=b$, $C+B\alpha+A\beta=0$, ...

Mit Hülfe dieser Gleichungen werden die Coefficienten A, B, C.... nach und nach bestimmt; die erste derselben läßt sich auch dadurch ableiten, daß man in der primitiven Gleichung $x=0$ macht. Sind M, N, P drei consecutive unbestimmte Coefficienten der Entwickelung, so gibt die Rechnung $P+N\alpha+M\beta=0$, woraus $P=-N\alpha-M\beta$: jedes Glied der Reihe, vom dritten an gerechnet, wird also aus den beiden vorhergehenden gebildet, wenn man sie respektiv durch $-\alpha x$ und $-\beta x^2$ multiplicirt. Es ist zu bemerken, daß diese beiden Faktoren, von 1 abgezogen, den Nenner des vorgelegten Bruches geben. Um ihn in eine Reihe zu entwickeln, muß man zuvor die beiden ersten Glieder $A+Bx$ finden, was entweder durch eine unmittelbare Division, oder mittelst der Gleichungen $A=a$, $B=b-a\alpha$ geschieht; mit Hülfe der Faktoren $-\alpha x$ und $-\beta x^2$ werden hierauf die folgenden Glieder nach und nach gebildet.

Ist umgekehrt die Reihe und ihr Bildungsgesetz gegeben, so kann durch eine leichte Rechnung der erzeugende Bruch, welcher der ins Unendliche fortlaufenden Reihe gleichgeltend ist, gefunden werden. Nämlich 1 weniger den beiden Faktoren αx und βx^2 bilden den dreigliederigen Nenner $1+\alpha x+\beta x^2$. Was den Zähler $a+bx$ anbelangt, so hat man $a=A$, $b=B+A\alpha$. In der gebrochenen Funktion $\frac{2-4x}{x^2-x-2}$ sind, wenn oben und unten mit -2 dividirt worden, $-\frac{1}{2}x$ und $+\frac{1}{2}x^2$ die Faktoren; für die beiden ersten Glieder findet man $-1+\frac{5}{2}x$; hieraus entsteht die Reihe $-1+\frac{5}{2}x+\frac{7}{4}x^2+\frac{17}{8}x^3\ldots$ Ist umgekehrt die Reihe bekannt, d. h. kennt man die beiden ersten Glieder derselben und die Faktoren $-\frac{1}{2}x$, $+\frac{1}{2}x^2$; so geben die letztern

Uebrigens können diese Wurzeln reell oder imaginär, rational oder irrational, positiv oder negativ sein. Indem wir hier wieder $\frac{1}{x}$ statt y schreiben, bekommen wir

$1+\alpha x+\beta x^2 \ldots + \vartheta x^i = (1-kx)(1-k'x)(1-k''x) \ldots$, woraus

$$F = \frac{K}{1-kx} + \frac{K'}{1-k'x} + \frac{K''}{1-k''x} + \ldots (2).$$

Im Paragraphen 167 sind aber die Mittel angegeben worden, um die constanten Größen K, K', K'' ... zu bestimmen, diese sind daher wie die Coefficienten k, k', k'' ... als bekannt anzusehen.

Nun läßt sich jeder von diesen Partialbrüchen (2) in eine geometrische Progression entwickeln; die Reihe (1) wird daher mit der Gesammtheit jener i Progressionen einerlei, das allgemeine Glied T folglich der Summe ihrer allgemeinen Glieder gleichgeltend sein. Hiernach steht

$$T = (Kk^n + K'k'^n + K''k''^n + \text{ꝛc.})\,x^n \quad \ldots (3).$$

Um also das allgemeine Glied T einer vorgelegten recurrirenden Reihe in geometrische Progressionen, deren Summe sie ausmacht, zu zerfällen, muß man den Nenner des Erzeugungsbruches gleich Null setzen, in demselben $\frac{1}{y}$ statt x schreiben, und aus der Gleichung $y^i + \alpha y^{i-1} + \ldots = 0$ die Wurzeln k, k', k'' .... suchen; diese mit entgegengesetzten Zeichen genommen, werden die Faktoren von x in den Nennern der Partialbrüche (2) bilden. Da auf diese Art die Verhältnisse kx, k'x, ... der Progressionen nebst den Coefficienten K, K', ... der Zähler jener Brüche, bestimmt sind; so wird das allgemeine Glied T (3) bekannt sein.

Das summatorische Glied Σ der recurrenten Reihe läßt sich leicht finden, weil es mit der Summe der summatorischen Glieder unserer Progressionen gleichgeltend ist.

Wenn die Gleichung $y^i + \alpha y^{i-1} + \ldots = 0$ vielfache Wurzeln, d. h. einen Faktor $(y-r)^l$ besitzt; so muß man in die Gleichung (2) außer den, den ungleichen Faktoren entsprechenden Brüchen noch andere Brüche von der Form

$$\frac{L'}{1-rx} + \frac{L''}{(1-rx)^2} + \frac{L'''}{(1-rx)^3} + \ldots + \frac{L}{(1-rx)^l} \ldots (4)$$

einführen.

Die Formel des Binoms gibt nun

$$L(1-rx)^{-l}=L\left\{1+lrx+l\cdot\frac{l+1}{2}\,r^2x^2+l\,\frac{l+1}{2}\cdot\frac{l+2}{3}\,r^3x^3\;\ldots\ldots\right\},$$

dessen allgemeines Glied nach §. 10.

$$=L\,\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\;\ldots\;(n+l-1)}{1\cdot2\cdot3\;\ldots\;(l-1)}\,r^n x^n \;\ldots\;(5)$$

ist. Um das allgemeine Glied T der Summe aller Brüche (4) zu bekommen, muß man successive $l=1,\ 2,\ 3\ \ldots$ machen und addiren, wodurch wir erhalten:

$$T=\left\{L'+L''(n+1)+L'''(n+1)\frac{(n+2)}{2}+L^{IV}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots}{2\cdot3}\right\}r^n x^n\ldots(6)$$

Die Brüche (4) erzeugen, mit Ausnahme des ersten, keine geometrische Progressionen mehr.

Beispiele. I. Für die gebrochene Funktion $\frac{2x-1}{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2}$ bekommt man $y^2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0$, woraus $y=\frac{1}{2}$ und $=-1$; folglich

$$\frac{2x-1}{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2}=\frac{K}{1-\frac{1}{2}x}+\frac{K'}{1+x}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}-\frac{2}{1+x}.$$

Hieraus ergeben sich die zwei geometrischen Progressionen:

$$1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}x^2\;\ldots\;(\tfrac{1}{2}x)^n,\ \text{und}\ -2\,[1-x+x^2\;\ldots\;(-x)^n].$$

Durch Addition der gleichstelligen Glieder findet man die Reihe $-1+\frac{5}{2}x-\frac{7}{4}x^2\ldots$, deren allgemeines Glied $T=[(\frac{1}{2})^n-2(-1)^n]x^n$ ist.

II. Der Bruch $\frac{1}{1-4x+3x^2}$ gibt die Gleichung $y^2-4y+3=0$, woraus $y=3$ und $=1$. Daraus entspringen die Partialbrüche $\frac{\frac{3}{2}}{1-3x}-\frac{\frac{1}{2}}{1-x}$, und die Progressionen $\frac{3}{2}(1+3x+3^2x^2\ldots 3^n x^n)$ und $-\frac{1}{2}(1+x+x^2\;\ldots\;x^n)$, wofür das allgemeine Glied $T=\frac{1}{2}x^n(3^{n+1}-1)$ ist.

III. Die Funktion $\frac{2+x+x^2}{2-x-2x^2+x^3}$ verwandelt sich in

$$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2}{1-\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3}=\frac{2}{1-x}+\frac{\frac{1}{3}}{1+x}-\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}x}$$

Die allgemeinen Glieder der Progressionen sind $2x^n$, $\frac{1}{3}(-x)^n$

und $-\frac{4}{3}(\frac{1}{2}x)^n$. Hieraus die Reihe $1+x+2x^2+\frac{3}{2}x^3\ldots$, deren Relationsscale $\frac{1}{2}x$, x^2 und $-\frac{1}{2}x^3$ ist, und das allgemeine Glied $T=\frac{1}{3}x^n[6\pm1-(\frac{1}{2})^{n-2}]$ hat.

IV. Die Bruchfunktion $\frac{x^3+5x^2-10x+2}{x^4-3x^3+x^2+3x-2}$ gibt die Partialbrüche

$$-\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{4}{3}}{1+x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x};$$

wofür das allgemeine Glied

$$T=[-\tfrac{5}{3}(\tfrac{1}{2})^n\mp\tfrac{4}{3}+n+2]\,x^n.$$

V. Auf die nämliche Weise findet man

$$\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}=\frac{6}{(1-x)^4}-\frac{6}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1-x)^2};\text{ ferner}$$

$$T=[(n+1)(n+2)(n+3)-3(n+1)(n+2)+n+1]x^n=(n+1)^3x^n;$$

die Reihe ist $1^3+2^3x+3^3x^2+4^3x^3\ldots+(n+1)^3x^n$.

VI. Es sei endlich die Bruchfunktion

$$\frac{24+20x+8x^2+3x^3}{8+4x-18x^2+11x^3-2x^4}=3+x+\tfrac{29}{4}x^2-\tfrac{41}{8}x^3+\tfrac{73}{4}x^4\ldots$$

Man dividirt oben und unten durch 8, und setzt den Nenner gleich Null, indem man x mit $\frac{1}{y}$ vertauscht. Dadurch entsteht die Gleichung $y^4+\frac{1}{2}y^3-\frac{9}{4}y^2\ldots=0$ oder $(y+2)(y-\frac{1}{2})^3=0$.

Die vorgelegte Funktion zerfällt hernach in die Partialbrüche:

$$\frac{1}{1+2x}+\frac{3}{(1-\frac{1}{2}x)^3}-\frac{2}{(1-\frac{1}{2}x)^2}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}.$$

Für den ersten hat man das allgemeine Glied $(-2x)^n$; für die drei andern setzt man $l=3$, 2 und 1 in der Gleichung (5), wobei beziehungsweise $L=3,-2$ und 1 genommen wird. Hiernach hat man:

$$\frac{3(n+1)(n+2)}{2}(\tfrac{1}{2}x)^n,\ -2(n+1)(\tfrac{1}{2}x)^n \text{ und } 1\cdot(\tfrac{1}{2}x)^n.$$

Indem man diese vier Resultate vereinigt, findet man für das allgemeine Glied der vorgelegten Reihe den Ausdruck

$$T=x^n\left((-2)^n+\frac{3n^2+5n+4}{2^{n+1}}\right).$$

§. 173. Es können die constanten Faktoren $K, K', \ldots$ auch erhalten werden, ohne gerade zur Zerfällung in Partialbrüche seine Zuflucht zu nehmen. Selbst die Zähler dieser letztern lassen sich finden, insofern man die direkte Verfahrungsweise zur Bestimmung jener Faktoren in Anwendung bringt. Die Anfangsglieder $A+Bx+Cx^2 \ldots$ der Reihe (1) sowie die Wurzeln $k, k', k'' \ldots$ sind bekannt. Macht man daher in dem Ausdruck (3) von T successive $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, so müssen diese consecutiven Glieder wieder zum Vorschein kommen, nämlich:

$$A=K+K'+K'' \ldots, \quad B=Kk+K'k' \ldots, \quad C=Kk^2+K'k'^2 \ldots$$

Indem man eine Anzahl i von diesen Gleichungen ansetzt, lassen sich daraus die Werthe der i constanten Größen $K, K', K'' \ldots$, welche nur auf dem ersten Grade vorkommen, ableiten.

Hat der Nenner F außer den Gliedern Kk^n, $K'k'^n \ldots$ welche den ungleichen Faktoren entsprechen, auch vielfache Faktoren von der Form $(1-rx)^l$; so sind auch noch andere Glieder vorhanden; deren Form in der Gleichung (5) begriffen ist, wobei $l=1, 2, 3 \ldots$. Man sieht bald ein, daß diese letzteren Glieder sich in dem Ausdruck

$$(a'+b'n+c'n^2+d'n^3 \ldots +f'n^{l-1})r^n x^n$$

vereinigt finden, wo $a', b' \ldots f'$ unbekannte Zahlen vorstellen, welche man auf ähnliche Weise, wie vorhin, bestimmen kann, indem ebensoviele Gleichungen gebildet werden, als unbestimmte Größen vorkommen.

Beispiele. I. Es sei die schon früher behandelte Funktion $\frac{2-4x}{x^2-x-2}$, für welche $k=\frac{1}{2}$, $k'=-1$ gefunden worden; mithin

$$T=[K(\tfrac{1}{2})^n+K'(-1)^n]x^n.$$

Setzen wir $n=0$ und 1, so bekommen wir, da die beiden ersten Glieder der Reihe $-1+\frac{5}{2}x$ sind, die Gleichungen $K+K'=-1$, $\frac{1}{2}K-K'=\frac{5}{2}$, woraus $K=1$, $K'=-2$, wie oben. Es entspringen zugleich daraus die Partialbrüche $\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}-\frac{2}{1+x}$.

II. Die gleichfalls schon da gewesene Funktion $\frac{2+x+x^2}{2-x-2x^2+x^3}$, für welche $k=1, k'=-1, k''=\frac{1}{2}$ gefunden worden, gibt

$$T=[K+K'(-1)^n+K''(\tfrac{1}{2})^n]x^n.$$

Machen wir $n=0$, 1 und 2, und vergleichen wir damit beziehungsweise die Glieder der Reihe $1+x+2x^2 \ldots$; so haben wir

$$K+K'+K''=1, \quad K-K'+\tfrac{1}{2}K''=1, \quad K+K'+\tfrac{1}{4}K''=2,$$

aus welchen Gleichungen man $K=2$, $K'=\frac{1}{3}$, $K''=-\frac{4}{3}$ findet, und den nämlichen Werth von T, wie vorhin, erhält.

III. Die Funktion $\dfrac{6(2-2x-x^2)}{4-12x+9x^2-2x^3}=3+6x+\frac{39}{4}x^2+\ldots$ liefert die Gleichung

$$y^3-3y^2+\tfrac{9}{4}y-\tfrac{1}{2}=0=(y-2)(y-\tfrac{1}{2})^2.$$

Der von dem Faktor $y-2$ herrührende Partialbruch ist $\dfrac{K}{1-2x}$, dem das allgemeine Glied $K \cdot 2^n x^n$ angehört. Die dem Faktor $(y-\frac{1}{2})^2$ entsprechenden Brüche liefern $(a'+b'n)(\frac{1}{2}x)^n$ Hiernach

$$T=[2^n K+(\tfrac{1}{2})^n (a'+b'n)]x^n.$$

Für $n=0$, 1, 2 entstehen die Gleichungen:

$$3=K+a', \quad 6=2K+\tfrac{1}{2}a'+\tfrac{1}{2}b', \quad \tfrac{39}{4}=4K+\tfrac{1}{4}a'+\tfrac{1}{2}b', \text{ folglich}$$

$$K=2, \quad a'=1, \quad b'=3 \text{ und } T=x^n\left(2^{n+1}+\frac{1+3n}{2^n}\right).$$

IV. Die schon behandelte Bruchfunktion $\dfrac{24+20x+8x^2+3x^3}{8+4x-18x^2+11x^3-2x^4}$, für welche man $k=-2$, $r=\frac{1}{2}$, $l=3$ hat, ferner

$$T=x^n\,[(-2)^n K+(\tfrac{1}{2})^n (a'+b'n+c'n^2)],$$

liefert uns, wenn $n=0$, 1, 2, 3 gesetzt wird, die Gleichungen:

$$3=K+a', \quad 1=-2K+\tfrac{1}{2}a'+\tfrac{1}{2}b'+\tfrac{1}{2}c', \quad \tfrac{29}{4}= \text{ꝛc.}$$

Hieraus ergibt sich $K=1$, $a'=2$, $b'=\frac{5}{2}$, $c'=\frac{1}{2}$, und der nämliche Werth von T, wie der oben gefundene. Schließlich mag noch bemerkt werden, daß das im §. 168 und 169 über die Convergenz der Reihen Gesagte sich auf alle in diesem Kapitel vorkommenden Gegenstände erstreckt.

Entwickelung der Exponentialgrößen.

§. 174. Die erste transcendente Funktion, welche wir in eine Reihe entwickeln wollen, sei die Exponentialgröße a^x. Setzen wir

$a=1+y$, so gibt uns die Binomialformel

$$(1+y)^x=1+xy+x\frac{(x-1)}{2}y^2\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)-(x-n+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n}y^n\ldots$$

Das einzige von x unabhängige Glied ist 1, ferner haben wir für x nur positive und ganze Exponenten. Wir erhalten daher, wenn nach x geordnet wird, eine Reihe von der Form

$$a^x=1+kx+Ax^2+Bx^3\ldots+Px^{n-1}+Qx^n\ldots(1).$$

Um das Glied kx zu finden, gehen wir zu unserem allgemeinen Gliede zurück. Es stellt sich sofort heraus, daß, wenn bloß das Glied des Produktes, in welchem x nur auf dem ersten Grad vorkommt, genommen werden soll, nur die zweiten Glieder der Binomialfaktoren, oder $\frac{x\cdot-1\cdot-2\ldots-(n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}y^n=\pm y^n\frac{x}{n}$ beizubehalten sind, wo das Zeichen $+$ gilt, wenn n ungerade ist. Die Vereinigung aller dieser Produkte gibt kx, nämlich

$$k=y-\tfrac{1}{2}y^n+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4\ldots\pm\frac{y^n}{n}\ldots(2).$$

Hieraus folgt, daß k bekannt ist, weil $y=a-1$. Es handelt sich jetzt darum, die Größen A, B, $C\ldots$ zu bestimmen. Da dieselben von x unabhängig sind, so werden wir, wenn x in z übergeht, ebenfalls haben

$$a^z=1+kz+Az^2+Bz^3\ldots+Qz^n\ldots.$$

Indem von dieser letztern die Gleichung (1) abgezogen und $z=x+i$ gesetzt wird, haben wir

$$a^z-a^x=a^x(a^i-1),\ a^x(a^i-1)=$$
$$(z-x)[k+A(z+x)+B(z^2+zx+x^2)\ldots+Q(z^{n-1}+xz^{n-2}\ldots+x^{n-1})\ldots]$$

Der Gleichung (1) zufolge ist aber $a^i-1=ki+Ai^2\ldots$; die beiden Theile der vorherstehenden Gleichung sind daher durch $i=z-x$ theilbar, und wir bekommen

$$a^x(k+Ai\ldots)=k+A(z+x)+B(z^2+zx+x^2)\ldots$$

Wenn man $i=0$ oder $z=x$ annimmt, und für a^x seinen Werth (1) substituirt, so entsteht:

$$(1+kx+Ax^2+Bx^3\ldots+Px^{n-1}\ldots)k=k+2Ax+3Bx^2\ldots+nQx^{n-1}\ldots;$$

hieraus $2A=k^2$, $3B=kA$, $4C=kB$, $\ldots kP=nQ\ldots$

Die Gleichung $kP=nQ$ zeigt, daß irgend ein Coefficient Q aus dem nächstvorhergehenden gebildet wird, wenn man den letztern mit der constanten Größe k multiplicirt und das Produkt durch die Zahl n, welche die Stelle des gesuchten Coefficienten angibt, dividirt. Hiernach steht die gesuchte Entwickelung:

$$a^x=1+kx+\frac{k^2x^2}{2}+\frac{k^3x^3}{2\cdot 3}\ldots\ldots+\frac{k^n\,x^n}{2\cdot 3\cdots n}\ldots(A).$$

§. 175. Die Gleichung (2) bestimmt k vermittelst y oder a. Um hingegen a zu berechnen, wenn k bekannt ist, setzen wir $x=1$ in (A). Es kommt dann $a=1+k+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k^3+\ldots$ Diese letztere Reihe und die Reihe (2) machen die Entwickelung der Gleichung aus, welche unter einer endlichen Form die zwischen a und k bestehende Abhängigkeit ausdrückt. Um diese Beziehung aufzufinden, setzen wir hier $k=1$, und bezeichnen den correspondirenden Werth von a durch e. Daraus ergibt sich $e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\ldots$ Die Berechnung dieser Zahl läßt sich leicht bewerkstelligen, wie man nebenbei sieht:

	2,5
3tes Glied	0,16666 66666 66
4	0,04166 66666 66
5	0,00833 33333 33
6	0,00138 88888 88
7	0,00019 84126 98
8	0,00002 48015 87
9	0,00000 27557 32
u. s w.	
	e=2,71828 18284 59

Jedes Glied wird nämlich aus dem nächstvorhergehenden abgeleitet, indem man dasselbe bezüglich durch 3, 4, 5 . . . . dividirt, wie es die Natur unserer Reihe mit sich bringt. Machen wir ferner $1=kx$ in der Reihe (A), was uns die Willkührlichkeit von x gestattet; so erhalten wir

$$a^{\frac{1}{k}}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\ldots\ldots$$

Aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem Werthe von e entspringt die Gleichung $e=a^{\frac{1}{k}}$ oder $e^k=a$. Es ist dieß die gesuchte endliche Gleichung zwischen k und a, wo k den Logarithmen von a in dem System, dessen Basis e ist, darstellt. Dieß Logarithmensystem wird das Nepersche System genannt und ist in der gesammten Analysis von der ausgedehntesten Anwendung. In der Folge werden wir die Neperschen Logarithmen durch den Buchstaben l bezeichnen, indem wir, wie schon in der niedern Algebra geschehen,

das Zeichen Log für jedes beliebige System, und das Zeichen log für die gewöhnlichen Logarithmen, bei welchen 10 die Basis ist, vorbehalten. Es ist also $k = la =$ dem Logarithmen von a in dem Neperschen System, für welches e die Basis ist ... (3); ferner

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2}{2} l^2a + \frac{x^3}{2 \cdot 3} l^3a + \ldots (A');$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \ldots (B).$$

Anmerkung. Die im §. 169 gegebene Regel zeigt, daß die Reihe (A) für jeden Werth von x convergirt. Nimmt man nämlich den Quotienten zweier unmittelbar aufeinander folgenden Glieder, so findet man ihn $= \frac{kx}{n+1}$. Bei dem unendlichen Wachsen von n wird dieser Quotient, bei jedem Werthe von x, zuletzt kleiner als die Einheit. Die Convergenz der Reihe beginnt, sobald $n > kx - 1$ geworden ist.

Logarithmische Reihen.

§. 176. Nimmt man die Logarithmen von der Gleichung $e^k = a$ in einem System, dessen Basis die willkührliche Zahl b ist; so bekommt man $k = \frac{\text{Log } a}{\text{Log } e} \ldots\ldots (4)$. Daraus folgt, wenn wir die Gleichung (2) im §. 174 zu Hülfe nehmen und berücksichtigen, daß $a = 1 + y$:

$$\text{Log } (1+y) = \text{Log } e(y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 \ldots) \ldots (C).$$

Addiren wir auf beiden Seiten Log h hinzu, und setzen $hy = z$ so haben wir

$$\text{Log } (h + z) = \text{Log } h + \text{Log } e\left(\frac{z}{h} - \frac{z^2}{2h^2} + \frac{z^3}{3h^3} \ldots\ldots\right) \ldots (D),$$

wobei h und z sowie die Basis des Logarithmensystems beliebige Zahlen bedeuten. Wählt man die Neperschen Logarithmen, so verwandelt sich Log e in $le = 1$, und die Gleichung (C) wird

$$l(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 \ldots\ldots; \text{ folglich}$$
$$\text{Log } 1(+y) = \text{Log } e \times l(1+y).$$

Man erhält also die einer beliebigen Basis b entsprechenden Logarithmen, wenn man die Neperschen mit dem Faktor Log e multiplicirt.

Dieser constante Faktor $\text{Log}\, e = M$ wird der Modul genannt; derselbe ist demnach mit dem Logarithmen der Neperschen Zahl e für die Basis b, oder wenn man will, mit der Einheit dividirt durch den Neperschen Logarithmen der Basis b gleichgeltend. Für jedes besondere System hat der Modul seinen eigenen Werth, weil der Logarithme der unveränderlichen Zahl $e = 2{,}71828\ldots.$ mit der Basis b sich ändern muß. Nimmt man a zur Basis, mithin $\text{Log}\, a = 1$; so hat man $k\, \text{Log}\, e = 1$; hieraus

$$Mk = 1,\; M = \text{Log}\, e,\; M = \frac{1}{k} = \frac{1}{la} \quad \ldots (5)$$

Die beiden Faktoren M und k ändern sich mit der Basis des Systems, ihr Produkt bleibt aber constant und gleich $= 1$. Wir werden in der Kürze sehen, wie der Modul für irgend eine gegebene Basis a zu berechnen ist.

§. 177. Um die Gleichung (C) zur Berechnung des Logarithmen einer bekannten Zahl anzuwenden, muß man die Reihe zu einer convergirenden machen. Vertauscht man deshalb in derselben $-y$ mit y, so liefert sie

$$\text{Log}\,(1-y) = -M(y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 \ldots).$$

Zieht man dieß Resultat von (C) ab, so kommt

$$\text{Log}\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2M(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{7}y^7 \ldots) \ldots (E).$$

Wird $\frac{1+y}{1-y} = \frac{z}{z-1}$ gesetzt, woraus $y = \frac{1}{2z-1}$; so erhält man den Werth für die Differenz der Logarithmen zweier aufeinanderfolgenden Zahlen z und $z-1$, nämlich:

$$\text{Log}\, z - \text{Log}\,(z-1) = \Delta =$$
$$2M\left(\frac{1}{2z-1} + \frac{1}{3(2z-1)^3} + \frac{1}{5(2z-1)^5} \ldots.\right) \ldots . (F).$$

Mit Hülfe dieser Formel lassen sich nach und nach die Logarithmen der Zahlen 2, 3, 4, 5 ... sehr leicht auffinden, wenn der Modul M bekannt ist. Auch ist der Ausdruck für die Differenz Δ zwischen den Logarithmen sehr convergent, und wird es um so mehr, je größer die Zahl z ist. Für das Nepersche System verwandelt sich M in 1, und es hat nicht die geringste Schwierigkeit, den Werth von Δ für dieß System zu berechnen: die Construction einer Tafel

der Neperschen Logarithmen ließe sich hiernach ohne Weiteres ausführen.

Was den Werth des Moduls M (5) anlangt, so ergibt sich derselbe aus der Berechnung von la, d. h. aus dem Neperschen Logarithmen der Basis a.

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir a=10 annehmen. Machen wir M=1 in der Gleichung (F), ferner z=2; so kommt △=l2, weil l1=0. Das doppelte von l2 ist l4. Um den Logarithmen von 5 zu erhalten, setze man z=5. Zu diesem Logarithmen den für 2 gefundenen hinzugefügt, hat man l10. Die Rechnung steht hiernach:

$$\begin{aligned}
l2 &= 0{,}69314\ 718056 \\
l4 &= 1{,}38629\ 436112 \\
\triangle \text{ für } 5 &= 0{,}22314\ 355131 \\
l5 &= 1{,}60943\ 791243 \\
l2 &= 0{,}69314\ 718056 \\
l10 &= 2{,}30258\ 509299
\end{aligned}$$

Dividirt man hierauf 1 durch l10, so findet man

$$\begin{aligned}
M &= 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765, \\
\log M &= 0{,}63778\ 43113\ 00536\ 77817-1, \\
\text{Compl.} &= 0{,}36221\ 56886\ 99463\ 22183, \\
e &= 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536.
\end{aligned}$$

Wäre 3 die Basis des Systems, so fände man, nachdem vorerst l2 berechnet worden, wenn z=3 gesetzt wird:

$$l3=1{,}09861229\text{; folglich } M=\frac{1}{l3}=0{,}9102392.$$

Ebenso bekäme man für die Basis 5 den Modul

$$M=\frac{1}{l5}=0{,}6213349.$$

Es hat also jetzt gar keine Schwierigkeit, die gewöhnlichen Logarithmen, für welche die Basis a=10 ist, zu berechnen: der Werth von M steigert hier überdies die Convergenz der Reihe (F).

Wenn z die Zahl 100 übertrifft, so kann das zweite Glied außer Acht bleiben, und das erste liefert schon den Werth von △ mit 8 Decimalstellen. Man muß jedoch 2 bis 3 Ziffern mehr als diejeni-

gen, welche man beibehalten will, berechnen, damit die Anhäufung der Fehler vermieden werde.

Es ist zweckgemäß, erst von $z=10000$ auszugehen, indem die Logarithmen der darunter befindlichen Zahlen sich leicht aus den andern herleiten lassen. Auch kann man 1 gegen 2z vernachläßigen und $\triangle=\frac{M}{z}$ setzen, sobald z mehr als 1200 beträgt.

Für $z=10001$ z. B. hat man $\triangle=0{,}000043425$; hieraus $\log 10001=4{,}000043425$. Für $z=99857$ ist $\triangle=0{,}000004349$, welche Größe zu $\log 99856=4{,}9993742$ hinzugefügt werden muß, um $\log 99857=4{,}9993785$ zu erhalten.

Wenn wir erwägen, daß die consecutiven Logarithmen in einer gewissen Ausdehnung der Tafel einerlei Differenz beibehalten; so sehen wir, daß es bloß nöthig ist, die Werthe von $\triangle$ von einem Intervall zum andern zu berechnen. So z. B. liefert $z=99840$ dieselbe Zahl $\triangle$, nämlich den hier oben angegebenen Werth, wie $z=99860$; in dem Zwischenraum von diesen beiden Zahlen ist daher $\triangle$ constant, insofern man sich mit 9 Decimalstellen begnügt.

Anmerkung. Für Tafeln, welche die Briggischen Logarithmen auf 7 Decimalstellen enthalten, kann man nach der Formel (D), wenn z nahe gleich 10000 ist, oder diese Zahl schon übertrifft, setzen:

$$\log(z+1)-\log z=M\cdot\frac{1}{z}.$$

Umsomehr daher auch, wenn $d<1$ ist:

$$\log(z+d)-\log z=M\frac{d}{z}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen entspringt

$$\log(z+d)=\log z+d\,[\log(z+1)-\log z].$$

Auf dieser Formel beruht das gewöhnliche Verfahren, die Logarithmen der Zahlen, welche außerhalb der Grenzen einer Tafel liegen, mittelst der sogenannten Proportionaltheile zu finden.

Trigonometrische Reihen.

§. 178. Wir wollen jetzt für sin x und cos x Ausdrücke nach den aufsteigenden Potenzen des Bogens x, dessen Halbmesser $=1$ ist,

herzuleiten suchen. Vorerst bemerken wir, daß diese Reihen keine Glieder, in welchen x mit einem negativen oder gebrochenen Exponenten versehen wäre, enthalten können. Denn unter der Voraussetzung, daß daselbst das Glied $Px^{\frac{h}{i}} = P\sqrt[i]{x^h}$ vorkäme, fände man i Werthe für jeden besondern Bogen, da es doch bekanntlich nur einen einzigen Werth für den Sinus sowohl als den Cosinus eines Bogens gibt. Bei der Annahme hingegen, daß ein Glied von der Form $Px^{-i} = \frac{P}{x^i}$, in einer jener Reihen vorhanden wäre, würde dieselbe für $x=0$ sich unendlich herausstellen, während doch in solchem Falle der Sinus verschwindet und der Cosinus der Einheit gleich wird. Ueberdem geht hieraus hervor, daß in der Reihe der Sinus x als Faktor bei allen Gliedern erscheinen, und in jener der Cosinus ein konstantes Glied $=1$ vorkommen müsse. Wir setzen also:

$$\sin x = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots \text{ und } \cos x = 1 + a'x + b'x^2 + \ldots$$

Aus der Gleichung $\frac{\sin x}{x} = a + bx + \ldots$ ergibt sich zuvörderst, wenn man darin $x=0$ setzt, $a=1$, insofern man erwägt, daß das Verhältniß $\frac{\sin x}{x}$, bei dem unendlichen Abnehmen von x, sich ohne Ende der Einheit nähert. Berücksichtigen wir ferner die Relationen $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$, und setzen $-x$ statt x in unsern Entwickelungen, wodurch bloß die Zeichen der ungeraden Potenzen geändert werden; so zeigt sich auf der Stelle, daß die Reihe des Sinus keine geraden, und jene des Cosinus keine ungeraden Potenzen von x enthalten könne. Wir schreiben also bestimmter:

$$\cos x = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Gx^6 \ldots + Nx^{2i} \ldots$$

$$\sin x = x + A'x^3 + B'x^5 + \ldots + M'x^{2i-1} + N'x^{2i+1} \ldots,$$

wo es jetzt darauf ankommt, die numerischen Coefficienten $A, A', B, B' \ldots$ zu bestimmen. Zu diesem Behuf vertauschen wir x mit $x + h$ in dem Binom $P \cos x + Q \sin x$, und entwickeln dasselbe nach den Potenzen von h. Diese Rechnung läßt sich auf zwei verschiedene Arten, welche zu einerlei Resultat führen müssen, bewerkstelligen. Man entwickelt nämlich entweder zuvörderst das Binom nach den Potenzen von x, und verwandelt hierauf x in $x+h$, oder man ändert zuerst x in $x+h$ um, und setzt alsdann für sin h und cos h ihre an-

genommenen, die Potenzen von h enthaltenden Reihen. Diese Resultate durch

$$\alpha+\beta h+\gamma h^2 \ldots = \alpha'+\beta' h+\gamma' h^2 \ldots$$

darstellend, bekommen wir daraus $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ ... Für unsern Zweck ist es jedoch ausreichend, hier bloß die Coefficienten der ersten Potenzen von x, d. h. die Gleichung $\beta=\beta'$ in Betracht zu ziehen. Unsere erste Entwickelungsweise gibt:

$$P\cos x+Q\sin x = P(1+Ax^2+Bx^4 \ldots + Nx^{2i} \ldots) \\ +Q(x+A'x^3+B'x^5 \ldots + N'x^{2i+1} \ldots)$$

Indem wir x+h statt x schreiben und den Coefficienten von h herausheben, d. h. die erste Derivation nehmen, entsteht:

$$\beta = P(2Ax+4Bx^3 \ldots 2iNx^{2i-1} \ldots)+Q[1+3A'x^2+5B'x^4 \ldots \\ +(2i+1)Nx^{2i} \ldots].$$

Nach der zweiten Entwickelungsart kommt:

$$P\cos(x+h)+Q\sin(x+h) = P(\cos x\cos h-\sin x\sin h) \\ +Q(\sin x\cos h+\cos x\sin h).$$

Setzen wir für $\cos h$ die Reihe $1+Ah^2 \ldots$, und für $\sin h$ die Reihe $h+A'h^3 \ldots$; so ist klar, wofern bloß die Bestandtheile, in denen h auf der ersten Potenz vorkommt, berücksichtigt werden, daß $\cos h$ kein Glied mit h, und $\sin h$ nur h mit sich bringt, was gibt:

$$\beta' = -P\sin x+Q\cos x.$$

Die identische Gleichung $\beta=\beta'$ besteht nun aus Gliedern, welche die Größen P und Q zu respectiven Faktoren haben. Diese Funktionen sind aber ganz willkührlich, mithin wird unsere Gleichung in zwei andere zerfallen, insofern man die Coefficienten gedachter Funktionen einander gleich setzt. Substituiren wir endlich statt $\cos x$ und $\sin x$ ihre Entwickelungen, so entstehen die identischen Gleichungen:

$$2Ax+4Bx^3+6Cx^5 \ldots 2iNx^{2i-1} \ldots = -x-A'x^3-B'x^5 \ldots -M'x^{2i-1} \ldots,$$
$$1+3A'x^2+5B'x^4 \ldots +(2i+1)N'x^{2i} \ldots = 1+Ax^2+Bx^4 \ldots +Nx^{2i} \ldots$$

Aus denselben finden wir durch Gleichsetzung der gleichnahmigen Coefficienten:

$$2A=-1,\ 4B=-A',\ 6C=-B' \ldots 2iN=-M'$$
$$3A'=A,\ 5B'=B,\ 7C'=C \ldots (2i+1)N'=N;$$

hieraus $A=-\dfrac{1}{2}$, $A'=-\dfrac{1}{2\cdot3}$, $B=\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}$, $B'=\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$ ....

Werden diese Werthe von A, A′, B, B′ ... substituirt, so ergibt sich:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{2\ldots 7} \ldots \pm \frac{x^{2i+1}}{2\cdot 3\cdots(2i+1)} \ldots \text{(G)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{2\ldots 6} \ldots \pm \frac{x^{2i}}{2\cdot 3\cdots 2i} \ldots \text{(H)}.$$

Die Gleichungen der allgemeinen Glieder $N = -\frac{M'}{2i}$ und $N' = \frac{N}{2i+1}$ zeigen, wie jeder einzelne Coefficient sich aus dem vorhergehenden der anderen Reihe herleiten läßt. Es gilt das Zeichen + oder —, je nachdem i von der Form $2\mathfrak{z}$ oder $2\mathfrak{z}+1$ ist.

Anmerkung. Daß der Coefficient in der angeschriebenen Reihe $\sin x = ax + bx + cx^2 \ldots$ gleich der Einheit sei, kann man nach Lagrange strenger folgendermaßen darthun. Läßt man nämlich in dieser Reihe jenen Coefficienten noch unbestimmt, und verfährt im Uebrigen dann auf dieselbe Art, wie hier oben geschehen; so findet man die beiden Reihen

$$\sin x = ax - \frac{a^3x^3}{2\cdot 3} + \frac{a^5x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \text{ ꝛc.... und } \cos x = 1 - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^4x^4}{2\cdot 3.4} \text{ ꝛc.}$$

Bekanntlich ist nun $\sin x < x$ und $\frac{\sin x}{\cos x} > x$, woraus

$$\sin x > \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}, \text{ wenn man erwägt, daß } \cos x = \sqrt{(1 - \sin^2 x)}.$$

Nimmt man jetzt x geringer als $\frac{\pi}{2}$ und hinlänglich klein, damit ax von der Einheit übertroffen werde, was immer möglich ist; so hat man $\sin x < ax$. Folglich

$$ax > \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} \text{ oder } a > \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} \ldots (1) \text{ Ferner ist}$$

$$\sin x > ax - \frac{a^3x^3}{2\cdot 3} \text{ und } < x; \text{ also } ax - \frac{a^3x^3}{2\cdot 3} < x, \text{ woraus}$$

$$a < 1 + \frac{a^3x^2}{2\cdot 3} \ldots (2).$$

Diese beiden Relationen (1) und (2) finden für jeden auch noch so kleinen Werth von x statt. Der ersteren, oder der

Bedingung $\frac{1}{a} < \sqrt{(1+x^2)}$ zufolge, kann a nicht kleiner als 1 sein. Denn hätte man $a<1$ oder $\frac{1}{a}>1$, so könnte, wie wenig auch $\frac{1}{a}$ von der Einheit verschieden sein möge, der Bogen x doch hinlänglich klein gedacht werden, daß $\frac{1}{a}$ größer als $\sqrt{(1+x^2)}$ würde, während dieser Ausdruck die Größe $\frac{1}{a}$ beständig übertreffen muß. Der zweiten Relation zufolge kann a die Einheit nicht übersteigen. Denn so wenig auch a von 1 verschieden sein mag, so läßt sich doch immer x hinlänglich klein annehmen, damit $a>1+\frac{a^3x^2}{2\cdot3}$ werde, was mit der Ungleichheit $a<1+\frac{a^3x^2}{2\cdot3}$ in Widerspruch steht. Da nun der Werth von a weder kleiner noch größer als die Einheit sein kann, so ist er derselben gleich.

§. 179. Mittelst der oben angegebenen Formeln lassen sich also die Werthe des Sinus und Cosinus eines Bogens, dessen Größe in Theilen des Halbmessers ausgedrückt ist, finden. Bezeichnet t die Anzahl der Grade des Bogens x, so hat man $\pi:x=180:t$, wo π die halbe Peripherie eines Kreises darstellt, dessen Halbmesser die Einheit ist. Setzt man für x seinen Werth $\frac{\pi t}{180^0}=\frac{t}{u}$ (hinsichtlich des Werthes von r, siehe analytische Geometrie §. 30), so werden unsere Formeln in folgende übergehen:

$$\sin x=At-Bt^3+Ct^5\ldots,\ \cos x=1-A't^2+B'^4t\ldots,$$

wo t die Anzahl der Grade des Bogens x bedeutet. Die Berechnung der Coefficienten liefert nachstehende Werthe:

log A =0,241877736759—2	log C =0,13020559—11	log E =0,61713—22
log B =0,947480852 —7	log D =0,990711 —17	log F =0,05950—27
log A′=0,1827247395 —4	log C′=0,593932 —14	log E′=0,85901—25
log B′=0,58729823 —9	log D′=0,329498 —19	log F′=0,02219—30

§. 180. Es ist jedoch von geringerer Wichtigkeit die Sinus und Cosinus selbst, als deren Logarithmen zu berechnen. Bezeichnen wir deßhalb mit δ die constante Differenz der Bogen in unserer aufzustellenden Tafel und mit $t = n\delta \ldots$ einen beliebigen Bogen; so kommt

$$\sin x = n\delta(1 - \tfrac{1}{6} n^2\delta^2 \ldots), \cos x = 1 - \tfrac{1}{2} n^2\delta^2 + \ldots$$

Indem wir $y = \frac{n^2\delta^2}{2 \cdot 3} - \frac{n^4\delta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, $z = \frac{n^2\delta^2}{1 \cdot 2} - \frac{n^4\delta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots$ machen, erhalten wir $\sin x = n\delta(1-y)$, $\cos x = 1-z$. Zu den Logarithmen für irgend ein System, dessen Modul M ist, übergehend, finden wir

$$\text{Log} \sin x = \text{Log}\, n\delta - M(y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 \ldots),$$
$$\text{Log} \cos x = -M(z + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 \ldots);$$

hieraus endlich, wenn für y und z ihre Werthe substituirt werden

$$\text{Log} \sin x = \text{Log}(n\delta) - \frac{M\delta^2}{2 \cdot 3} n^2 - \frac{M\delta^4}{4 \cdot 5 \cdot 9} n^4 - \frac{M\delta^6}{9^2 \cdot 5 \cdot 7} n^6 \ldots,$$

$$\text{Log} \cos x = -\frac{M\delta^2}{2} n^2 - \frac{M\delta^4}{3 \cdot 4} n^4 - \frac{M\delta^6}{9 \cdot 5} n^6 \ldots$$

Wählen wir die Basis 10, und nehmen die Bogen in der Tafel von 10″ zu 10″ zu, wie solches in den Callet'schen Tafeln der Fall ist; so beträgt δ die Länge eines Bogens von 10″ oder den 64800ten Theil der halben Kreisperipherie π. Mit Berücksichtigung der Werthe von π und M findet man nach durchgeführter Rechnung

$$\log \sin x = \log\delta + \log n - An^2 - Bn^4 \ldots, \log \cos x = A'n^2 - B'n^4 \ldots,$$

wobei $\log \delta = 0{,}68557486682354 1 - 5$

$\log A = 0{,}2307827994564 - 10$, $\log B = 0{,}1248112735 - 20$
$\log A' = 0{,}707904049284 - 10$, $\log B' = 0{,}3009025326 - 19$
$\log C = 0{,}29868045 - 30$, $\log D = 0{,}644892 - 40$
$\log C' = 0{,}09802100 - 28$, $\log D' = 0{,}951432 - 38$

Für den Bogen von $4^0\tfrac{1}{2}$ oder 16200″ hat man $n = 1620$,

$\log\delta = 5{,}68557487$	$\log A = 0{,}2307828 - 10$	$\log B = 0{,}1248113 - 20$
$\log n = 3{,}20951501$	$\log n^2 = 6{,}4190300$	$\log n^4 = 12{,}8380600$
$-0{,}00044649$	$0{,}6498128 - 4$	$0{,}9628713 - 8$
$-0{,}00000009$	die dazugehörigen Zahlen kommen in Abzug	

$0{,}8946330 - 2 = \log \sin 4^0 30'$

log $A' = 0,7079041-10$	log $B' = 0,3009025-19$	$-0,00133947$
log $n^2 = 6,4190300$	log $n^4 = 12,8380600$	$-0,00000138$
$0,1269341-3$	$0,1389625-6$	$-0,00134085$

log cos $4^0 30' = 0,99865915-1$

Im Fall $\log R = 10$ ist, wird durchgehends der Charakteristik 10 hinzugefügt. Die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten lassen sich hierauf mittelst einfacher Subtraction finden.

Da n fortwährend im Zunehmen begriffen ist, so können die vorliegenden Reihen nicht füglich für die über 12^0 hinausgehenden Bogen gebraucht werden, weil sie dann zu wenig convergirend sind. Man bedient sich dieser Reihen selbst nur bis zu den Bogen von 5^0, indem man für die größeren Bogen folgendes Verfahren in Anwendung bringt. Es ist nämlich:

$$\frac{\sin(x+\delta)}{\sin x} = \frac{\sin x \cos \delta + \sin \delta \cos x}{\sin x}$$

$$= \cos\delta + \sin\delta \cot x = \cos\delta(1 + \operatorname{tang}\delta \cot x).$$

Hieraus entspringt, wenn man zu den Logarithmen übergeht, und die Differenz zwischen den Logarithmen der Sinus der Bogen $x+\delta$ und x durch $\triangle$ darstellt:

$$\triangle = \log\cos\delta + M(\operatorname{tang}\delta \cot x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\delta \cot^2 x + \ldots)$$

Ganz auf analoge Weise findet man für die Differenz $\triangle'$ der consecutiven Logarithmen von $\cos(x+\delta)$ und $\cos x$:

$$\triangle' = \log\cos\delta - M(\operatorname{tang}\delta \operatorname{tang} x + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\delta \cdot \operatorname{tang}^2 x \ldots)$$

Nimmt man $\delta = 10''$, so übt schon das zweite Glied dieser Reihen auf die 9 ersten Decimalstellen keinen Einfluß mehr aus, und man kann setzen:

$$\triangle = M\operatorname{tang}\delta\cot x,\ \triangle' = -M\operatorname{tang}\delta\cdot\operatorname{tang} x, \text{ wobei}$$

$$\log(M\operatorname{tang}\delta) = 0,3233591788-5.$$

Für den Fall, daß $\delta = 1'$ ist, hat man $\log(M\operatorname{tang}\delta) = 0,10151043-4$. Geht man also von dem Bogen $x = 5^0$ aus, dessen Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente bekannt sind; so können nach und nach sämmtliche Sinus und Cosinus vermittelst ihrer successiven Differenzen $\triangle$, $\triangle'$, wobei man von $10''$ zu $10''$ oder von $1'$ zu $1'$ aufsteigt, gefunden werden. Die Ableitung der Tangenten und Cotangenten hat keine weitere Schwierigkeit.

Es diene als Beispiel $x=10^0\ 10'\ 30''$:

Man hat $\log\cot x=0{,}7459888$	$\log\tang x=1{,}2540112$
Constante $=0{,}3233592-5$	$0{,}3233592-5$
$0{,}0693480-4$	$0{,}5773704-6$
$\Delta=0{,}00012731$	$\Delta'=-0{,}00003779$.

Man sieht hier, wie im Paragraphen 178, daß die Größen Δ und Δ' in einer gewissen Ausdehnung der Tafel unveränderlich sind. Um übrigens die Anhäufung der Fehler zu vermeiden, berechnet man von vornherein von Intervall zu Intervall gewisse Glieder, welche als neue Anfangspunkte gelten können. Die Gleichung $\sin 2x=2\sin x\cos x$, aus der sich ergibt:

$$\log\sin 2x=\log 2+\log\sin x+\log\cos x,$$

läßt sich zu diesem Zweck benutzen. Wegen $\sin 45^0=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\tang 45^0=\cot 45^0=1$ kann man von diesem Bogen ausgehen und $\sin(45^0\pm 10'')$ berechnen. Bei den letzteren Complementbogen ist der Sinus des einen mit dem Cosinus des andern gleichgeltend, worauf ohne Weiteres ihre Tangenten und Cotangenten abgeleitet werden.

Von da geht man zu $45^0\pm 20''$, $45^0\pm 30''$, u. s. w.

§. 181. Aus der Zusammenstellung der Gleichung (B) mit den Reihen (G) und (H) ersieht man, daß die Summe der letzteren e^x beträgt, wofern auf die Verschiedenheit der Zeichen ihrer geradstelligen Glieder keine Rücksicht genommen wird. Vertauscht man hingegen x mit $\pm x\sqrt{(-1)}$ in der Entwickelung (B) von e^x, so stimmen die Zeichen der Glieder mit denen der Reihen (G) und (H) vollkommen überein. Da $\sqrt{(-1)}$ für seine Potenzen die Ausdrücke $\sqrt{(-1)}$, -1, $-\sqrt{(-1)}$, $+1$ gibt, welche sich bis ins Unendliche fort in periodischer Ordnung wiederholen.

Hiernach steht $e^{\pm x\sqrt{-1}}=\cos x\pm\sqrt{(-1)}\sin x \ldots$ (I). Aus diesen Gleichungen folgt durch Addition und Subtraction

$$\cos x=\frac{e^{x\sqrt{(-1)}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2},\ \sin x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{(-1)}}\ \ldots\text{(K)};$$

woraus ferner

$$\tang x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{[e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}]\sqrt{-1}}=\frac{e^{2x\sqrt{-1}}-1}{[e^{2x\sqrt{-1}}+1]\sqrt{-1}},$$

wenn oben und unten mit $e^{x\sqrt{-1}}$ multipliciert wird.

Diese Ausdrücke müssen bloß als analytische Resultate betrachtet werden, in welchen das Imaginäre nur scheinbar ist, indem solches durch die Rechnung selbst wieder fortgeht.

Vertauscht man endlich nx mit x in (I), so kommt

$$e^{\pm nx\sqrt{-1}} = \cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx \;\ldots\; (L).$$

Allein man hat $e^{\pm nx\sqrt{-1}} = [e^{\pm x\sqrt{-1}}]^n$; folglich erhält man, welchen Werth n auch haben mag,

$$\cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx = (\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^n \;\ldots\; (M).$$

§. 182. Die vorstehenden Formeln finden eine häufige Anwendung. Hier wollen wir uns begnügen, dieselben bei der Auflösung der Dreiecke zu gebrauchen. Wir setzen

$$x = e^{C\sqrt{(-1)}},\quad z' = e^{-C\sqrt{(-1)}}, \text{ woraus}$$

$$\cos C = \tfrac{1}{2}(z+z'),\ \sin C \cdot \sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}(z-z').$$

Es seien nun A, B, C die drei Winkel eines Dreiecks, und a, b, c die denselben bezüglich gegenüberstehenden Seiten.

Wir haben dann $a \sin B = b \sin A = b \sin (B+C)$;

woraus
$$\frac{\sin B}{\cos B} = \operatorname{tang} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C};$$

ferner
$$\frac{e^{2B\sqrt{(-1)}} - 1}{e^{2B\sqrt{-1}} + 1} = \frac{b(z-z')}{2a - b(z+z')};$$

hieraus
$$e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a - bz'}{a - bz}; \text{ endlich}$$

$$2B\sqrt{-1} = l(a - bz') - l(a - bz)$$

$$= \frac{b}{a}(z-z') + \frac{b^2}{2a^2}(z^2 - z'^2) + \frac{b^3}{3a^3}(z^3 - z'^3) \ldots\ldots,$$

wenn man die Gleichung (D) zu Hülfe nimmt. Die Gleichung (L) gibt aber

$$z^m = \cos mC + \sqrt{-1}\cdot\sin mC,\quad z'^m = \cos mC - \sqrt{-1}\cdot\sin mC; \text{ hieraus}$$

$$z^m - z'^m = 2\sqrt{-1}\cdot\sin mC.$$

Durch Substitution und Hinweglassung des gemeinschaftlichen Faktors $2\sqrt{(-1)}$ entsteht

$$B = \frac{b}{a}\sin C + \frac{b^2}{2a^2}\sin 2C + \frac{b^3}{3a^3}\sin 3C + \ldots\ldots$$

Die Gleichung $c^2=a^2-2ab\cos C+b^2=a^2-ab(z+z')+b^2$ reducirt sich, wegen $zz'=1$, auf $c^2=(a-bz)(a-bz')$. Nimmt man die Logarithmen, so findet man

$$2\log c=2\log a-M\left[\frac{b}{a}(z+z')+\frac{b^2}{2a^2}(z^2+z'^2)\ldots\right];$$

woraus, wenn man erwägt, daß $z^m+z'^m=2\cos mC$ ist,

$$\log c=\log a-M\left[\frac{b}{a}\cos C+\frac{b^2}{2a^2}\cos 2C+\frac{b^3}{3a^3}\cos 3C\ldots\right].$$

Diese beiden Reihen dienen zur Auflösung eines Dreiecks, von dem man zwei Seiten a und b und den eingeschlossenen Winkel C kennt, wobei die Seite b sehr klein in Bezug auf a ist.

§. 183. Die Gleichung (I) liefert, wenn man auf Nepersche Logarithmen übergeht: $\pm x\sqrt{-1}=l(\cos x\pm\sqrt{-1}\sin x)$. Wird die untere dieser beiden Gleichungen von der oberen abgezogen, so erhält man, weil $\sin x=\cos x\tang x$:

$$2x\sqrt{-1}=l\,\frac{\cos x+\sqrt{-1}\sin x}{\cos x-\sqrt{(-1)}\sin x}=l\left[\frac{1+\sqrt{-1}\cdot\tang x}{1-\sqrt{-1}\cdot\tang x}\right].$$

Die Formel (E) §. 177 gibt aber die Entwickelung dieses Logarithmen; es entspringt hiernach, wenn man sogleich den gemeinschaftlichen Faktor $\cdot 2\sqrt{-1}$ herausnimmt, folgender Ausdruck für den Bogen x vermittelst seiner Tangente:

$$x=\tang x-\tfrac{1}{3}\tang^3 x+\tfrac{1}{5}\tang^5 x-\tfrac{1}{7}\tang^7 x\ldots\quad(N)$$

Setzt man hierin $x=\frac{\pi}{4}$, so findet man $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ etc.

Durch diese von Leibniz zuerst angegebene Reihe wird π auf eine sehr einfache Weise dargestellt.

Um eine mehr convergente Reihe zu erhalten, kann man nach Euler, wie folgt, verfahren: Es seien x und x' zwei Bogen, deren Tangenten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind. Für die Tangente ihrer Summe hat man $\tang(x+x')=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$; woraus folgt, daß $x+x'=45^0$ ist. Setzt man hierauf in (N) $\tang x=\frac{1}{2}$ ferner $\tang x'=\frac{1}{3}$, und addirt beide Resultate; so entsteht, wegen $x+x'=\frac{\pi}{4}$ die Eulersche Reihe

$$\frac{\pi}{4}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2})^5\ldots+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3})^3+\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^5\ldots$$

Eine noch stärker convergirende Reihe hat der englische Geometer Machin auf folgende Art gefunden. Es sei x der Bogen, welcher $\frac{1}{5}$ zur Tangente hat. Hieraus

$$\operatorname{tang} 2x = \frac{2 \operatorname{tang} x}{1-\operatorname{tang}^2 x} = \tfrac{5}{12}; \quad \operatorname{tang} 4x = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2} = \tfrac{120}{119}.$$

Da diese letzte Zahl mehr als 1 beträgt, so ist offenbar $4x > 45^0$, oder $v = 4x - 45^0$, wobei v den Ueberschuß von 4x über 45^0 bedeutet. Man hat ferner $\operatorname{tang} v = \dfrac{\operatorname{tang} 4x - 1}{1 + \operatorname{tang} 4x} = \frac{1}{239}$. Macht man daher $\operatorname{tang} x = \frac{1}{5}$, und multiplicirt die entsprechende Reihe mit 4; so bekommt man den Bogen 4x. Ebenso findet man eine Reihe für den Bogen v mittelst $\operatorname{tang} v = \frac{1}{239}$.

Es ist demnach wegen $4x + v = \dfrac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}\cdot(\tfrac{1}{5})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5})^5 \ldots\ldots\right] - \tfrac{1}{239} + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{239})^3 - \ldots\ldots;$$

woraus man bald ableiten wird

$\pi = 3{,}141592653589793$, $\log \pi = 0{,}497149872694$, $l\pi = 1{,}1447298858494$.

§. 184. Setzen wir in der Gleichung (I) $x = k\pi$, wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet; so haben wir, wegen $\sin x = 0$, $\cos x = \pm 1$:

$$e^{\pm k\pi\sqrt{-1}} = \pm 1, \quad l(\pm 1) = \pm k\pi\sqrt{-1},$$

je nachdem k gerade oder ungerade ist. Multipliciren wir das Ganze mit dem Modul M, und addiren beiderseits den numerischen Werth A von Log a hinzu, so entsteht,

$$\operatorname{Log}(\pm a) = A \pm kM\pi\sqrt{-1},$$

wo k eine beliebige gerade Zahl für Log (+a), hingegen eine ungerade für Log (—a) bedeutet. Hieraus folgt, daß jeder positiven Zahl in demselben Systeme unendlich viele Logarithmen zukommen, von denen doch nur ein einziger reell ist, und daß die unzähligen Logarithmen, die jeder negativen Zahl entsprechen, sämmtlich imaginär sind.

Anmerkung. Aus der Gleichung $a^2 = (-a)^2$, aus welcher 2 Log a = 2 Log (—a) abgeleitet wird, muß man keineswegs schließen, wie D'Alembert gethan, daß +a und —a einerlei

Logarithmen besitzen. Denn stellen k und l gerade Zahlen vor, so hat man:

$$\text{Log } a = A \pm kM\pi\sqrt{-1} \text{ und } = A \pm lM\pi\sqrt{-1}$$

woraus durch Addition entsteht:

$$2 \text{ Log } a = 2A \pm (k+l)M\pi\sqrt{-1}.$$

Auf ähnliche Art findet man, wenn k′ und l′ ungerade Zahlen bezeichnen:

$$2 \text{ Log } (-a) = 2A \pm (k'+l')M\pi\sqrt{-1}.$$

Obschon dieser letzte Ausdruck, da $(k'+l')$ eine gerade Zahl darstellt, in dem ersten enthalten ist; so läßt sich jedoch nicht daraus schließen, daß die Ausdrücke 2 Log (a) und 2 Log (—a) im Allgemeinen einander gleich seien. Damit Log a reell werde, muß $k=l=0$ sein, was bei den ungeraden Zahlen k′ und l′ nicht eintrifft: in reellen Zahlen kann man also nicht Log a = Log (—a) haben. Aus dem Vorhergehenden durfte D'Alembert eigentlich nur die Folgerung ziehen, daß unter den imaginären Logarithmen von +a und —a es solche gibt, welche zu zwei zu einander gefügt, gleiche Summen liefern.

§. 185. Wir wollen jetzt die Potenzen von sin z und cos z durch die Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen z, 2z, 3z ... auszudrücken suchen. Wir setzen deshalb

$$\cos z + \sqrt{(-1)} \cdot \sin z = y, \quad \cos z - \sqrt{(-1)} \cdot \sin z = v;$$

hieraus $\qquad yv = 1, \quad 2 \cos z = y + v;$

ferner $\qquad 2^n \cos^n z = y^n + ny^{n-2} + A'y^{n-4} + A''y^{n-6} \ldots,$

wo n, A′, A″ ... die Coefficienten in der Entwickelung der nten Potenz darstellen. Nach der Formel (M) ist aber $y^k = \cos kz + \sqrt{(-1)} \cdot \sin kz$; folglich

$$2^n \cos^n z = \cos nz + n\cos(n-2)z + A'\cos(n-4)z \ldots$$
$$\pm\sqrt{(-1)}[\sin z + n \sin(n-2)z + A' \sin(n-4)z \ldots] \ldots (P).$$

Das doppelte Zeichen ± rührt von der Wurzelgröße $\sqrt{(-1)}$ her, welche jederzeit beide Zeichen mit sich führt. Insofern n eine ganze Zahl ist, hat $\cos^n z$ nur einen einzigen Werth; unsere beiden Ausdrücke müssen daher einander gleich sein, und in der That reducirt sich dann die Reihe bloß auf ihren reellen Theil, wie sogleich gezeigt

werden soll. Ist aber n eine gebrochene Zahl, so verhält sich die Sache anders, weil der gebrochene Exponent eine Wurzel andeutet, der mehrere Werthe zukommen. Wir wollen hier nur den Fall, der allein von Interesse ist, näher betrachten, nämlich denjenigen, in welchem n eine ganze Zahl bezeichnet.

1) Es sei n ungerade. Die Anzahl der Glieder, sowohl des reellen als des imaginären Theiles, ist alsdann gerade. Dabei haben die von den beiden äußersten gleichweit abstehenden Glieder des imaginären Theils gleiche Coefficienten, aber verschiedene Zeichen, weil $\sin(-hz) = -\sin hz$, was auch h sein mag; mithin wird die eine Hälfte dieses mit $\sqrt{(-1)}$ multiplicirten Aggregats durch die andere aufgehoben. Dagegen sind die Glieder des reellen Theiles, welche von den äußersten gleichweit entfernt sind, einander gleich, weil $\cos(-hz) = \cos hz$. Man kann sich demnach auf die erste Hälfte der Glieder beschränken, wofern man diese verdoppelt. Auf solche Weise erhält man, nachdem beiderseits durch 2 dividirt worden:

$$2^{n-1}\cos^n z = \cos nz + n\cos(n-2)z + A'\cos(n-4)z \ldots (Q)$$

indem man die Reihe bloß auf positive Bogen ausdehnt.

2) Es sei n gerade. Der reelle sowohl als imaginäre Theil der Entwickelung von $2^n \cos^n z$ hat dann eine ungerade Anzahl von Gliedern. Bei dem imaginären Theil ist das mittlere Glied

$$= \frac{n(n-1)\ldots\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\frac{n}{2}} \sin(n-n)z,$$

mithin verschwindet dasselbe, während je zwei von den beiden äußern gleichweit abstehende Glieder sich ebenfalls zusammen aufheben.

Das mittlere Glied des reellen Theils aber reducirt sich auf den eben angeführten Coefficienten, weil $\cos(n-n)z = 1$ ist. Man muß also in dem vorliegenden Falle den Coefficienten des Bogens, welcher als Null erscheint, halbiren, wenn man sich der Formel (Q) bedienen will.

Vertauschen wir in dieser Formel z mit $\frac{1}{2}\pi - z$, so geht der erste Theil derselben in $2^{n-1}\sin^n z$ über. Was den zweiten Theil anlangt, so verwandelt sich ein Bogen $(n-2x)z = hz$ in

$$\tfrac{1}{2}\pi h - hz = \tfrac{1}{2}\pi n - \pi x - hz,$$

zu welchem Bogen man πx addiren kann, ohne seinen Cosinus zu ändern, der ist:

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi n - hz) = \cos\tfrac{1}{2}\pi n \cos hz + \sin\tfrac{1}{2}\pi n \sin hz.$$

1) n sei gerade. Man hat alsdann $\cos\frac{1}{2}\pi n = \pm 1$, je nachdem n von der Form $4m$ oder $4m+2$ ist, ferner $\sin\frac{1}{2}\pi n = 0$. Der Cosinus reducirt sich hiernach auf $\pm\cos hz = \pm\cos(n-2x)z$. Folglich

$$\pm 2^{n-1}\sin^n z = \cos nz - n\cos(n-2)z + A'\cos(n-4)z \ldots \quad (R)$$

wofern man mit demjenigen Gliede schließt, worin der Bogen Null ist, und nur die Hälfte des Coefficienten nimmt. Dabei gilt das Zeichen $+$, wenn $n=4m$, hingegen das Zeichen $-$, wenn $n=4m+2$ ist.

2) n sei ungerade. Man hat dann $\sin\frac{1}{2}\pi n = \pm 1$, je nachdem $n=4m+1$ oder $=4n+3$ ist, und $\cos\frac{1}{2}\pi n = 0$. Hiernach findet man

$$\pm 2^{n-1}\sin^n z = \sin nz - n\sin(n-2)z + A'\sin(n-4)z \ldots (S),$$

wobei man die Reihe mit $\sin z$ schließt, aber nicht mehr die Hälfte davon nimmt. Für $n=4m+1$ gilt das Zeichen $+$, für $n=4m+3$ hingegen das Zeichen $-$.

Beobachtet man das Gesagte, so ist es leicht, folgende Gleichungen zu erhalten:

$$2\cos^2 z = \cos 2z + 1,$$
$$4\cos^3 z = \cos 3z + 3\cos z,$$
$$8\cos^4 z = \cos 4z + 4\cos 2z + 3,$$
$$16\cos^5 z = \cos 5z + 5\cos 3z + 10\cos z,$$
$$32\cos^6 z = \cos 6z + 6\cos 4z + 15\cos 2z + 10; \text{ u. s. w.}$$

$$-2\sin^2 z = \cos 2z - 1$$
$$-4\sin^3 z = \sin 3z - 3\sin z,$$
$$8\sin^4 z = \cos 4z - 4\cos 2z + 3,$$
$$16\sin^5 z = \sin 5z - 5\sin 3z + 10\sin z,$$
$$-32\sin^6 z = \cos 6z - 6\cos 4z + 15\cos 2z - 10; \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Die allgemeine Formel für $\sin^n x$ läßt sich übrigens, ohne den Bogen z mit seiner Ergänzung zum Quadranten zu vertauschen, auf ähnliche Weise wie die für $\cos^n x$ herleiten. Man findet nämlich für ein Gerades n:

$$2^n\sin z = \pm[\cos nz - n\cos(n-2)z + A'\cos(n-4)z \ldots]$$
$$\mp\sqrt{-1}\,[\sin nz - n\sin(n-2)z + A'\sin(n-4)z \ldots] \ldots (T);$$

dabei gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $n=4m$ oder $=2m$ ist.

Für ein ungerades n hat man:

$$2^n \sin^n z = \pm [\sin nz - n \sin (n-2) z + A' \sin (n-4) z \ldots]$$
$$\pm \sqrt{-1} [\cos nz - n \cos (n-2) z + A' \cos (n-4) z \ldots] \ldots (U),$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, je nachdem $n = 4m+1$ oder $= 2m+1$ ist. Die Formeln P, T und U bestehen, wie schon gesagt, sowohl für ganze als gebrochene Werthe von n. Im letzteren Falle, wo n den Nenner m besitzt, stellt jede dieser Formeln die m verschiedenen Werthe dar, welche der Potenz $2^n \cos^n z$ oder $2^n \sin^n z$ zukommen; um jene Werthe zu erhalten, braucht man nur alle Bogen zu setzen, welche denselben Cosinus wie z zulassen, und in der Formel $z \pm 2k\pi$ begriffen sind. Die successive Substitution von $k = 0, 1, 2 \ldots \frac{m}{2}$, wenn m gerad, und von $k = 0, 1, 2 \ldots \frac{m-1}{2}$, wenn m ungerad ist, wird diese m verschiedenen Resultate herbeiführen. Es ist hier ausreichend, n positiv anzunehmen; denn ist $n = -u$, so hat man $(2 \cos z)^n = \frac{1}{(2 \cos z)^u}$, wo es wiederum auf einen positiven Exponenten kommt.

Ueber die Formel P ist in neuerer Zeit viel geschrieben worden, weil Euler und Lagrange bloß

$$2^n \cos^n z = \cos nz + n \cos (n-2) z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4) z \ldots (V),$$

und kein imaginäres Aggregat dabei gefunden hatten. Poisson hat zuerst auf die Unzulässigkeit dieser Formel (V) aufmerksam gemacht, insofern n keine ganze Zahl ist, indem er zeigte, daß, wenn $n = \frac{1}{3}$ und $z = \pi$ angenommen wird, für $\sqrt[3]{2 \cos \pi} = \sqrt[3]{-2}$ die Formel (V) das unrichtige Resultat

$$\cos \frac{\pi}{3} + \tfrac{1}{3} \cos (\tfrac{1}{3} - 2) \pi + \tfrac{1}{3} \frac{(\frac{1}{3} - 1)}{1 \cdot 2} \cos (\tfrac{1}{3} - 4) \pi + \text{etc.}$$
$$= \cos \frac{\pi}{3} \left[1 + \tfrac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{1 \cdot 2} + \ldots \right]$$
$$= \cos \frac{\pi}{3} \cdot (1+1)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2} \sqrt[3]{2} \text{ darbietet.}$$

Die Leser, welche dieser Gegenstand interessirt, können nachschlagen:

Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Kapitel XIV.

Lagrange's Vorlesungen über die Funktionen-Rechnung. XI. Vorlesung; deutsch bearbeitet, von Crelle. Berlin, bei Reimer.

Crelle's Theorie der analytischen Facultäten. III. Abschnitt. Berlin, bei Reimer.

Ohm's Aufsätze aus dem Gebiete der höheren Mathematik. Berlin, bei Reimer.

Olivier, über die Entwickelung eines Cosinus durch die Cosinus der vielfachen Bogen in Crelles Journal. I. Band.

Poisson dans la correspondance sur l'école polytechnique, Tome second.

Recherches sur l'analyse des sections angulaires, par Poinsot. Paris, 1825.

Zeitschrift für Physik und Mathematik, herausgegeben von Baumgartner und v. Ettinghausen. I. Bandes erstes und drittes Heft.

§. 186. Unsere Aufgabe sei jetzt die umgekehrte, nämlich die Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen durch die Potenzen des Sinus und Cosinus des einfachen Bogens auszudrücken.

Man hat $\cos nz + \sqrt{-1} \cdot \sin nz = (c + \sqrt{-1} \cdot s)^n$, wo, der Kürze halber, $\cos z = c$ und $\sin z = s$ gesetzt ist. Der zweite Theil nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, liefert einen Ausdruck von der Form $P + Q\sqrt{-1}$, mithin

$$\cos nz + \sqrt{-1} \cdot \sin nz = P + Q\sqrt{-1}.$$

Da nur imaginäre Größen sich gegenseitig einander aufheben können, so zerfällt die vorige Gleichung in zwei andere, nämlich:

$$\cos nz = P, \quad \sin nz = Q,$$

wovon die erste alle Glieder enthält, in denen $s\sqrt{-1}$ mit geraden Exponenten behaftet ist. Hiernach finden wir, n mag ganzzahlig oder gebrochen, positiv oder negativ sein:

$$\cos nz = c^n - n \cdot \frac{n-1}{2} c^{n-2} s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2,3 \cdot 4} c^{n-4} s^4 \ldots\ldots,$$

$$\sin nz = nc^{n-1} s - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} c^{n-3} s^3 + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c^{n-5} s^5 \ldots;$$

woraus sich leicht folgende Gleichungen herleiten lassen:

$\cos 2z = c^2 - s^2$, $\sin 2z = 2cs$,

$\cos 3z = c^3 - 3cs^2$, $\sin 3z = 3c^2s - s^3$,

$\cos 4z = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$, $\sin 4z = 4c^3s - 4cs^3$,

$\cos 5z = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$, $\sin 5z = 5c^4s - 10c^2s^3 + s^5$,

$\cos 6z = c^6 - 15c^4s^2 + 15c^2s^4 - s^6$; $\sin 6z = 6c^5s - 20c^3s^3 + 6c^5$;

u. s. w. u. s. w.

Anmerkung. Erwägt man, daß $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so lassen sich die beiden letzteren allgemeinen Formeln auch folgendermaßen darstellen:

$$\cos nz = \cos^n z \left[1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \operatorname{tg}^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \operatorname{tg}^4 z \ldots\right]$$

$$\sin nz = \cos^n z \left[n \operatorname{tg} z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \operatorname{tg}^3 z + \frac{n(n-1) \ldots (n-4)}{1 \cdot 2 \cdots 5} \operatorname{tg}^5 z \ldots\right].$$

§. 187. Aus diesen Formeln, in denen die Sinus mit dem Cosinus vermischt vorkommen, lassen sich andere herleiten, welche bloß Potenzen von $\cos z$ oder die von $\sin z$ enthalten. Da die Bogen z, $2z$, $3z \ldots$ in einer arithmetischen Progression fortschreiten, so bilden die Sinus und Cosinus derselben (analytische Geometrie §. 43) eine recurrirende Reihe, welche $2 \cos z$ und -1 zu Faktoren hat. Ebenso sind $2 \cos 2z$ und -1 die Faktoren in den, der Aufeinanderfolge von z, $3z$, $5z \ldots$ oder von $0z$, $2z$, $4z \ldots$ entsprechenden, Reihen. Nun ist $2 \cos 2z = 2(c^2 - s^2) = 2 - 4s^2$. Wird demnach von $\cos 0z = 1$, $\sin 0z = 0$, $\cos z = c$, $\sin z = s$ ausgegangen; so ist es leicht, folgende recurrirende Reihen zu bilden, deren beide ersten Glieder und Bildungsgesetz bekannt sind (§. 171):

$\sin 2z = s(2c)$, $\cos 2z = 2c^2 - 1$,

$\sin 3z = s(4c^2 - 1)$, $\cos 3z = 4c^3 - 3c$,

$\sin 4z = s(8c^3 - 4c)$, $\cos 4z = 8c^4 - 8c^2 + 1$,

$\sin 5z = s(16c^4 - 12c^2 + 1)$, $\cos 5z = 16c^5 - 20c^3 + 5c$,

$\sin 6z = s(32c^5 - 32c^3 + 6c)$; $\cos 6z = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$;

und allgemein

$$\sin nz = s\left[(2c)^{n-1} - (n-2)(2c)^{n-3} + \tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)(2c)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3}(2c)^{n-7} \ldots \right]$$

$$2\cos nz = (2c)^n - n(2c)^{n-2} + \tfrac{1}{2}n(n-3)(2c)^{n-4} - \tfrac{1}{6}n(n-4)(n-5)(2c)^{n-6} \ldots$$

Anmerkung. Das allgemeine Glied T, das ite Glied dieser Gleichungen, und der Faktor F, welcher, mit jenem iten Gliede multiplicirt, das unmittelbar darauf folgende hervorbringt, haben in folgenden Formeln ihre Darstellung:

Für $\sin nz \ldots T = (-1)^{i-1}(2c)^{n-2i+1}s \times [(n-i)C(i-1)]$

$$F = -\frac{1}{4c^2} \times \frac{(n-2i+1)(n-2i)}{i(n-i)}.$$

Die Anzahl der Glieder beläuft sich auf $\frac{1}{2}n$ oder auf $\frac{1}{2}(n+1)$, je nachdem n gerade oder ungerade ist; das letzte Glied ist $\pm ncs$ im ersten Falle, und $\pm s$ im zweiten.

Für $\cos nz \ldots T = (-1)^{i-1}(2c)^{n-2i+2} \times \frac{n}{n-2i+2}[(n-i)C(i-1)]$:

$$F = -\frac{1}{4c^2} \times \frac{(n-2i+2)(n-2i+1)}{i(n-i)}.$$

Die Reihe hat $\frac{1}{2}n+1$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$ Glieder, je nachdem n gerade oder ungerade ist; das letzte Glied ist ± 2 im ersten, und $\pm 2nc$ in dem zweiten Fall.

Wir kommen jetzt zu den nach den Potenzen von s entwickelten Reihen. Es ist nämlich:

$\sin 2z = c(2s)$, $\sin 3z = 3s - 4s^3$,

$\sin 4z = c(4s - 8s^3)$, $\sin 5z = 5s - 20s + 16s^5$,

$\sin 6z = c(6s - 32s^3 + 32s^5)$, $\sin 7z = 7s - 56s^3 + 112s^5 - 64s^7$.

Also allgemein, wenn n gerade ist:

$$\sin nz = c\left[ns - n \cdot \frac{n^2-2^2}{2 \cdot 3}s^3 + n\frac{n^2-2^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{n^2-4^2}{4 \cdot 5}s^5 \ldots (2s)^{n-1} \right]$$

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2}{2}s^2 + \frac{n^2}{2} \cdot \frac{n^2-2^2}{3 \cdot 4}s^4 - \frac{n^2}{2} \cdot \frac{n^2-2^2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{n^2-4^2}{5 \cdot 6}s^6 \ldots \tfrac{1}{2}(2s)^n;$$

Und allgemein, wenn n ungerade ist:

$$\sin nz = ns - n \cdot \frac{n^2-1^2}{2\cdot3} s^3 + n \frac{n^2-1^2}{2\cdot3} \cdot \frac{n^2-3^2}{4.5} s^5 \ldots \tfrac{1}{2}(2s)^n;$$

$$\cos nz = c\left[1 - \frac{n^2-1^2}{1\cdot2} s^2 + \frac{n^2-1}{1\cdot2} \cdot \frac{n^2-3^2}{3\cdot4} s^4 \ldots (2s)^{n-1}\right].$$

Anmerkung. Die Bildungsgesetze des iten Gliedes T, und des Faktors F, aus dessen Multiplikation mit dem iten Gliede das nächstkommende hervorgeht, sind in folgenden Formeln ausgesprochen:

Wenn $n=2m$. Für $\sin nz$ ....

$$T = (-1)^{i-1} c(2s)^{2i-1} [(\tfrac{1}{2}n+i-1)C(2i-1)],$$

$$F = -s^2 \times \frac{n^2-4i^2}{2i(2i+1)}.$$

Die Zahl der Glieder beträgt $\frac{1}{2}n$, und das letzte $= \pm c(2s)^{n-1}$.

Für $\cos nz$ ....

$$T = (-1)^{i-1}(2s)^{2i-2} \times \frac{n}{n-2i+2} [(\tfrac{1}{2}n+i-2)C2(i-1)],$$

$$F = -s^2 \times \frac{n^2+4(i-1)^2}{2i(2i-1)}.$$

Die Zahl der Glieder ist $\frac{1}{2}n+1$, und das letzte $= \pm 2^{n-1}s^n$.

Wenn $n=2m+1$. Für $\sin nz$ ...

$$T = (-1)^{i-1}(2s)^{2i-1} \cdot \frac{n}{n-2i+2} \left[\left(\frac{n-3}{2}+i\right) C(2i-1)\right],$$

$$F = -s^2 \times \frac{n^2-(2i-1)^2}{2i(2i+1)}.$$

Die Zahl der Glieder macht $\frac{1}{2}(n+1)$ und das letzte $= \pm 2^{n-1}s^n$.

Für $\cos nz$ ....

$$T = (-1)^{i-1} c(2s)^{2i-2} \left[\left(\frac{n-3}{2}+i\right) C2(i-1)\right],$$

$$F = -s^2 \times \frac{n^2-(2i-2)^2}{2i(2i-1)}.$$

Die Zahl der Glieder ist $\frac{1}{2}(n+1)$, und das letzte $= \pm c(2s)^{n-1}$.

Umkehrung der Reihen.

§. 188. Eine gegebene Reihe $y=\varphi x$ (1), in welcher y als Funktion von x erscheint, umkehren, heißt daraus eine Reihe von der Form $x=Fy$ (2) ableiten, wo x in einer nach den Potenzen von y fortlaufenden Reihe ausgedrückt ist. Wäre die Form dieser Reihe (2) bekannt, wie z. B. $x=Ay+By^2+Cy^3\ldots$; so würde es sich bloß um die Bestimmung der Coefficienten $A, B, C\ldots$ handeln. Man substituirt zu diesem Behuf in die Gleichung (1) statt der Potenzen von x die der Reihe (2), was zu einer identischen Gleichung in y führt, aus welcher sich nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten die Größen $A, B, C\ldots$ finden lassen. Beispiele:

I. Um die Reihe $y=M(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots)$ umzukehren, setze man darin $x=Ay+By^2\ldots$, welche Form, wegen der Gleichung $y=\log(1+x)$ oder $a^y=1+x$ (§. 175), als richtig angenommen werden darf. Durch diese Substitution entsteht:

$$\begin{array}{lll} \frac{y}{M}= & Ay+By^2+Cy^3+Dy^4\ldots & \text{statt } x \\ & -\frac{1}{2}A^2y^2-ABy^3-(\frac{1}{2}B^2+AC)y^4\ldots & \text{statt } -\frac{1}{2}x^2, \\ & +\frac{1}{3}A^3y^3+A^2By^4\ldots & +\frac{1}{3}x^3, \\ & -A^4y^4\ldots & -\frac{1}{4}x^4;\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

Hieraus $AM=1$, $B=\frac{1}{2}A^2$, $C=AB-\frac{1}{3}A^3$, $D\ldots$; ferner

$$A=\frac{1}{M},\ B=\frac{A^2}{2},\ C=\frac{A^3}{2\cdot3},\ D=\frac{A^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\ \text{u. s. w.}$$

Die umgekehrte Reihe ist demnach: $x=Ay+\frac{A^2y^2}{2}+\frac{A^3y^3}{2\cdot3}+\ldots$

II. Ebenso liefert die Reihe $y=x-x^2+x^3-x^4\ldots$ die umgekehrte Reihe $x=y+y^2+y^3+y^4\ldots$

Uebrigens trifft es sich selten, daß man im Voraus die Gestalt der gesuchten Reihe $x=Fy$ angeben könne; in solchem Falle läßt man auch die Exponenten von y unbestimmt, und setzt $x=Ay^\alpha+By^\beta+\ldots$, es kommt dann darauf an, die Coefficienten und Exponenten zu finden, was dadurch geschieht, daß man in der gegebenen Gleichung $y=\varphi x$ die angenommene Reihe für x einführt, wo in dem daraus hervor-

gehenden Resultate jedes Glied durch andere, in denen y mit demselben Exponenten behaftet ist, aufgehoben werden muß. Beispiele:

I. Um die Reihe $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4 \ldots$ umzukehren, setzt man $x=Ay^{\alpha}+By^{\beta}+Cy^{\gamma}$, in welchem Ausdruck die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ steigend geordnet sind. Das Glied ohne y bleibt hier weg, weil $x=0$ für $y=0$ wird. Substituirt man statt x seinen Werth, so stellen sich folgende Resultate heraus:

1) Die Exponenten 2, 3, 4 ... von x bilden eine arithmetische Progression; die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ werden daher gleichfalls in einer solchen Reihe fortschreiten, da in der Entwickelung der Potenzen von $x^2, x^3 \ldots$ dieselben offenbar jene Eigenschaft beibehalten.

2) Hat man einmal α gefunden, so ergeben sich hernach die Werthe von $\beta, \gamma, \delta \ldots$ daraus.

3) Das Glied, in welchem y den kleinsten Exponenten hat, ist $\frac{1}{2}A^2y^{2\alpha}$. Da dasselbe mit dem ersten Theil y übereinstimmen muß, so bekommt man $2\alpha=1$, $\frac{1}{2}A^2=1$; folglich $\alpha=\frac{1}{2}$, $A=\sqrt{2}$.

4) Die darauf folgenden, mit dem kleinsten Exponenten behafteten Glieder sind $ABy^{\alpha+\beta}$ und $\frac{1}{3}A^3y^{3\alpha}$. Ihre gegenseitige Aufhebung erheischt die Relation $\alpha+\beta=3\alpha$, oder $\beta=\frac{2}{2}$; ferner $\gamma=\frac{3}{2}$, $\delta=\frac{4}{2} \ldots$ Auf solche Art findet man

$$x=Ay^{\frac{1}{2}}+By^{\frac{2}{2}}+Cy^{\frac{3}{2}}+\ldots$$

Indem man mit dieser Reihe wie oben verfährt, werden die Coefficienten A, B, C ... bestimmt, woraus man endlich folgende umgekehrte Reihe erhält:

$$x=y^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}-\tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{18}\sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}-\tfrac{58}{135}y^2+\ldots$$

II. Ebenso findet man, daß für die Reihe

$$y=x-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdots5}-\frac{x^7}{1\cdot2\cdots7}\ldots$$

die Form der umgekehrten Reihe ist: $x=Ay+By^3+Cy^5\ldots$ Nach ganz durchgeführter Rechnung hat man für die umgekehrte Reihe:

$$x=y+\frac{1\cdot y^3}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3y^5}{2\cdot4\cdot5}+\frac{1\cdot3\cdot5y^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7}+ \text{etc.}$$

III. Die Reihe $x=ay+by^2+cy^3 \ldots$ gibt für die umgekehrte:

$$y=\frac{x}{a}-\frac{bx^2}{a^3}+\frac{2b^2-ac}{a^5}x^3+\frac{5abc-a^2d-5b^3}{a^7}x^4 \ldots$$

IV. Für die Reihe $x=ay+by^3+cy^5+dy^7$ findet man die umgekehrte

$$y=\frac{x}{a}-\frac{bx^3}{a^4}+\frac{3b^2-ac}{a^7}x^5+\frac{8abc-a^2d-12b^3}{a^{10}}x^7 \ldots$$

V. Die Reihe $y=x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}} \ldots$ gibt

$$x=y^{-2}-y^{-4}+y^{-6}-y^{-8}+\ldots$$

Hätte die vorgelegte Reihe die Form $y=a+bx+cx^2+\ldots$, so bringt man zuerst das Glied a auf die andere Seite, und setzt der Kürze halber $\frac{y-a}{b}=z$, worauf man die Reihe

$$z=x+\frac{c}{b}x^2+\frac{d}{b}x^3+\ldots$$

umzukehren hat. Wir werden im übrigen die Aufgabe über die Umkehrung der Reihen in der Differenzialrechnung auf eine mehr allgemeine Weise behandeln.

Anmerkungen. 1) Ohne die hier erwähnte Vorbereitung würde man in der Gleichung, aus welcher die unbestimmten Coefficienten A, B, C ... abzuleiten sind, für die Coefficienten von y, y^2 ... lauter ins Unendliche fortlaufende Reihen erhalten, aus denen die Werthe für A, B, C ... sich nicht finden ließen.

2) Ist die Form der umgekehrten Reihe unrichtig gewählt worden, so kommt solches im Laufe der Rechnung selbst zum Vorschein, indem man auf die eine oder die andere Bedingung stößt, welcher sich nicht Genüge leisten läßt.

Von den Bedingungsgleichungen.

§. 189. Wenn das in einer Naturerscheinung herrschende, bekannte Gesetz in eine Gleichung $\varphi(x, y \ldots, a, b \ldots)=0$ übertragen worden ist; so ereignet es sich öfters, daß die darin vorkommenden

Constanten a, b, c... unbestimmt sind, während x, y, z... veränderliche Größen darstellen, welche von den in der Erscheinung liegenden Umständen abhängen. Um in einem solchen Falle die fraglichen Constanten aufzufinden, nimmt man seine Zuflucht zu der Erfahrung, indem man die gleichzeitigen Werthe von x, y, z... mißt und sie in die Gleichung $\varphi=0$ substituirt. Durch anderweitige angestellte Versuche erhält man andere Werthe für x, y, z..., was uns zwischen den unbekannten Größen a, b, c... verschiedene Bedingungsgleichungen liefert, aus denen sich die Werthe von a, b, c... nach der gewöhnlichen Eliminationsmethode herleiten lassen. Es ist aber für uns nicht möglich, beim Messen irgend einer durch die Beobachtung dargebotenen Größe absolute Genauigkeit zu erlangen, daher denn auch die Zahlen a′, b′, c′..., welche man bei dem angeführten Verfahren erhält, nur als genäherte Werthe betrachtet werden können. Darum müssen sie verbessert werden, was auf folgende Art geschehen kann. Wir setzen nämlich in die Gleichung $\varphi=0$, $a=a'+A$, $b=b'+B$..., wo A, B... die unbekannten Fehler bezeichnen, welche an a, b, c.... etwa haften. Da nun A, B.... sehr kleine Größen sein werden, so ist es erlaubt, alle ihre Potenzen, welche die erste übersteigen, zu vernachläßigen. Hierdurch entsteht aus $\varphi=0$ für A, B.... eine Gleichung des ersten Grades, z. B. von der Form

$$0=x+Ay+Bz+Ct \ldots. \quad (1).$$

Um nun dem genauen Resultate möglichst nahe zu kommen, wiederholt man die Beobachtungen, und sucht hierdurch die beim Messen der Größen x, y, z.... gemachten, sich gegenseitig aufhebenden Fehler gewissermaßen zu eliminiren. Die mehrfach angestellten Versuche liefern uns auf diese Weise eben soviele Gleichungen (1), worin x, y, z... als bekannt zu betrachten sind. Hierauf stellt man diese Gleichungen zusammen, und ändert mehrere durch geeignete Combinationen dahin, daß man eine mittlere Gleichung gewinne, in welcher eine unserer Constanten den größtmöglichen Faktor erhält, während hingegen die Coefficienten der übrigen Constanten möglichst klein bleiben. Indem nämlich der Coefficient der gedachten Constante am größten ist, und alle übrigen mit diesem zuletzt dividirt werden müssen; so haben die Fehler, die etwa an ihnen haften, auf den Werth der ersteren den mindesten Einfluß. Hat man auf solche Art ebensoviele von einander verschiedene mittlere Gleichungen, als gesuchte

Größen da sind; so lassen sich letztere durch Elimination leicht bestimmen.

Als Anwendungsbeispiel mögen folgende aus Baumgartner's Supplementband zur Naturlehre entlehnte Gleichungen dienen, aus welchen a, b, c bestimmt werden sollen:

$$a-b+2c=3,\ 3a+2b-5c=5,\ 4a+b+4c=21,\ -a+3b+3c=14.$$

Um eine Gleichung für a zu bekommen, ändert man die letzte Gleichung in $a-3b-3c=-14$, welche zu den drei übrigen addirt, $9a-b-2c=15$ gibt. Zur Bestimmung einer Gleichung für b und c ändert man die Zeichen der ersten und zweiten Gleichung und addirt sie zu den übrigen. Hierdurch entsteht

$$5a+7b=37 \text{ und } a+b+14c=33.$$

Aus den drei so zubereiteten Gleichungen bestimmt man jetzt a, b, c und findet

$$a=2,485,\ b=3,51,\ c=1,929.$$

Die eben auseinandergesetzte, von Tobias Meyer herrührende Methode findet in der Astronomie häufige Anwendung; sie ist jedoch minder scharf als die von Gauß und Legendre vorgeschlagene Methode der kleinsten Quadrate, bei welcher die Weitläufigkeit der Rechnungen durch die große Genauigkeit der Resultate ausgeglichen wird. Hat man nämlich durch Erfahrung keine ganz genauen Werthe für x, y, z ... erhalten, so wird, wenn man diese Werthe in die Gleichung (1) substituirt, das erste Glied sich nicht auf Null, sondern auf eine kleine und unbekannte Zahl e reduciren. Ebenso werden andere Versuche die den Werthen x', x'', y', y'', ... entsprechenden Fehler e', e'', ... darbieten; so daß man hat:

$$e=x+Ay+Bz\ldots,\ e'=x'+Ay'+Bz'\ldots,\ e''=x''+Ay''+Bz''\ldots \text{ etc.}$$

Wird jede dieser Gleichungen, deren Anzahl mit jener der gemachten Beobachtungen übereinstimmt, zum Quadrat erhoben; so bekommt man durch Addition derselben, indem man nur die Glieder anschreibt, worin A vorkommt, weil die übrigen Glieder von derselben Form sind:

$$e^2+e'^2+e''^2\ldots=A^2(y^2+y'^2\ldots)+2A(xy+x'y'\ldots)+2AB(yz+y'z'\ldots)+\text{etc.}$$

Der zweite Theil von der Form $A^2m+2An+K$ wird auf ein Minimum gebracht, wenn man A so wählt, daß seine erste Derivation $Am+n$ verschwindet (man sehe unsere Differentialrechnung). Hier-

nach entsteht, wenn bloß der unbekannte Faktor A in Berücksichtigung gezogen wird:

$$y(x+Ay+Bz\ldots)+y'(x'+Ay'+Bz'\ldots)+\text{ꝛc.}=0.$$

Um also die Summe der Fehler in Beziehung auf eine der Unbekannten A auf den kleinsten Werth zu bringen, multiplicire man jede der gegebenen Bedingungsgleichungen (1) mit dem zugehörigen Faktor y von A, wobei derselbe sein Zeichen beibehält, und setze dann die Summe aller dieser Produkte gleich Null. Indem auf gleiche Weise mit den übrigen Constanten B, C ... verfahren wird, gewinnt man so viele Gleichungen als zu bestimmende Größen da sind, aus denen dann die letzteren entwickelt werden.

Als Beispiel diene folgende Aufgabe aus der Mechanik, in welcher man zeigt, daß die Länge x des einfachen Secundenpendels an einem Orte, dessen geographische Breite y ist, durch die Formel $x=A+B\sin^2 y$ ausgedrückt wird, wo A und B unveränderliche Zahlen sind, um deren Bestimmung es sich hier handelt. Es würde zu diesem Behufe ausreichend sein, die Länge x unter zwei verschiedenen Breitegraden mit gehöriger Sorgfalt zu messen, um zwei Gleichungen zu erhalten, aus denen sich die beiden Unbekannten A und B herleiten ließen. Die Genauigkeit wird aber um Vieles größer werden, wenn man, wie Mathieu und Biot gethan, die Längen x unter sechs verschiedenen Breitegraden mißt, und hierauf die sechs Bedingungsgleichungen nach der vorhergehenden Methode behandelt. Substituirt man demnach in den Ausdruck $A+B\sin^2 y=x$, wo die Größen sich auf Metermaß beziehen, die bei den sechs Breitegraden gefundenen Werthe; so erhält man folgende sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}
e &= A + B\cdot 0^{m},3903417 - 0^{m},9929750,\\
e' &= A + B\cdot 0,4972122 - 0,9934620,\\
e'' &= A + B\cdot 0,5667721 - 0,9938784,\\
e''' &= A + B\cdot 0,4932370 - 0,9934740,\\
e^{IV} &= A + B\cdot 0,5136117 - 0,9935967,\\
e^{V} &= A + B\cdot 0,6045628 - 0,9940932.
\end{aligned}$$

Um die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden, muß man jede der sechs Gleichungen mit dem Coefficienten von A multipliciren, diese Produkte addiren, und ihre Summe dann gleich Null

setzen. Da dieser Coefficient durchgehends 1 ist, so braucht man bloß jene Gleichungen zu addiren, und man hat

$$6A + B \cdot 3,^{m}0657375 - 5,^{m}9614793 = 0.$$

Multiplicirt man ferner jede der sechs Gleichungen mit dem Coefficienten von B und addirt dann die Produkte, so bekommt man

$$A \cdot 3^{m},0657375 + B \cdot 1^{m},5933894 - 3^{m},0461977 = 0.$$

Nach den Regeln der Elimination findet man endlich

$$A = 0^{m},9908755, \; B = 0,0052941816.$$

Anmerkung. Den Leser, welcher sich näher über die Methode der kleinsten Quadrate, diese wichtige und bedeutende Erweiterung im Gebrauche der Rechnung bei physikalischen Beobachtungen und Versuchen unterrichten will, verweisen wir auf nachstehende Werke:

Gauss, Theoria motus corporum cœlestium.

Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, par Legendre.

Calcul des probabilités, par La Place.

Littrow, Vorlesungen über Astronomie.

Pauker, über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsumme.

Bessel, in Schumachers astronomischen Nachrichten. Band VI.

Noten zur höheren Algebra.

Note I zu §. 9.

Allgemeines Glied in der Entwickelung der Potenz eines Polynoms.

Setzen wir in der Formel (9) $m-\beta-\gamma-\delta\dots$ statt α, und lassen den im Zähler und Nenner gemeinsamen Faktor $1\cdot2\cdot3\dots\alpha$ weg, so entsteht

$$N=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\beta-\gamma-\delta\dots+1)}{1\cdot2\dots\beta\times1\cdot2\dots\gamma\times1\cdot2\dots\delta\dots}\times b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\dots a^{m-\beta-\gamma-\delta\dots}$$

Der Coefficient eines Gliedes in der Entwickelung von $(a+b+c+d\dots)^m$ wird also durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler gleich ist dem Produkte aus ebensovielen aufeinander folgenden Gliedern der Reihe $m, m-1, m-2, \dots$ als Einheiten in der Summe der Exponenten der Buchstaben, welche a multipliciren, enthalten sind, und dessen Nenner gleich ist dem Produkte aus allen einzelnen Gliedern der Reihen, die man (für jeden mit a multiplicirten Buchstaben) so bildet, daß jede die natürliche Zahlenreihe ist, von 1 an bis zu dem Exponenten des jeder einzelnen entsprechenden Buchstabens.

In der nach a geordneten Entwickelung wollen wir jetzt das Aggregat aller derjenigen Glieder, welche mit der nämlichen Potenz dieses Buchstabens behaftet sind, als ein einziges betrachten. Die Potenz a^{m-n+1} des $n$ten Gliedes wird sonach mit sämmtlichen Produkten von $(n-1)$ Dimensionen, welche man aus den Buchstaben $b, c, d\dots$ bilden kann, multiplicirt. Ebenso erscheint in dem $(n+1)$ Gliede die Potenz a^{m-n} als Faktor sämmtlicher Produkte von n Dimensionen, welche sich aus jenen nämlichen Buchstaben zusammensetzen lassen. Denken wir uns nun die Produkte von $(n-1)$ Dimensionen, welche unsere Buchstaben $b, c, d\dots$ liefern können, wobei vor der Hand der Zahlencoefficient unberücksichtigt bleibt, gebildet; so ist klar, daß wenn man jene Produkte mit b multiplicirt,

man alle diejenigen von n Dimensionen erhält, welche diesen Buchstaben zum Faktor haben. Multiplicirt man auf ähnliche Weise mit c anstatt mit b, so findet man alle Produkte von n Dimensionen, in denen der Buchstabe c vorkommt. Da es unter letzteren Produkten aber solche gibt, welche den Faktor b enthalten und diese schon bei der ersten Multiplication gewonnen wurden; so ist es einleuchtend, daß bei der Multiplication mit c man nur diejenigen Glieder von $(n-1)$ Dimensionen in Betracht nehmen muß, in welchen der Faktor b nicht erscheint. Ebenso multiplicirt man die Produkte von $(n-1)$ Dimensionen mit d, indem diejenigen außer Acht bleiben, welche b und c enthalten; ferner multiplicirt man unsere Produkte von $(n-1)$ Dimensionen mit e, wobei nur diejenigen berücksichtigt werden, in welchen weder b noch c noch d vorkommt u. s. f.

Die auf solche Art gewonnenen Resultate zusammengefügt, geben uns alle nur möglichen Produkte zu n Dimensionen aus den Buchstaben $b, c, d, e \ldots$ Hieraus ergibt sich folgende Regel, um bei der nach a geordneten Entwickelung von $(a+b+c+d \ldots)^m$ jedes $(n+1)$te Glied aus dem nächstvorhergehenden $n$ten herzuleiten: Man multiplicire mit $\frac{b}{a}$ sämmtliche Produkte der Buchstaben $a, b, c \ldots$, welche in dem $n$ten Gliede vorkommen; alsdann mit $\frac{c}{a}$ alle diejenigen Produkte, welche den Faktor b nicht enthalten; ferner mit $\frac{d}{a}$ alle diejenigen der nämlichen Produkte, welche weder b noch c enthalten, u. s. w.; endlich setze man jedem dieser so gefundenen Produkte den Zahlencoefficienten vor, welchen die Formel (9) anzeigt. Diese Regel gilt für alle Glieder und gestattet, da das erste Glied jederzeit $=a^m$ ist, nach und nach jedes der übrigen zu finden.

Note II. zu §. 26.

Vier Probleme aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1) In einer Urne befinden sich n gleiche Kugeln; man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß, wenn man auf Gerathewohl hineingreift und eine beliebige Anzahl davon herauszieht, diese eine gerade oder eine ungerade Zahl sein wird.

Die Zahl der Fälle, in welchen nur eine Kugel herauskömmt, ist offenbar n, weil jede Kugel auf eine gleich mögliche Weise ergriffen werden kann; die Anzahl der Fälle, in welchen zwei Kugeln vorkommen,

ist gleich der Zahl der möglichen Combinationen von n Elementen zu je 2, d. h. $=\frac{n(n-1)}{1.2}$; die Zahl der Fälle, in denen drei Kugeln gezogen werden, ist $=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, u. s. w. Die Summe G der Fälle für die geraden Combinationen (d. h. zu je 2, 4, 6 . . .) ist daher

$$=\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3\cdot 4}+ \text{ꝛc.};$$

und die Summe U der Fälle für die ungeraden Combinationen

$$(\text{d. h. zu } 1,\ 3,\ 5 \ldots)=\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ꝛc.}$$

Man hat aber

$$(1+1)^n=2^n=1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\text{ꝛc.}$$

$$(1-1)^n=0=1-n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}-\frac{n(n-)(n-2)}{1.2\cdot 3}+\text{ꝛc.};$$

aus welchen Gleichungen, wenn man sie erst addirt, dann subtrahirt, und beidemal durch 2 dividirt, sich sofort ergibt:

$$G=2^{n-1}-1 \text{ und } U=2^{n-1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl zu ziehen, ist also gleich $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$, und die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl zu ziehen, gleich $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$; die erstere Wahrscheinlichkeit ist daher stets kleiner als die letztere, beide nähern sich aber immer mehr ihrer gemeinsamen Grenze $\frac{1}{2}$, je größer n wird.

2) In einer Urne befinden sich n weiße und ebensoviele schwarze Kugeln; man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, wenn man daraus irgend eine gerade Anzahl Kugeln zieht, daß darunter ebensoviele schwarze als weiße Kugeln sein werden. Die Zahl der Fälle, in welchen eine weiße und eine schwarze Kugel zusammenkommen, ist $=n^2$; die Zahl der Fälle, in denen zwei weiße und zwei schwarze Kugeln verbunden sind, ist

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\times\frac{n(n-1)}{1.2}, \text{ u. s. f.}$$

Die Summe der günstigen Fälle ist folglich =

$$n^2+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]^2+\text{ꝛc.},$$

d. h. gleich der Summe der Quadrate der Glieder in der Entwickelung von $(1+1)^n$ weniger der Einheit. Man sieht aber bald, daß die letztere

Summe gleich der Summe der von a unabhängigen Glieder des Produktes

$$\left[1+n\cdot\frac{1}{a}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{a^2}+\ldots\right]\left[1+n\cdot a+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^2+\ldots\right],$$

oder des Produktes $\left[1+\frac{1}{a}\right]^n(1+a)^n=\frac{(1+a)^{2n}}{a^n}$

ist. Unsere gesuchte Summe ist daher mit dem Coefficienten des mittleren Gliedes, d. h. mit dem Coefficienten des Gliedes a^n in der Entwickelung von $(1+a)^{2n}$ einerlei. Für diesen Coefficienten findet man nun den Ausdruck

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\frac{1\cdot 2\cdots(2n-1)\cdot 2n}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}.$$

Die Summe der günstigen Fälle ist also =

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}-1.$$

Die Summe aller möglichen Fälle stimmt mit der, der geraden Combinationen aus $2n$ Elementen überein, sie ist folglich

$$=\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{rc.}=2^{2n-1}-1.$$

Wir haben daher für die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Ausdruck

$$\frac{\frac{1\cdot 2\cdots 2n}{(1\cdot 2\cdots n)^2}-1}{2^{2n-1}-1}.$$

3) Man hat n Würfel, wovon jeder mit n Nummern von 1 an gerechnet, bezeichnet ist; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, damit eine gegebene Anzahl $p+1$ Augen zu werfen? Die Anzahl aller möglichen Fälle bei dem gleichzeitigen Wurfe mit n Würfeln ist m^n. Was die Summe der günstigen Fälle anlangt, so sieht man, daß dieselbe mit dem Coefficienten des Gliedes der Entwickelung $(f^1+f^2+f^3\ldots f^m)^n$, in welchem die Summe der Exponenten $p+1$ beträgt, übereinstimmt, wo nämlich gedachter Coefficient andeutet, wie oft sich aus n Zahlen, die von 1 bis m gehen, die Zahl $p+1$ bilden läßt. Um diesen Coefficienten auszumitteln, bemerken wir, daß

$$(f^1+f^2+\ldots f^m)^n=f^n(1-f^m)^n(1-f)^{-n}. \text{ Nun ist}$$

$$(1-f^m)^n=1-\frac{n}{1}f^m+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f^{2m}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}f^{3m}+\text{rc., und}$$

$$(1-f)^{-n}=1+\frac{n}{1}f+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}f^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}f^3+\text{rc.}$$

Um nun unseren Coefficienten zu bekommen, nehme man in der zweiten Reihe das Glied von f^{p+1-n} und multiplicire es mit dem 1ten Gliede

der ersten Reihe; alsdann gehe man in der zweiten Reihe zu dem Glied $f^{p+1-n-m}$ und multiplicire es mit dem zweiten Gliede der ersten Reihe und fahre so fort, daß man in der zweiten Reihe stets um m Glieder zurückgeht, in der ersten aber um ein Glied vorschreitet. Hierdurch findet man für den gesuchten Coefficienten den Ausdruck:

$$\frac{n(n+1)\cdots p}{1\cdot 2\cdots(p+1-n)} - \frac{n(n+1)\cdots(p-m)}{1\cdot 2\cdots(p+1-n-m)} \times \frac{n}{1}$$

$$+ \frac{n(n+1)\cdots(p-2m)}{1\cdot 2\cdots(p+1-n-2m)} \cdot \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \text{ etc.},$$

was so weit fortgesetzt wird, bis man zu einem Faktor gelangt, der 0 oder negativ ist.

Der vorstehende Coefficient durch m^n dividirt, gibt die verlangte Wahrscheinlichkeit.

4) Es wirft Jemand ein einziges Mal n Würfel, von denen jeder a mit 0 bezeichnete, b mit $+1$, und b mit -1 bezeichnete Seitenflächen hat. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dabei lauter mit Null bezeichnete Seiten zu werfen? Und welches ist die Wahrscheinlichkeit, dabei m mit $+$ oder m mit $-$ bezeichnete Seiten zu bekommen? Stellt man die Null enthaltende Seite durch x^0, die $+1$ enthaltende durch x^1 und die -1 führende Seite durch x^{-1} dar; so drückt in der Entwickelung von $(ax^0+bx^1+bx^{-1})^n$ der Coefficient C des Gliedes, in welchem x mit dem Exponenten 0 versehen ist, die Zahl der günstigen Fälle aus, während die Zahl aller möglichen Fälle $(a+2b)^n$ beträgt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$= \frac{C}{(a+2b)^n}.$$

Es handelt sich jetzt darum, den Coefficienten C zu finden. Durch Entwickelung des Trinoms $(ax^0+bx^1+bx^{-1})^n$ finden wir

$$[ax^0+b(x^1+x^{-1})]^n = a^n + na^{n-1}b(x^1+x^{-1})$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2}b^2(x^1+x^{-1})^2 + \text{etc.}$$

Hier stellt sich sofort heraus, daß die ungeraden Potenzen des Binoms (x^1+x^{-1}) kein Glied ohne x enthalten, und daß bei den geraden Potenzen das mittlere Glied allein ohne x vorkommt.

Wir haben daher:

$$C = a^n + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot1\cdot2}a^{n-4}b^4$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3}a^{n-6}b^6 + \text{etc.}$$

Um die zweite Frage zu beantworten, brauchen wir bloß in der Entwickelung von $[ax^0+b(x^1+x^{-1})]^n$ den Coefficienten M des Gliedes x^m nebst dem Gliede x^{-m} aufzusuchen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann gleich der Summe dieser Coefficienten dividirt durch $(a+2b)^n$.

Es ist aber:

$$[a+b(x^1+x^{-1})]^n = a^n + na^{n-1}b(x^1+x^{-1}) + \frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}ab^2(x^1+x^{-1})^2 + \text{etc.};$$

ferner $(x^1+x^{-1})^2 = x^2+x^{-2}+2,$

$$(x^1+x^{-1})^3 = x^3+x^{-3}+3(x^1+x^{-1}),$$

$$(x^1+x^{-1})^4 = x^4+x^{-4}+4(x^2+x^{-2})+\frac{4\cdot3}{2},$$

$$(x^1+x^{-1})^5 = x^5+x^{-5}+5(x^3+x^{-3})+\frac{5\cdot4}{2}(x^1+x^{-1}) \text{ u. s. f.}$$

Setzt man folglich

$[a+b(x^1+x^{-1})]^n = A+B(x^1+x^{-1})+C(x^2+x^{-2})+D(x^3+x^{-3})+\text{etc.}$, so ist

$$A = a^n + \frac{2}{1}\cdot\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{4\cdot3}{1\cdot2}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^{n-4}b^4 + \text{etc.}$$

$$B = na^{n-1}b + \frac{3}{1}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3 + \frac{5\cdot4}{1\cdot2}$$
$$\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}a^{n-5}b^5 + \text{etc.};$$

$$C = n\left[\frac{n-1}{2}\right]a^{n-2}b^2 + \frac{4}{1}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^{n-4}b^4$$
$$+ \frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-5)}{1\cdot2\cdots6}a^{n-6}b^6 + \text{etc.}; \text{ u. s. f.}$$

$$M = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot2\cdots m}a^{n-m}b^m$$
$$+ \frac{(m+2)}{1}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-m-1)a^{n-m-2}b^{m+2}}{1\cdot2\cdots(m+2)}$$
$$+ \frac{(m+4)(m+3)}{1\cdot2}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-m-3)a^{n-m-4}b^{m+4}}{1\cdot2\cdots(m+4)}.$$

Also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{2M}{(a+2b)^n}$, weil x^m und x^{-m} einerlei Coefficienten haben.

Note III zu §. 58.
Eliminationsmethode von Euler.

Ein bemerkenswerthes Eliminationsverfahren ist das von Euler uns überlieferte, welches wir in Kürze hier auseinander setzen wollen. Soll man nämlich aus den beiden Gleichungen

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots=0 \text{ und } x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+\ldots=0;$$

eine neue Gleichung erhalten, in der x nicht mehr vorkommt; so ist dieß soviel, als man soll die Relation zwischen den Coefficienten P, Q... P′, Q′... bestimmen, wobei die gegebenen Gleichungen eine gemeinsame Wurzel $x=\alpha$ oder einen gemeinschaftlichen Faktor $x-\alpha$ haben. Wir haben alsdann:

$$(x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots)=(x-\alpha)(x^{m-1}+px^{m-2}+qx^{m-3}\ldots), \text{ und}$$
$$(x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}\ldots)=(x-\alpha)(x^{n-1}+p'x^{n-2}+q'x^{n-3}\ldots).$$

Wird das Binom $x-\alpha$ eliminirt, so finden wir:

$$(x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots)(x^{n-1}+p'x^{n-2}+\ldots)$$
$$=(x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}\ldots)(x^{m-1}+px^{m-2}+\ldots).$$

Entwickeln wir nun die auf beiden Seiten stehenden Produkte und setzen die gleichnamigen Coefficienten einander gleich; so entspringen daraus $m+n-1$ Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen $p, q \ldots p', q' \ldots$, die weder unter einander noch mit sich multiplicirt vorkommen, und deren Gesammtanzahl sich auf $m+n-2$ beläuft. Da man nun eine Gleichung mehr hat, als unbekannte Größen vorhanden sind; so gelangt man zuletzt, wenn man nach einer der bekannten Methoden für die Gleichungen des ersten Grades eliminirt, zu einer Gleichung, welche nur noch die Coefficienten P, Q...P′, Q′.... der gegebenen Gleichungen und kein x mehr enthält, mithin die gesuchte Finalgleichung in y ist. Wenn diese Endgleichung statt finden kann, so bekommt man den Faktor $x-\alpha$, indem man die erste der vorgelegten Gleichungen durch das Polynom $x^{m-1}+px^{m-2}\ldots$ dividirt. Dabei findet man den Quotienten $x+P-p$, und vernachlässigt den Rest, weil er nothwendig verschwindet, wenn man darin statt y einen aus der Finalgleichung entnommenen Werth einführt. Der obige Quotient, gleich Null gesetzt, gibt $x=p-P$, wonach x in y ausgedrückt sein wird, wenn man darin statt p seinen aus den oben aufgestellten Gleichungen vom ersten Grade gefundenen Werth substituirt. Im Allgemeinen wird der Ausdruck

für x von der Art sein, daß man $Nx-M=0$ hat. Die Werthe von y, welche gleichzeitig N und M Null machen, weisen darauf hin, daß für diese Werthe die zwei gegebenen Gleichungen einen gemeinschaftlichen Faktor von einem höheren Grade, als der erste ist, zulassen.

Als Beispiel mögen die beiden Gleichungen

$x^2+Px+Q=0$, $x^2+P'x+Q'=0$ gelten.

Die Faktoren, welche $x-\alpha$ multipliciren, sind hier $x+p$ und $x+p'$. Hiernach kommen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p - \quad p' &= P - P', \\ P'p - Pp' &= Q - Q', \\ Q'p - Qp' &= 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich

$$p=\frac{(P-P')P-Q+Q'}{P-P'}$$

$$p'=\frac{(P-P')P'-Q+Q'}{P-P'}.$$

Substituirt man diese Werthe in die dritte, so entsteht:

$$(P-P')(PQ'-QP')+(Q-Q')^2=0.$$

Setzt man in der Gleichung $x=p-P$ für p seinen oben gefundenen Werth, so kommt

$$x=\frac{Q'-Q}{P-P'}.$$

Die durch diese Eulersche Methode gewonnene Finalgleichung ist öfters von einem niedrigeren Grade, als jene durch die andere Methode gefundene. Die Ursache dieser Verschiedenheit liegt darin, daß, im Laufe der Rechnungen bei der Bestimmung der unbekannten Größen $p, q \ldots p', q' \ldots$, in den entstehenden Resultaten die gemeinsamen Faktoren bei Seite gesetzt worden sind, was ein Verschwinden von mehreren Wurzeln nach sich zieht, wie wir es am folgenden Beispiele sehen werden.

Es seien die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} x^3+(3-3y)x^2+(3y^2-6y-1)x+3y^2-y^3+y-3=0 \\ =(x-\alpha)(x^2+px+q), \text{ und} \\ x^3+(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+y^3-3y^2-y+3=0 \\ =(x-\alpha)(x^2+p'x+q') \end{aligned}$$

Man findet die Gleichungen

$$2(3-2y)+p'=p \ldots (1), \quad p'(3-3y)+q'=-p(3-3y)+q \ldots (2)$$

$$2(3y^2-y^3+y-3)+p'(3y^2-6y-1)+q'(3-3y)$$
$$=p(3y^2-6y-1)-q(3-3y)\ldots.(3)$$
$$p'(3y^2-y^3+y-3)+q'(3y^2-6y-1)$$
$$=-p(3y^2-y^3+y-3)+q(3y^2-6y-1)\ldots(4)\quad q'=-q\ldots(5).$$

Die erste gibt $p'=p-2(3-3y)$; die zweite liefert, nachdem $-q$ statt q' gesetzt worden, wie es (5) aussagt:

$p'=\frac{2q}{3-3y}-p$. Aus der Gleichung dieser beiden Werthe folgt $p=\frac{q}{3-3y}+3-3y$. Substituirt man hierauf die Werthe von p und p' in (3) und (4), so kommt $q=-q'=0$, und man hat die Finalgleichung $(y^2-3y+2)y=0$, aus welcher sich die drei Wurzeln $y=0, y=1$, $y=2$ ergeben. Die nach dem andern Verfahren gefundene Gleichung ist dagegen vom 9ten Grade, und liefert folgende Wurzeln:

$$y=0,\ y=0,\ y=1,\ y=1,\ y=1,\ y=2,\ y=2,\ y=3,\ y=3,\ y=-1.$$

In der ersten Finalgleichung fehlen die Wurzeln $y=3$, $y=-3$, weil der, beiden Theilen gemeinsame Faktor der vierten Relation bei Seite gesetzt wurde; außerdem bleiben, der in der zweiten Relation vorkommende Faktor $y-1$ und ferner der Faktor y^2 unberücksichtigt.

Note IV zu §. 64.

Ueber die Existenz der reellen Wurzeln der Gleichungen mit einer Unbekannten.

Die Richtigkeit des hier durch geometrische Betrachtungen hergeleiteten Fundamentalsatzes, daß, wenn man bei der successiven Substitution zweier Werthe a und b statt x in einer Gleichung $fx=0$ zwei Resultate mit entgegengesetzten Zeichen findet, nothwendig zwischen a und b wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, läßt sich auf analytischem Wege folgendermaßen nachweisen. Indem wir durch P das Aggregat der positiven Glieder und durch N das der negativen Glieder unserer Gleichung darstellen, erhält dieselbe die Form $P-N=0$.

Es sei nun a der Werth von x, welcher ein negatives Resultat, und b der Werth, welcher ein positives Resultat liefert. Wenn für $x=a$ nun $P-N<0$, für $x=b$ aber $P-N>0$; so ist klar, daß im ersteren Falle P kleiner als N, im zweiten dagegen P größer als N sein müsse. Die Größen P und N, bloß positive Glieder und ganzzahlige, positive Potenzen von x enthaltend, nehmen nun in dem Maße zu, als x zunimmt; es werden selbst jene Größen allmählig wachsen, wenn x

allmählig wächst. Da aber P, welches vorher kleiner als N war, nachher größer als dasselbe geworden ist; so muß die erste Größe schneller als die zweite anwachsen, damit sie diese letztere, von der sie anfänglich übertroffen wurde, endlich übersteigen könne. Ehe dieser Umstand statt findet, mußte es aber einen Moment geben, wo jene beide Größen einander gleich waren, mithin $P-N=0$ wurde, d. h. es liegt zwischen a und b ein Werth, welcher $f(x)$ gleich Null macht.

Es läßt sich dieß auch so geben: In dem Intervall von $x=a$ bis $x=b$ ist es möglich, die Differenz der continuirlichen Funktionen P und N durch beliebig kleine Größen zu ändern; und weil nur gedachte Differenz in diesem Zwischenraume ihre Zeichen ändert und nicht unendlich werden kann, so muß sie der Null so nahe kommen, als man nur immer will.

Im Falle die zwischen a und b eingeschlossene Wurzel commensurabel ist, hat man genau $P=N$, während für den Fall, daß jene Wurzel incommensurabel ist, die Differenz $P-N$ geringer als jede noch so kleine gegebene Größe gemacht werden kann.

Uebrigens können in dem Intervall von a auf b die Größen P und N mehreremal zusammenfallen, was stattfinden wird, wenn P, welches anfänglich stärker anwachsend als N angenommen wurde, von dem Punkte des Zusammentreffens an, weniger schnell als N zunimmt, was ein neues Zusammentreffen beider Größen möglich macht.

Note V zu §. 73.

Ueber die durch Fourier verbesserte Newtonsche Näherungsmethode.

Die in dem angeführten Paragraphen durch geometrische Untersuchungen gefundenen Resultate lassen sich ebenfalls auf algebraischem Wege ableiten, was zum Theil jetzt geschehen soll. Wir schicken deßhalb folgenden Hülfssatz voraus.

Es sei φx eine beliebige ganze Funktion von x, $\varphi' x$, $\varphi'' x$ .... ihre Derivationen, ferner h ein beliebiger Zuwachs von x. Theilen wir nun h in eine willkührliche Anzahl n gleicher Theile, mithin einer derselben $=\frac{h}{n}$; so haben wir

$$\varphi\left(x+\frac{h}{n}\right)=\varphi x+\frac{h}{n}\left(\varphi' x+\frac{h}{2n}\varphi'' x \ldots\right); \text{ desgleichen}$$

$$\varphi\left(x+\frac{2h}{n}\right)=\varphi\left(x+\frac{h}{n}\right)+\frac{h}{n}\left[\varphi'\left(x+\frac{h}{n}\right)+\frac{h}{2n}\varphi''\left(x+\frac{h}{n}\right)\ldots\right],$$

$$\varphi\left(x+\frac{3h}{n}\right)=\varphi\left(x+\frac{2h}{n}\right)+\frac{h}{n}\left[\varphi'\left(x+\frac{2h}{n}\right)+\frac{h}{2n}\varphi''\left(x+\frac{2h}{n}\right)\ldots\right]$$

u. s. f.

$$\varphi\left(x+\frac{h}{n}\right)=\varphi\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right)$$
$$+\frac{h}{n}\left[\varphi'\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right)+\frac{h}{2n}\varphi''\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right)....\right].$$

Werden alle diese Gleichungen addirt, so kommt

$$\varphi(x+h)-\varphi x=\frac{h}{n}\left[\varphi' x+\varphi'\left(x+\frac{h}{n}\right)+\varphi'\left(x+\frac{2h}{n}\right)....\right.$$
$$\left.+\varphi'\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right)\right]+\frac{h^2}{2n^2}\left[\varphi'' x+\varphi''\left(x+\frac{h}{n}\right)+....\right]+ \text{ꝛc.}$$

Macht man nun n hinlänglich groß, in der Art, daß alle mit $\frac{h^2}{n^2}$ und noch höheren Potenzen von $\frac{h}{n}$ multiplicirten Glieder kleiner als irgend eine kleine Größe δ werden; so hat man

$$\varphi(x+h)-\varphi x=\frac{h}{n}\left[\varphi' x+\varphi'\left(x+\frac{h}{n}\right)+\;...\;\right].$$

Nimmt man in der Summe zur Rechten dieses Ausdruckes statt jedes einzelnen der n Summanden den größten derselben, welcher durch $\varphi' x g[h]$ dargestellt werden mag, so ist

$$\varphi(x+h)-\varphi x<h\cdot\varphi' x g[h].$$

Setzt man dagegen statt jedes einzelnen der n Summanden den kleinsten, welcher in $\varphi' x\cdot k[h]$ seine Darstellung haben mag; so ist

$$\varphi(x+h)-\varphi x>h\cdot\varphi' x k[h].$$

Die Differenz $\varphi(x+h)-\varphi x$ liegt also immer zwischen den Grenzen $h\varphi' x g[h]$ und $h\varphi' x k[h]$, wo $\varphi' x g[h]$ und $\varphi' x k[h]$ den größten und kleinsten aller der Werthe bezeichnen, welche $\varphi' x$ zwischen x und x+h annimmt. Da nun der Uebergang von einem dieser Werthe zu dem andern stetig genommen werden kann, so muß zwischen ihnen ein gewisser Mittelwerth liegen, der mit h multiplicirt, unserer Differenz $\varphi(x+h)-\varphi x$ gleich ist. Bezeichnen wir diesen rechten, jedoch unbekannten Werth durch $\varphi'(x...x+h)$; so haben wir die genaue Gleichung

$$\varphi(x+h)-\varphi x=h\cdot\varphi'(x\;...\;x+h).$$

Es seien nun α und β die beiden Grenzen, zwischen denen eine einzige Wurzel a der Gleichung $fx=0$ liegt; ferner die Derivation $f'x$, $f''x$ so beschaffen, daß sie für alle Werthe von x, die innerhalb der Grenzen α und β liegen, ihr nämliches Vorzeichen behalten, wobei solche übrigens einerlei oder verschieden sein können, während die primitive Funktion f(x) für die beiden Grenzen entgegengesetzte Zeichen hat.

Von der untern Grenze α der Wurzel a ausgehend, haben wir, wenn $a-\alpha=h$ gesetzt wird, $f(\alpha+h)=0$, oder, mit Beziehung auf unsern Hülfssatz, genau $f\alpha+hf'(\alpha\ldots\alpha+h)=0$. Hieraus $a=\alpha-\frac{f\alpha}{f'(\alpha\ldots a)}$, oder, da eine zwischen α und a eingeschlossene Größe auch zwischen α und β liegt, $a=\alpha-\frac{f\alpha}{f'(\alpha\ldots\beta)}\ldots(1)$

Von der andern Grenze β der Wurzel ausgehend, haben wir, wenn $h=\beta-a$ gemacht wird,

$$f\beta-hf'(\beta-h\ldots\beta)=0.\quad \text{Hieraus}$$

$$a=\beta-\frac{f\beta}{f'(a\ldots\beta)}\ \text{oder}\ a=\beta-\frac{f\beta}{f'(\alpha\ldots\beta)}\ldots(2).$$

Der Voraussetzung gemäß besteht nun eine von folgenden vier Zeichenverbindungen:

	f''	f'	f	f''	f'	f	f''	f'	f	f''	f'	f
für $x=\alpha\ldots$	+	+	−	+	−	+	−	+	−	−	−	+
für $x=\beta\ldots$	+	+	+	+	−	−	−	+	+	−	−	−

Wir wollen jetzt diese vier Fälle der Reihe nach einzeln durchgehen.

Im ersten Fall hat man $f'\beta>f'(\alpha\ldots\beta)>f'\alpha$, weil das positive $f'x$ von α bis β im Zunehmen begriffen ist. Denn aus der allgemeinen Gleichung $f'(x+h)=f'x+hf''x+$ &c. geht sofort hervor, daß $f'x$ stets mit x zugleich wächst wenn $f''x$ positiv, hingegen bei dem Wachsen von x abnimmt, wenn $f''x$ negativ ist. Setzt man daher in den Ausdruck (1) des wahren Wurzelwerthes $f'\beta$ statt $f'(\alpha\ldots\beta)$, so wird das daraus entspringende Resultat $\alpha'=\alpha-\frac{f\alpha}{f'\beta}$ kleiner als a sein; es ist aber offenbar $\alpha'>\alpha$, da $f\alpha$ und $f'\beta$ verschiedene Zeichen haben: folglich liegt α' der Wurzel a näher als α, und man hat damit einen dem a näher kommenden Werth erhalten, der jedoch kleiner als der wahre ist.

Vertauschte man dagegen in dem Ausdruck (1) $f'(\alpha\ldots\beta)$ mit $f'\alpha$ so wäre $\alpha'=\alpha-\frac{f\alpha}{f'\alpha}$ größer als a geworden; auch ist wieder $\alpha'>\alpha$: mithin bleibt es unentschieden, ob der letztere Werth α' der Wurzel a näher oder entfernter als α komme, woraus hervorgeht, daß man diesen Werth α' beseitigen und den ersteren Näherungswerth $\alpha'=\alpha-\frac{f\alpha}{f'\beta}$ wählen müsse, von dem man bestimmt weiß, daß er größer als α indessen kleiner als der gesuchte Werth a ist.

Nimmt man ferner $f'\beta$ statt $f'(\alpha \ldots \beta)$ in dem Ausdruck (2) des wahren Wurzelwerthes, so ist das dadurch gewonnene Resultat $\beta' = \beta - \frac{f\beta}{f'\beta}$ größer als a; zugleich ist $\beta' < \beta$, weil $f\beta$ und $f'\beta$ einerlei Zeichen haben: folglich liegt β' der Wurzel a näher als β, und man hat damit einen dem a näher gerückten Werth gefunden, der jedoch größer als der wahre ist. Nähme man dagegen in dem Ausdruck (a) $f'\alpha$ statt $f'(\alpha \ldots \beta)$, so wäre $\beta' = \beta - \frac{f\beta}{f'\alpha}$ kleiner als a geworden; überdem ist auch $\beta' < \beta$: es läßt sich demnach wieder nicht sagen, ob der Werth β' der gesuchten Wurzel a auch wirklich näher liege als β; jener Werth muß daher beseitigt werden.

In dem ersten Falle findet man also in den Ausdrücken

$$\alpha' = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\beta} \text{ und } \beta' = \beta - \frac{f\beta}{f'\beta}$$

zwei Grenzen, zwischen denen der wahre Wurzelwerth liegt und welche zu gleicher Zeit nähere Grenzen als α und β sind.

Wir gehen jetzt zu dem zweiten Fall über. Hier ist der negative Werth von $f'x$ von α bis β fortwährend im Abnehmen begriffen. Setzt man nun in den Ausdruck (1) $f'\alpha$ statt $f'(\alpha \ldots \beta)$, so ist der daraus hervorgehende Werth $\alpha' = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha}$ größer als α und kleiner als a, folglich ein wahrer Näherungswerth. Setzt man ferner $\beta' = \beta - \frac{f\beta}{f'\alpha}$, so wird hier $\beta' < \beta$ und $>$a, folglich ein wahrer Näherungswerth sein. Nähme man hingegen in dem Ausdruck $f'\beta$ statt $f'(\alpha \ldots \beta)$, so würde man nicht mit Sicherheit behaupten können, daß der gefundene Werth α' der Wurzel a näher als α liege, ebenso würde in dem Ausdruck (2) $f'\beta$ statt $f'(\alpha \ldots \beta)$, gesetzt, einen Werth β' geben, von welchem sich nicht bestimmt aussagen läßt, ob er dem gesuchten Wurzelwerthe näher als β komme. Man hat also auch dießmal in den Ausdrücken

$$\alpha' = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha} \text{ und } \beta - \frac{f\beta}{f'\alpha}$$

zwei neue und wirklich nähere Grenzen des gesuchten Wurzelwerthes.

Wir betrachten jetzt den dritten Fall. Hier nimmt der positive Werth von $f'x$ von α bis β fortwährend ab. Es stellt sich bald heraus, daß nur $\alpha' > \alpha$ und $<$a ist, wenn $\alpha' = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha}$; ferner daß nur $\beta' < \beta$ und $>$a, wenn $\beta' = \beta - \frac{f\beta}{f'\alpha}$.

Wir wenden uns endlich zu dem vierten Fall. Hier nimmt der negative Werth von $f'x$ immerfort zu. Man findet $\beta' < \beta$ und $> a$, wenn $\beta' = \beta - \frac{f\beta}{f'\beta}$; ferner $\alpha' > \alpha$ und $< a$, wenn $\alpha' = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\beta}$.

Stellen wir diese vier Resultate zusammen, so führen sie uns zu einer allgemeinen Regel, welche sich folgendermaßen ausdrücken läßt:

Aus der Formel $z - \frac{fz}{f'z}$ lassen sich allemal zwei nähere Grenzwerthe der Wurzel als α und β, zwischen denen dieselbe noch liegt, finden, wenn man in z, fz und $f'z$ einmal α und das andermal β substituirt, wobei in den vorkommenden Funktionen an derjenigen Grenze, bei welcher die Funktionen f und f'' einerlei Zeichen haben, derselbe Grenzwerth α oder β gesetzt wird, während an der anderen Grenze die Funktionen f und f' sich auf verschiedene Grenzwerthe beziehen.

Note VI zu §. 99.

Methode des Herrn Dr. Gräffe zur Auflösung der höheren numerischen Gleichungen.

In einer bei Friedrich Schultheß zu Zürich im Jahr 1837 erschienenen Schrift „die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, als Beantwortung einer von der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aufgestellten Preisfrage“ hat uns Herr Dr. Gräffe, Professor der Mathematik in Zürich, eine sehr einfache Methode zur Auflösung der höheren numerischen Gleichungen überliefert. Die Vorzüge dieser neuen Methode bestehen darin, daß sie nicht nur die reellen, sondern auch die imaginären Wurzeln gibt, daß sie allgemein, sicher und für alle Grade dieselbe ist, und keine schwierige Vorbereitungssätze erheischt, indem dabei nur verlangt wird, daß man die gegebenen Coefficienten der vorgelegten Gleichung mit einander multiplicirt und sie quadrirt, was ohne Weiteres ausgeführt werden kann. Der Herr Verfasser möge uns daher erlauben, die wesentlichen Punkte aus seiner Abhandlung in Bezug auf diese Methode hier mitzutheilen.

Es sei daher die Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0 = 0 \ldots (1).$$

Setzt man in derselben $x = \sqrt{x_1}$, so erhält man, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$x_1^{\frac{n}{2}} + a_{n-2} x_1^{\frac{n-2}{2}} + \ldots + a_2 x_1 + a_0 = - \left\{ a_{n-1} x_1 a_n^{\frac{n-2}{2}} + a_{n-3} x_1 a_n^{\frac{n-4}{2}} \ldots + a_1 \right\} \sqrt{x_1}.$$

Für den Fall, daß n eine ungerade Zahl ist, bekommt man ein ähnliches Resultat, nur erscheint alsdann $\sqrt{x}$; auf der andern Seite des Gleichheitszeichens als Faktor. Erhebt man auf beiden Seiten der Gleichung aufs Quadrat, so findet man in beiden Fällen, nachdem Alles auf eine Seite gebracht worden:

$$x_1^n+[-a^2_{n-1}+2a_{n-2}]x_1^{n-1}+[+a^2_{n-2}-2a_{n-1}\,a_{n-3}+2a_{n-4}]x_1^{n-2}\ldots\ldots$$
$$+(-1)^p[a^2_{n-p}-2a_{n-p+1}a_{n-p-1}+2a_{n-p+2}a_{n-p-2}\ldots.]x_1^{n-p}\ldots.$$
$$+(-1)^{n-2}[a^2_2-2a_3a_1+2a_4a_0]x_1^2+(-1)^{n-1}[a_1^2-2a_2a_0]x_1$$
$$+(-1)^na^2_0=0\ \ldots\ (2),$$

wobei die Zeiger nicht unter 0 und nicht über n gehen.

Für $n=3$ ist: $x^3_1+(-a^2_2+2a_1)x^2_1+(a^2_1-2a_2a_0)x_1-a^2_0=0$;

für $n=4$ ist: $x^4_1+(-a^2_3+2a_2)x^3_1+(a^2_2-2a_3a_1+2a_0)x^2_1$
$$+(-a^2_1+2a_2a_0)x_1+a^2_0=0$$

für $n=5$ ist: $x^5_1+(-a^2_4+2a_3)x^4_1+(a^2_3-2a_4a_2+2a_1)x^3_1$
$$_1+(-a^2_2+2a_3a_1-2a_4a_0)x^2_1+(a^2_1-2a_2a_0)x_1-a^2_0=0;$$
u. s. f.

Das Bildungsgesetz der Gleichung (2), welche ebenfalls vom nten Grade ist, wäre demnach als bekannt zu betrachten.

Dieß vorausgesetzt, gehen wir nun von der gegebenen Gleichung

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}\ldots+A_{n-1}x+A_n=0\ \ldots\ (3)$$

aus, und leiten aus derselben nach der oben ausgesprochenen Regel eine neue Gleichung ab; so hat diese die Form:

$$x_1^n+B_1x_1^{n-1}+B_2x_1^{n-2}\ldots+B_{n-1}x_1+B_n=0.$$

Verfährt man mit dieser auf ähnliche Weise, so bekommt man die Gleichung:

$$x_2^n+C_1x_2^{n-1}+C_2x_2^{n-2}\ldots+C_{n-1}x_2+C_n=0;\ \text{u. s. w.}$$

Es handelt sich jetzt darum, zu untersuchen, was sich aus dieser fortgesetzten Quadrirung der Wurzeln unserer primitiven Gleichung ergibt. Wir stellen diese Wurzeln durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ dar, und betrachten solche als combinatorische Elemente, was uns, wenn die Combinationsformen mit $[(2\cdots n)C_p]$ bezeichnet werden, folgende Relationen liefert

$$A_1=-[(1\cdots n)C_1]=-\alpha_1-[(2\cdots n(C_1],$$
$$A_2=+[(1\cdots n)C_2]=\alpha_1[(2\cdots n)C_1]+[(2\cdots n)C_2],$$
$$A_3=-[(1\cdots n)C_3]=-\alpha_1[(2\cdots n)C_2]-[(2\cdots n)C_3],$$
$$A_p=(-1)^p[(1\cdots n)C_p]=(-1)^p\alpha_1[(2\cdots n)C_{p-1}]+(-1)^p[(2\cdots n)C_p].$$

Es bieten sich nun mehrere Fälle dar:

I. Nehmen wir vorerst die Wurzel α, reell und größer als jede der übrigen an, so erlangen, bei diesem successiven Quadriren, die ersten der beiden Bestandtheile, in welche die Coefficienten zerlegt worden sind, einen überwiegenden Werth über die zweiten, in der Art, daß, bei einer hinreichenden Anzahl von Potenzirungen, wenn die Coefficienten numerisch berechnet werden, auf die ersten Ziffern derselben diese letzteren Bestandtheile keinen Einfluß mehr haben. Nach m solchen Operationen, wo $r=2^m$ ist, erhalten wir demnach den Ausdruck:

$$x^n - \alpha_1{}^r x^{n-1} + \alpha_1{}^r [(2\cdots n)C_1]x^{n-2} - \alpha_1{}^r [(2\cdots n)C_2]x^{n-3} \ldots + (-1)^n \alpha^r{}_1 [(2\cdots n)C_{n-1}] \ldots (4),$$

wobei sich die Combinationsformen auf die Elemente $\alpha^r{}_2, \alpha^r{}_3 \ldots \alpha^r{}_n$ beziehen. Wenden wir auf die zweitgrößte Wurzel α_2, wenn solche reell ist, mit Bezug auf die Größen

$$[(2\cdots n)C_1]\cdots[(2\cdots n)C_{n-1}]$$

ganz die vorige Schlußweise an; so bekommen wir den Ausdruck:

$$x^n - \alpha_1{}^r x^{n-1} + \alpha_1{}^r \alpha_2{}^r x^{n-2} - \alpha_1{}^r \alpha_2{}^r [(3\cdots n)C_1]x^{n-3} \ldots . + (-1)^n \alpha_1{}^r \alpha_2{}^r [(3\cdots n)C_{n-2}];$$

und endlich, wenn alle Wurzeln reell und von verschiedener Größe sind, den Ausdruck:

$$x^n - \alpha_1{}^r x^{n-1} + \alpha_1{}^r \alpha_2{}^r x^{n-2} - \alpha_1{}^r \alpha_2{}^r \alpha_3{}^r x^{n-3} \ldots + (-1)^n \alpha_1{}^r \alpha_2{}^r \ldots \alpha^r{}_n \ldots (5).$$

Bei solcher Annahme über die Beschaffenheit der Wurzeln werden also im Verlaufe der Rechnungen die Coefficienten der folgenden Gleichung sich immer mehr den Quadraten der unmittelbar vorhergehenden Gleichung nähern, und endlich quadratisch wachsen, wie es der Ausdruck (5) verlangt. Zieht man hierauf aus jedem Coefficienten die rte Wurzel und dividirt jeden folgenden durch den nächstvorhergehenden, so erhält man die absoluten Zahlenwerthe der Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Man nimmt bei diesen Wurzelausziehungen bloß die reellen Wurzeln und bestimmt ihre Zeichen durch Substitution der nächsten Grenzwerthe. Auch kann man bei der numerischen Berechnung sich der logarithmischen Tafeln bedienen, insofern man mit der durch die Grenzen derselben bedingten Genauigkeit zufrieden ist.

II. Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem die beiden größten Wurzeln α_1 und α_2 gleich groß sind, wobei sie übrigens mit demselben oder entgegengesetzten Zeichen versehen sein können, da dieser Zeichenunterschied bei der Quadrirung verschwindet.

Man hat alsdann:

$A_1 = -(\alpha_1+\alpha_2)-[(3\cdots n)C_1]$.

$A_2 = \alpha_1\alpha_2+(\alpha_1+\alpha_2)[(3\cdots n)C_1]+[(3\cdots n)C_2]$,

$A_3 = -\alpha_1\alpha_2[(3\cdots n)C_1]-(\alpha_1+\alpha_2)[(3\cdots n)C_2]-[(3\cdots n)C_3]$,

$A_p = (-1)^p\,\alpha_1\alpha_2[(3\cdots n)C_{p-2}]+(-1)^p(\alpha_1+\alpha_2)[(3\cdots n)C_{p-1}]+(-1)^p$
$[(3\cdots n)C_p]$.

Bei fortgesetzter Quadrirung werden auch hier überall die zwei letzten der drei Bestandtheile, in welche jetzt die Coefficienten zerlegt worden sind, gegen die ersteren verschwinden, was uns nach m Operationen den Ausdruck gibt:

$$x^n-(\alpha_1{}^r+\alpha_2{}^r)x^{n-1}+\alpha_1{}^r\alpha_2{}^r x^{n-2}\ldots+(-1)^n\alpha_1{}^r\alpha_2{}^r[(3\cdots n)C_{n-2}].$$

Der erste Coefficient ist im vorliegenden Falle $=2\alpha_1{}^r$, die Hälfte desselben wächst also quadratisch, was das Merkmal für die beiden größten Würzeln von gleichem absolutem Werthe ist. Der zweite Coefficient $=\alpha_1{}^{2r}$ wächst dagegen, bei hinlänglicher Größe von r, quadratisch, was ein Zeichen abgibt, daß in Beziehung auf diese Wurzeln die Quadrirung nicht weiter fortgesetzt zu werden braucht.

III. Wir gehen jetzt zu dem Fall über, in welchem die Wurzeln α_1 und α_2 imaginär sind, nämlich $\alpha_1=\varrho\,(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})$ und $\alpha_2=\varrho(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1})$, wo der Modul ϱ jede der reellen Wurzeln und jeden Modul ϱ' der andern imaginären Wurzeln an Größe übertrifft. (Siehe Note 7).

Nach m Operationen kommt der Ausdruck:

$$x^n-2\varrho^{2r}\cdot\cos r\varphi\cdot x^{n-1}+\varrho^{2r}x^{n-2}-\varrho^{2r}[(3\cdots n)C_1]x^{n-3}\ldots$$

Der erste Coefficient wächst also bei dieser Beschaffenheit der Wurzeln rücksichtlich seiner Hälfte nicht mehr quadratisch, was ein Merkmal für unsere zwei conjugirten imaginären Wurzeln liefert. Zugleich bestimmt der zweite Coefficient den Modul dieser Wurzeln, wozu wir den Winkel nachher suchen wollen.

IV. Machen wir in Bezug auf die dritte größte reelle Wurzel α_3 und auf die Größen $[(3\cdots n)C_1)\ldots[(3\cdots n)C_{n-2}]$, wo sich die Zeiger auf die Elemente $\alpha_3{}^r$, $\alpha_4{}^r\ldots\alpha_n{}^r$ beziehen, ganz die nämlichen Schlüsse, welche oben in Bezug auf α_1, α_2 und die Größen $[(1\cdots n)C_1]\ldots.$ $[(1\cdots n)C_n]$ gemacht worden sind; so gilt von den Wurzeln α_3, α_4 dasselbe, was wir oben von α_1 und α_2 ausgesagt haben, d. h., sie sind unter ähnlichen Bedingungen dem absoluten Werth nach gleich oder conjugirte imaginäre Wurzeln. Auf diese Weise fährt man fort zu schließen,

bis sämmtliche reelle Wurzeln und die Moduli aller imaginären Wurzeln gefunden sind.

V. Sind die drei größten Wurzeln α_1, α_2, α_3 gleich groß, so haben nach m Quadrirungen die drei ersten Coefficienten die Form: $-3\alpha_1^r$, $+3\alpha_1^{2r}$ und $-\alpha_1^{3r}$, welches als Kennzeichen fur diesen Umstand dient. Besteht eine solche Form nicht, so gibt es eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Der letzte jener drei Coefficienten bestimmt entweder die dreifache Wurzel α_1, abgesehen vom Zeichen, oder die Wurzel α_1 und den Modul α^2_1 . . . Hat α_1 nicht den größten Werth unter den Wurzeln, so erscheint $-\alpha_1^{3r}$ erst in einem späteren Coefficienten; u. s. w.

VI. Wir schreiten jetzt zur Auffindung des jedem Modul correspondirenden Winkels, worauf dann die beiden Theile der imaginären Wurzeln bestimmt werden können. Enthält die Gleichung (3) nur ein Paar imaginärer Wurzeln, so wird für den gefundenen Werth ϱ_1 der zugehörige Winkel aus der bekannten Relation $2\varrho_1 \cos\varphi_1 + S = -A_1$ hergeleitet, wo S die Summe der reellen Wurzeln darstellt. Besitzt die Gleichung (3) zwei Paare imaginärer Wurzeln, deren Moduli ϱ_1 und ϱ_2 sind, so dienen zur Bestimmung von φ_1 und φ_2 die Relationen:

$$2\varrho_1 \cos\varphi_1 + 2\varrho_2 \cos\varphi_2 + S = -A,$$

$$\frac{2\cos\varphi_1}{\varrho_1} + \frac{2\cos\varphi_2}{\varrho_2} + S_1 = -\frac{A_{n-1}}{A_n},$$

wo S seine vorige Bedeutung hat, und S_1 die Summe der reellen reciprocken Wurzeln bezeichnet. Kommen aber mehr als vier imaginäre Wurzeln vor, so berechnet Herr Dr. Gräffe dieselben folgendermaßen: Angenommen also, daß die vorgelegte Gleichung q Paare imaginärer Wurzeln besitze, deren Moduli ϱ_1, ϱ_2, $\varrho_3 \ldots \varrho_q$ seien und zwar ihrer Größe nach absteigend geordnet, mithin $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 \ldots > \varrho_q$. Der erwähnte Mathematiker sucht dann eine Zahl k auf, welche zu jeder Wurzel hinzugefügt, keine Aenderung in der Rangfolge sämmtlicher imaginären Wurzeln hervorbringt. Nimmt man nämlich die beiden Wurzelpaare

$$a_p \pm b_p\sqrt{-1} \text{ und } a_{p+1} \pm b_{p+1}\sqrt{-1},$$

deren Moduli bezüglich ϱ_p und ϱ_{p+1} sind, und addirt ferner zu jeder Wurzel die Größe $\frac{u}{m}$, wo $u = \varrho^2_p - \varrho^2_{p+1}$ und m eine noch unbestimmte Zahl ist; so werden diese beiden Wurzelpaare in

$$a_p + \frac{u}{m} \pm b_p\sqrt{-1} \text{ und } a_{p+1} + \frac{u}{m} \pm b_{p+1}\sqrt{-1}$$

übergehen, welche neue Wurzeln die Größen

$$r^2_p = \varrho^2_p + \frac{2u}{m} a_p + \frac{u^2}{m^2} \text{ und } r^2_{p+1} = \varrho^2_{p+1} + \frac{2u}{m} a_{p+1} + \frac{u^2}{m^2}$$

zu Moduli haben. Damit nun $r^2_p > r^2_{p+1}$ werde, muß $m > 2(a_{p+1} - a_p)$ sein, was erreicht wird, wenn man $m = 2(\varrho_{p+1} + \varrho_p)$ setzt, weil offenbar

$$\varrho_{p+1} + \varrho_p > a_{p+1} - a_p.$$

Die Rangfolge der Moduli ϱ_p und ϱ_{p+1} wird also nicht geändert, wenn man $\frac{u}{m} = \frac{\varrho_p - \varrho_{p+1}}{2}$ nimmt. Wählt man jetzt k, die kleinste Zahl unter den durch die Moduli $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_q$ gebotenen Ausdrücken $\frac{\varrho_p - \varrho_{p+1}}{2}$ und fügt diese zu jeder Wurzel hinzu; so wird dadurch die Reihenfolge aller imaginären Wurzeln nicht gestört.

Durch die Substitution von $z - k$ für x in die ursprüngliche Gleichung entsteht hiernach die Hülfsgleichung

$$z^n + B_1 z^{n-1} + \ldots + B_1 = 0,$$

aus welcher die Moduli $r_1, r_2 \ldots r_1$ durch Quadrirung der Wurzeln in der nämlichen Ordnung zum Vorschein kommen, in welcher die entsprechenden Moduli $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_q$ aus der primitiven Gleichung hervorgegangen sind. Zur Bestimmung der beiden Theile a_p und b_p jedes Wurzelpaares bestehen dahet allgemein die beiden Relationen:

$$a_p = \frac{r^2_p - \varrho^2_p - k^2}{2k} \text{ und } b_p = \sqrt{(\varrho^2_p - a^2_p)}. \text{ (Siehe Note 7).}$$

Das oben Vorgetragene mögen nun folgende zwei von Herrn Dr. Gräffe gewählte Beispiele erläutern:

I. Es sei die Gleichung:

$$x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 19x + 10 = 0.$$

Durch successives Quadriren der Wurzeln findet man:

2te Potenz, $x^4 + x^3 - x^2 - 101x + 100 = 0$

4te ....., $x^4 - 3x^3 + 403x^2 - 10401x + 10000 = 0.$

Bei den folgenden sind statt der Coefficienten deren Briggische Logarithmen genommen worden:

8te Potenz, $x^4 + 2{,}9014583x^3 + 5{,}0791921x^2 - 8{,}0005243x + 8{,}0000000$

16te ..., $x^4 - 5{,}5968202x^3 + 11{,}2410312x^2 - 16{,}0000076x + 16{,}0000000$

32te ..., $x^4 + 11{,}2837560x^3 + 22{,}3510053x^2 - 32{,}0000000x + 32{,}0000000$

64te ..., $x^4 + 21{,}8996504x^3 + 44{,}7339617x^2 - 64{,}0000000x + 64{,}0000000$

128te ..., $x^4 + 45{,}0089883x^3 + 89{,}4681581x^2 - 128{,}0000000x + 128{,}0000000.$

Der zweite Coefficient wächst jetzt quadratisch, folglich

$$\log \varrho^2 = \frac{89{,}4681581}{128} = \log 5.$$

Die folgenden Coefficienten wachsen auch quadratisch, also

$$\log \alpha_3 = \frac{128-89{,}4681581}{128} = \log 2;$$

$$\text{ferner } \log \alpha_4 = \frac{128-128}{128} = \log 1.$$

Man hat demnach $\alpha_3 = +2$ und $\alpha_4 = +1$.

Außerdem ist $2\varrho \cos\varphi + 2 + 1 = +5$; hieraus

$\alpha_1 = 1 + 2\sqrt{-1}$ und $\alpha_2 = 1 - 2\sqrt{-1}$.

II. Es sei die Gleichung $x^6 - x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x + x + 1 = 0$.

Durch Quadrirung der Wurzeln entstehen die Ausdrücke:

2te Potenz, $x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 14x^2 + 3x + 1 = 0$

4te ..., $x^6 - 5x^5 + 14x^4 + 31x^3 + 182x^2 + 19x + 1 = 0$

8te ..., $x^6 + 3x^5 + 870x^4 + 4327x^3 + 31974x^2 + 3x + 1 = 0$.

Bei den folgenden stehen statt der Coefficienten deren Logarithmen:

16te Potenz, $x^6 + 3{,}2382971x^5 + 5{,}9003048x^4 + 7{,}5671654x^3$
$+ 9{,}0095836x^2 + 4{,}8057658x + 0{,}0000000$

32te ..., $x^6 - 6{,}1481672x^5 + 11{,}7042359x^4 + 14{,}4195610x^3$
$- 18{,}0191653x^2 - 9{,}3103897x + 0{,}0000000$

64te ..., $x^6 - 11{,}9851090x^5 + 23{,}4097269x^4 + 29{,}9951188x^3$
$+ 36{,}038306\ x^2 + 46{,}8194664x^4$

128te ...,

Diese Gleichung hat 6 imaginäre Wurzeln und man findet für die Moduli ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 die Relationen:

$\log \varrho_1^{256} = 46{,}8194664$, woraus $\varrho_1^2 = 2{,}3215448$;

$\log (\varrho_1\varrho_2)^{128} = 36{,}0383306$ und $\log(\varrho_1\varrho_2\varrho_3) = 0{,}0000000$, woraus

$\varrho_2^2 = 1{,}5751498$ und $\varrho^2_3 = 0{,}2734646$.

Man kann $k = 0{,}1$ setzen, was die Hülfsgleichung

$z^6 - 1{,}6z^5 + 2{,}65z^4 - 3{,}92z^3 + 3{,}0315z^2 + 0{,}50144z + 0{,}923211 = 0$ gibt.

Durch Quadriren der Wurzeln findet man hieraus:

2te Potenz, $z^6 + 2{,}74z^5 + 0{,}5415z^4 + 4{,}15158z^3 + 18{,}014300z^2 + 5{,}345986z$
$+ 0{,}85231855$.

In den folgenden sind statt der Coefficienten deren Logarithmen genommen:

4te Potenz: $z^6 - 0{,}8078461 z^5 + 1{,}1326171 z^4 - 1{,}4034208 z^3 + 2{,}4487829 z^2$
$+ 0{,}3280267 z + 0{,}8612040 - 1$

8te „ $z^6 - 1{,}1503393 z^5 + 2{,}6242469 z^4 + 3{,}8460997 z^3 + 4{,}8982662 z^2$
$+ 2{,}6061726 z + 0{,}7224080 - 1$

16te „ $z^6 + 2{,}8076605 z^5 + 5{,}7273510 z^4 + 7{,}2404349 z^3 + 9{,}7961391 z^2$
$- 4{,}9006718 z$

32te „ $z^6 + 5{,}8163275 z^5 + 11{,}4394458 z^4 + 15{,}8043751 z^3$
$+ 19{,}5922782 z^2$

64te „ $z^6 + 11{,}0825985 z^5 + 22{,}8286066 z^4 - 31{,}2811548 z^3$
$+ 45{,}6576549 z^4.$

Hieraus $\log r_1^{256} = 45{,}6576549$, folglich $\log r^2 = 0{,}3567004$
$\log (r_1 r_2)^{32} = 9{,}7961391$ $\log r_2^2 = 0{,}2555583$
$\log (r_1 r_2 r_3)^8 = 0{,}8612040 - 1$ $\log r_3^2 = 0{,}3530423 - 1.$

Man findet ferner $a_1 = \frac{r_1^2 - \varrho_1^2 - 0{,}01}{0{,}2} = -0{,}2900815$ und hieraus
$b_1 = 1{,}495755;$

$$a_2 = \frac{r_2^2 - \varrho_2^2 - 0{,}01}{0{,}2} = +1{,}0801755 \ldots b_2 = 0{,}639039;$$

$$a_3 = \frac{r_3^2 - \varrho_3^2 - 0{,}01}{0{,}2} = -0{,}2900935 \ldots b_3 = 0{,}435098;$$

Die drei Paare imaginärer Wurzeln unserer Gleichung sind also:

$$-0{,}2900815 \pm 1{,}495755\sqrt{-1}$$
$$+1{,}0801755 \pm 0{,}639039\sqrt{-1}$$
$$-0{,}2900935 \pm 0{,}435098\sqrt{-1}.$$

Hinsichtlich anderweitiger interessanter Bemerkungen, welche die Methode des Herrn Dr. Gräffe darbietet, verweisen wir den Leser auf die Schrift selbst. Man findet in derselben zugleich die Principien angeführt, auf welche sich einige andere Methoden zur Berechnung der imaginären Wurzeln, und die Auflösungsweise der numerischen Gleichungen durch die recurrirenden Reihen stützen.

Note VII. zu §. 111.

Von den imaginären Ausdrücken.

I. Von den Modulis und reducirten Ausdrücken.

Jeder imaginäre Ausdruck $a + bi$, wo der Kürze wegen $\sqrt{(-1)}$ durch i bezeichnet worden, läßt sich auf die Form $\varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

bringen, wo ϱ eine positive Größe und φ einen reellen Bogen darstellt. Setzt man nämlich $a+bi=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, oder was dasselbe ist, $a=\varrho\cos\varphi$, $b=\varrho\sin\varphi$; so bekommt man

$$\varrho=\sqrt{(a^2+b^2)},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

auf welche Weise der Werth von ϱ und der von φ bestimmt ist. Cauchy nennt ϱ den Modul des imaginären Ausdruckes, den andern Faktor $\cos\varphi+i\sin\varphi$ oder $\cos(2n\pi+\varphi)+i\sin(2n\pi+\varphi)$, wo n jede ganze Zahl bedeutet, hingegen den reducirten Ausdruck. Da die Rechnung mit imaginären Ausdrücken durch das Zurückführen auf ihre Moduli und reducirte Ausdrücke sehr vereinfacht wird, so wollen wir nach Cauchy die wichtigsten Eigenschaften der letztern in Kürze hier zusammenstellen.

1) Um mehrere reducirte Ausdrücke $\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\cos\varphi'+i\sin\varphi'$, $\cos\varphi''+i\sin\varphi''$ ... mit einander zu multipliciren, braucht man nur die Summe der einzelnen Bogen $\varphi, \varphi', \varphi''$ ... statt φ in die Formel $\cos\varphi+i\sin\varphi$ zu setzen. Man erhält in der That

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi'),$$ ferner
$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi'+i\sin\varphi')(\cos\varphi''+i\sin\varphi'')=\cos(\varphi+\varphi'+\varphi'')+i\sin(\varphi+\varphi'+\varphi'');$$ u. s. w.

Sind die n Bogen $\varphi, \varphi', \varphi''$ ... alle unter einander gleich, so entsteht die bekannte, von Moivre zuerst gefundene Formel:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

2) Um den reducirten Ausdruck $\cos\varphi+i\sin\varphi$ durch den Ausdruck $\cos\varphi'+i\sin\varphi'$ zu dividiren, braucht man nur den Bogen φ' von dem Bogen φ zu subtrahiren und diese Differenz für φ in die Formel $\cos\varphi+i\sin\varphi$ zu substituiren. Es sei nämlich x der gesuchte Quotient, mithin

$$x=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi'+i\sin\varphi'}.$$

Hieraus entspringt

$$x(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$ oder
$$x(\cos\varphi'+i\sin\varphi')(\cos\varphi'-i\sin\varphi')=(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi'-i\sin\varphi'),$$ oder
$$x=(\cos\varphi+i\sin\varphi)[\cos(-\varphi')+i\sin(-\varphi')],$$ oder endlich
$$x=\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi').$$

Setzt man in der letztern Formel $\varphi=0$, so findet man

$$\frac{1}{\cos\varphi'+i\sin\varphi'}=\cos\varphi'-i\sin\varphi'.$$

3) Um den reducirten Ausdruck $\cos\varphi+i\sin\varphi$ auf die $(-n)$te Potenz zu erheben, wo n eine beliebige ganze Zahl darstellt, braucht man nur

den Bogen mit — n zu multipliciren. Man hat in der That

$$\cos(\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} =$$
$$\cos n\varphi - i\sin n\varphi = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi).$$

4) Es hat nun nicht die geringste Schwierigkeit, dieselben Operationen mit den imaginären Ausdrücken von der Form $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ zu verrichten, weil dabei mit dem reellen Faktor ganz nach den gewöhnlichen Regeln zu verfahren ist.

II. Von den verschiedenen Werthen der Ausdrücke

$$[+1]^{\frac{m}{n}} \text{ und } [-1]^{\frac{m}{n}}.$$

Es gelten hier m und n als Primzahlen unter sich. Da die nte Wurzel von a mehrere Auflösungen hat, so wollen wir im folgenden, wenn von irgend einer Wurzel ohne Unterschied die Rede ist, uns der Bezeichnung $[a]^{\frac{1}{n}}$ bedienen, während das Zeichen $\sqrt[n]{a}$ den einzigen absoluten Werth dieser Wurzel darstellen soll.

1) Die erste Aufgabe sei nun, die verschiedenen Werthe des Ausdruckes $[+1]^{\frac{m}{n}}$ zu finden. Dem oben angeführten Paragraphen gemäß besteht die Gleichung

$$[+1]^{\frac{m}{n}} = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^m; \text{ hieraus}$$
$$[+1]^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m \cdot 2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{m \cdot 2k\pi}{n}.$$

Um die verschiedenen Werthe von $[+1]^{\frac{m}{n}}$ zu erhalten, muß man nach und nach statt k alle Zahlen zwischen 0 und $\frac{n}{2}$ setzen. Hierbei liefern zwei ungleiche Werthe k′ und k″ von k innerhalb dieser Grenzen auch zwei verschiedene Werthe von $\cos\frac{m \cdot 2k\pi}{n}$. Denn $\cos\frac{m \cdot 2k'\pi}{n}$ und $\cos\frac{m \cdot 2k''\pi}{n}$ können nur dann einander gleich sein, insofern die Gleichung

$$\frac{m \cdot 2k'\pi}{n} = 2h\pi + \frac{m \cdot 2k''\pi}{n}$$

besteht, wo h eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Diese Gleichung

gibt $h = m\frac{(k'-k'')}{n}$, d. h. $(k'-k'')$ muß, weil m und n Primzahlen unter sich sind, durch n theilbar sein, was nicht möglich ist, da die Zahlen k' und k'', von denen keine die Zahl $\frac{1}{2}n$ übertrifft, einander ungleich sind. Die Anzahl der Werthe des Ausdruckes $[+1]^{\frac{m}{n}}$ stimmt also mit jener der Wurzelwerthe von $[+1]^{\frac{1}{n}}$ überein.

Offenbar ist aber auch

$\cos\left(\frac{m\cdot 2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{m\cdot 2k\pi}{n}\right)^n = \cos m\cdot 2k\pi \pm i \sin m\cdot 2k\pi = 1$; woraus hervorgeht, daß jeder Werth von $[+1]^{\frac{m}{n}}$ einem Werthe von $[+1]^{\frac{1}{n}}$ gleich ist.

2) Die verschiedenen Werthe des Ausdruckes $[+1]^{-\frac{m}{n}}$ zu finden. Man hat

$$[+1]^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{[+1]^{\frac{m}{n}}} = \cos\frac{m\cdot 2k\pi}{n} \mp i \sin \frac{m\cdot 2k\pi}{n}.$$

Hieraus folgt, daß die verschiedenen Werthe von $[+1]^{-\frac{m}{n}}$ mit denen von $[+1]^{\frac{1}{n}}$ übereinstimmen.

3) Die verschiedenen Werthe von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ zu finden. Man hat

$$[-1]^{\frac{m}{n}} = \left[\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm i \sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi\right]^m =$$
$$\cos\cdot m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm i \sin m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi.$$

In dieser Gleichung muß man nach und nach für $2k+1$ alle ganzen und ungeraden Zahlen zwischen 0 und n setzen, wenn man alle Werthe von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ erhalten will.

Da für zwei verschiedene Werthe von $2k+1$ innerhalb dieser Grenzen sich auch zwei verschiedene Werthe von $\cos m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi$ ergeben, was sich auf eine ähnliche Weise, wie hier oben in (1) geschehen, darthun

läßt; so stimmt die Anzahl der Werthe von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ mit der Zahl der Wurzelwerthe von $[-1]^{\frac{1}{n}}$ überein.

Ferner ist auch

$$\left[\cos m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm i \sin m \left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi\right]^n$$
$$= \cos m(2k+1)\pi \pm i \sin m(2k+1)\pi = (-1)^m = \pm 1.$$

Hieraus folgt, daß jeder Werth von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ auch ein Werth von $[+1]^{\frac{1}{n}}$ oder von $[-1]^{\frac{1}{n}}$ ist, je nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl ist.

4) Die verschiedenen Werthe von $[-1]^{-\frac{m}{n}}$ zu finden. Man hat

$$[-1]^{-\frac{m}{n}} = \cos m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \mp i \sin m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi.$$

Hieraus folgt, daß die verschiedenen Werthe von $[-1]^{-\frac{m}{n}}$ mit denen von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ übereinstimmen.

III. Von den Wurzeln aus imaginären Ausdrücken.

1) Die verschiedenen Werthe von $[a+bi]^{\frac{1}{n}}$ zu finden.

Es sei $x=r(\cos t + i \sin t)$ einer der gesuchten Wurzelwerthe, wo r eine positive Größe und t einen reellen Bogen bedeutet. Man hat

$$x^n = a+bi = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi), \text{ oder}$$
$$r^n(\cos nt + i \sin nt) = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Hieraus

$$r^n = \varrho, \ \cos nt + i \sin nt = \cos\varphi + i \sin\varphi, \text{ oder}$$
$$r = \varrho^{\frac{1}{n}}, \ t = \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n},$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Man hat demnach

$$x = \varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi \pm 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi \pm 2k\pi}{n}\right)\right] =$$
$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}\right) =$$
$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right)[+1]^{\frac{1}{n}}.$$

gibt $h = m\frac{(k'-k'')}{n}$, d. h. $(k'-k'')$ muß, weil m und n Primzahlen unter sich sind, durch n theilbar sein, was nicht möglich ist, da die Zahlen k' und k'', von denen keine die Zahl $\frac{1}{2}n$ übertrifft, einander ungleich sind. Die Anzahl der Werthe des Ausdruckes $[+1]^{\frac{m}{n}}$ stimmt also mit jener der Wurzelwerthe von $[+1]^{\frac{1}{n}}$ überein.

Offenbar ist aber auch

$\cos\left(\frac{m\cdot 2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{m\cdot 2k\pi}{n}\right)^n = \cos m\cdot 2k\pi \pm i\sin m\cdot 2k\pi = 1$; woraus hervorgeht, daß jeder Werth von $[+1]^{\frac{m}{n}}$ einem Werthe von $[+1]^{\frac{1}{n}}$ gleich ist.

2) Die verschiedenen Werthe des Ausdruckes $[+1]^{-\frac{m}{n}}$ zu finden. Man hat

$$[+1]^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{[+1]^{\frac{m}{n}}} = \cos\frac{m\cdot 2k\pi}{n} \mp i\sin\frac{m\cdot 2k\pi}{n}.$$

Hieraus folgt, daß die verschiedenen Werthe von $[+1]^{-\frac{m}{n}}$ mit denen von $[+1]^{\frac{1}{n}}$ übereinstimmen.

3) Die verschiedenen Werthe von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ zu finden. Man hat

$$[-1]^{\frac{m}{n}} = \left[\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm i\sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi\right]^m =$$
$$\cos\cdot m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm i\sin m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi.$$

In dieser Gleichung muß man nach und nach für $2k+1$ alle ganzen und ungeraden Zahlen zwischen 0 und n setzen, wenn man alle Werthe von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ erhalten will.

Da für zwei verschiedene Werthe von $2k+1$ innerhalb dieser Grenzen sich auch zwei verschiedene Werthe von $\cos m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi$ ergeben, was sich auf eine ähnliche Weise, wie hier oben in (1) geschehen, darthun

läßt; so stimmt die Anzahl der Werthe von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ mit der Zahl der Wurzelwerthe von $[-1]^{\frac{1}{n}}$ überein.

Ferner ist auch

$$\left[\cos m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm i \sin m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi\right]^n$$
$$= \cos m(2k+1)\pi \pm i \sin m(2k+1)\pi = (-1)^m = \pm 1.$$

Hieraus folgt, daß jeder Werth von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ auch ein Werth von $[+1]^{\frac{1}{n}}$ oder von $[-1]^{\frac{1}{n}}$ ist, je nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl ist.

4) Die verschiedenen Werthe von $[-1]^{-\frac{m}{n}}$ zu finden. Man hat

$$[-1]^{-\frac{m}{n}} = \cos m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \mp i \sin m\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi.$$

Hieraus folgt, daß die verschiedenen Werthe von $[-1]^{-\frac{m}{n}}$ mit denen von $[-1]^{\frac{m}{n}}$ übereinstimmen.

III. Von den Wurzeln aus imaginären Ausdrücken.

1) Die verschiedenen Werthe von $[a+bi]^{\frac{1}{n}}$ zu finden.

Es sei $x = r(\cos t + i \sin t)$ einer der gesuchten Wurzelwerthe, wo r eine positive Größe und t einen reellen Bogen bedeutet. Man hat

$$x^n = a+bi = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi), \text{ oder}$$
$$r^n(\cos nt + i \sin nt) = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Hieraus

$$r^n = \varrho, \ \cos nt + i \sin nt = \cos\varphi + i \sin\varphi, \text{ oder}$$
$$r = \varrho^{\frac{1}{n}}, \ t = \frac{\varphi \pm 2k\pi}{n},$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Man hat demnach

$$x = \varrho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi \pm 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi \pm 2k\pi}{n}\right)\right] =$$
$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}\right) =$$
$$\varrho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right)[+1]^{\frac{1}{n}}.$$

Ebenso findet man:

$$[a+bi]^{-\frac{1}{n}}=\varrho^{-\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n}-i\sin\frac{\varphi}{n}\right)[+1]^{-\frac{1}{n}}.$$

2) Die verschiedenen Werthe von $[a+bi]^{\frac{m}{n}}$ zu finden. Man hat

$$[a+bi]^{\frac{m}{n}}=\left[[a+bi]^{\frac{1}{n}}\right]^{m}=\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)[+1]^{\frac{m}{n}}.$$

Ebenso ist

$$[a+bi]^{-\frac{m}{n}}=\varrho^{-\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}-i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)[+1]^{-\frac{m}{n}}$$

IV. Uebereinstimmung der Werthe von $[a]^{\frac{1}{n}}\times[b]^{\frac{1}{n}}$ mit denen von $[ab]^{\frac{1}{n}}$.

Da jeder von den Ausdrücken $[a]^{\frac{1}{n}}$, $[b]^{\frac{1}{n}}$, n verschiedene Werthe hat, so scheint es auf den ersten Anblick, als wenn das Produkt $[a]^{\frac{1}{n}}\times[b]^{\frac{1}{n}}$, n^2 verschiedene Werthe zuließe, während der Ausdruck $[ab]^{\frac{1}{n}}$, mit welchem jenes Produkt gleichbedeutend ist, nur n verschiedene Wurzelwerthe liefert. Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, bemerken wir, falls n eine gerade Zahl ist, daß man hat:

$$[a]^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

$$[b]^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b}\left(\cos\frac{2k'\pi}{n}\pm i\sin\frac{2k'\pi}{n}\right),$$

$$[ab]^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab}\left(\cos\frac{2k''\pi}{n}\pm i\sin\frac{2k''\pi}{n}\right).$$

Durch Multiplikation der beiden ersten Gleichungen entsteht:

$$[a]^{\frac{1}{n}}\times[b]^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab}\left(\cos\frac{2(k+k'')\pi}{n}\pm i\sin\frac{2(k+k')\pi}{n}\right).$$

Der größte Werth, welchen in dieser Gleichung die Summe $k+k'$ erhalten kann, von denen jedes die Zahl $\frac{n}{2}$ nicht übersteigen darf, be-

trägt n. Die $\frac{n}{2}$ Paare Ausdrücke, welche die Werthe für $(k+k')$ von 0 bis $\frac{n}{2}$ liefern, sind aber mit den $\frac{n}{2}$ Paaren Ausdrücke, welche für $(k+k')$ von $\frac{n}{2}$ bis n hervorgehen, identisch; was offenbar zur Folge hat, daß unser Produkt nur n verschiedene Werthe zuläßt. Man bringt eine ähnliche Schlußfolge in Anwendung, im Falle n eine ungerade Zahl ist.

V. Ausdehnung des im Paragraphen 100 erwiesenen Satzes auf anderweitige Funktionen.

Es ist in dem angeführten Paragraphen gezeigt worden, daß man jede algebraische Funktion von $a \pm bi$ auf die Form $P \pm Q i$, wo P und Q reelle Größen sind, bringen kann. Wir wollen nun nachweisen, daß logarithmische, trigonometrische und Exponential-Funktionen solcher imaginärer Größen sich ebenfalls auf die Rechnungsform $P + Q i$ zurückführen lassen.

1) Wir betrachten vorerst den Ausdruck $\log(a+bi)$.

Aus $a \pm bi = \rho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$ folgt

$$\log(a \pm bi) = \log\rho + \log(\cos\varphi \pm i \sin\varphi).$$

Aus der Gleichung

$$e^{\pm\varphi i} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi \text{ (§. 181) ergibt sich aber}$$

$$\pm\varphi i = \log(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)\text{; folglich}$$

$$\log(a \pm bi) = \log\rho \pm \varphi i\text{: mithin}$$

$$P = \log\rho \text{ und } Q = \varphi.$$

Da statt φ der Bogen $2k\pi+\varphi$, wo k eine beliebige ganze Zahl ist, genommen werden darf; so finden wir für $\log(a+bi)$ unzählig viele, in dem Ausdruck $\log\rho \pm (2k\pi+\varphi)$ begriffene Werthe.

2) Was den Exponentialausdruck $e^{a \pm ib}$ anlangt, so ist derselbe gleichgeltend mit $e^a \times e^{\pm ib} = e^a(\cos b \pm i \sin b)$: folglich $P = e^a \cos b$, $Q = e^a \sin b$.

3) Wir kommen nun zu dem Ausdruck $(a \pm ib)^{m \pm ni}$. Derselbe gibt $\log(a \pm bi)^{m \pm ni} = (m \pm ni)\log(a \pm bi) = \log. e^{(m \pm ni).\log(a \pm bi)}$.

Indem wir von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen, entsteht:

$$(a \pm bi)^{m \pm ni} = e^{(m \pm ni)\cdot\log(a \pm bi)}$$

Hieraus ergibt sich, wenn für $\log(a \pm bi)$ dessen oben gefundener Werth $\log \varrho \pm \varphi i$ eingeführt wird;

$$(a \pm bi)^{m \pm ni} = e^{(m \pm ni).\,(\log\varrho \pm \varphi i)}$$
$$= e^{m \log \varrho - n\varphi \pm (m\varphi + n \log \varrho) i}$$
$$= e^{m \log \varrho - n\varphi} \times e^{\pm (m\varphi + n \log \varrho) i}$$
$$= e^{n \log \varrho - n\varphi} \left[\cos(m\varphi + n \log \varrho) \pm \sin(m\varphi + n \log \varrho) i \right]$$

d. h. ein Resultat von der Form $P + Qi$.

4) Wir betrachten endlich den trigonometrischen Ausdruck $\sin(a \pm bi)$. Aus demselben folgt:

$$\sin(a \pm bi) = \sin a \cos(bi) \pm \cos a \sin(bi).$$

Um $\sin bi$ und $\cos bi$ zu finden, setzen wir bi statt x in den bekannten Formeln:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2};$$

dadurch erhalten wir

$$\sin bi = \frac{e^{-b} - e^{b}}{2i}, \quad \cos bi = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2}.$$

Mittelst dieser Werthe erhalten wir:

$$\sin(a \pm bi) = \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} \sin a \mp \frac{\left(e^{-b} - e^{b}\right)}{2} \cos a \cdot i.$$

Ebenso finden wir:

$$\cos(a \pm bi) = \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} \cos a \pm \frac{\left(e^{-b} - e^{b}\right)}{2} \sin a \cdot i.$$

Da die übrigen trigonometrischen Funktionen algebraische Ausdrücke von sinus und cosinus sind, so werden auch sie sich jederzeit auf die gewöhnliche Form $P + Qi$ bringen lassen.

Note VIII zu §. 122.

Ueber die allgemeinen Auflösungen algebraischer Gleichungen von höheren Graden als dem vierten.

Die interessante Frage, ob es möglich sei, die algebraischen Gleichungen, welche den 4ten Grad übersteigen, allgemein aufzulösen, haben Abel und Rufini theilweise befriedigend beantwortet. Der Zweck einer solchen Auflösung ist nämlich nichts anders als die Construktion allgemeiner Formeln, welche die Werthe der Wurzeln einer vorgeschriebenen

Gleichung angeben, d. h. die Darstellung der verschiedenen, mit den in dieser Gleichung vorkommenden Coefficienten zu verrichtenden Operationen, um die verlangten Wurzeln zu bestimmen. Aus den Untersuchungen der oben erwähnten Mathematiker scheint man nun schließen zu müssen, daß die Auflösnng der Gleichungen von höheren als dem vierten Grade allgemein durch eine algebraische Formel nicht bewerkstelliget werden könne. Es ließen sich demnach nur die Gleichungen von den vier ersten Graden auf algebraischem Wege allgemein auflösen, oder mit andern Worten, man ist nicht im Stande, die Wurzeln der Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen, durch eine begrenzte Anzahl algebraischer Operationen, d. h. durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzirung und Wurzel-Ausziehung vermittelst der Coefficienten der Gleichungen darzustellen. Hiermit wird jedoch nicht behauptet, daß die allgemeine Auflösung der Gleichungen höherer Grade auf keinem andern Wege geschehen könne. Schon beim dritten Grade werden die allgemeinen Formeln in dem sogenannten irreducibeln Falle unbrauchbar, was darauf hinweist, daß Wurzelgrößen sich nicht durchgehends eignen, die Wurzeln algebraischer Gleichungen auszudrücken. Nun sind aber die Wurzeln einer Gleichung offenbar Funktionen ihrer Coefficienten; die Schwierigkeit ist es nur, diese Funktionen aufzufinden. Es scheint demnach die allgemeine Auflösung der Gleichungen höherer Grade, die Betrachtung von Funktionen anderer Natur, als diejenigen, mit welchen wir uns bis jetzt beschäftigt haben, zu erheischen.

Abel's Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höherem Grade als dem 4ten allgemein aufzulösen, ist zu suchen im ersten Bande des von Crelle herausgegebenen Journals für reine und angewandte Mathematik. Rufini's Beweis desselben Satzes finden wir im zweiten Hefte des ersten Bandes der Zeitschrift für Physik und Mathematik, herausgegeben von Baumgartner und v. Ettingshausen.

Note IX zu §. 155.

Jede Auflösung der Gleichung $ay^2+2bzy+cz^2=P$ in relativen Primzahlen läßt sich durch die Anwendung der Kettenbrüche finden.

I. Wir schicken deshalb mit Legendre folgenden Satz voraus. Zu zwei relativen Primzahlen n und n' lassen sich immer zwei andere kleinere m und m' finden, dergestalt, daß man nach Belieben entweder $mn'-m'n=+1$ oder $mn'-m'n=-1$ erhalte. Stellen nämlich $\alpha, \beta, \gamma \dots$ die Glieder des Kettenbruches von $\frac{n}{n'}$ dar, so kann man setzen:

$$\text{entweder}\ \frac{n}{n'} = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \ldots + \frac{1}{\mu},$$

$$\text{oder}\ \frac{n}{n'} = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \ldots + \frac{1}{\mu - 1} + \frac{1}{1}.$$

Bezeichnet man nun den vor $\frac{n}{n'}$ vorhergehenden Näherungswerth von $\frac{n}{n'}$ mit $\frac{m}{m'}$, so umfaßt solcher bei der ersten Voraussetzung alle Glieder von α bis μ, das letztere ausgeschlossen, bei der zweiten hingegen die Glieder von α bis $\mu-1$, das letztere mit eingeschlossen. Gibt daher die erste Voraussetzung $mn'-m'n=\pm 1$, so liefert die zweite $mn'-m'n = \mp 1$, weil die Anzahl der Glieder $\alpha, \beta \ldots \mu-1$ nach der letztern Voraussetzung eines mehr beträgt als nach der andern.

II. Wir gehen jetzt zu der Gleichung $ay^2+2bzy+cz^2=P$ über, in welcher y und z relative Primzahlen, a positiv, b, c und P aber positive oder negative Zahlen sind, letztere ferner kleiner als $\sqrt{D}$, wo $D=b^2-ac$.

Sind nun n und n' zwei relative Primzahlen, und zugleich $an^2 + 2bnn'+cn'^2=P$; so findet man diese Auflösung durch die Entwickelung einer Wurzel x der Gleichung $ax^2+2bx+c=0$ in die Form eines Kettenbruches. Um dieß nachzuweisen, nehmen wir den vorhin dargelegten Satz zu Hülfe, dem gemäß man nach Belieben $mn'-m'n=+1$ oder $mn'-m'n=-1$ wählen kann, wobei $\frac{m}{m'}$ den vor $\frac{n}{n'}$ vorhergehenden Näherungswerth des in Form eines Kettenbruches entwickelten Bruches $\frac{n}{n'}$ bezeichnet. Sollen nun die Brüche $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$ der Entwickelung x in die Form eines Kettenbruches angehören, so besteht die Relation

$$x = \frac{nz+m}{n'z+m'} \text{ oder } z = \frac{m'x-m}{n-n'x},$$

wo der dem Bruche $\frac{n}{n'}$ entsprechende vollständige Werth z nothwendigerweise positiv und größer als die Einheit sein muß, insofern die Voraussetzung, daß $\frac{m}{m'}$, $\frac{n}{n'}$ zwei consecutive Näherungswerthe von x seien, ihre Richtigkeit hat. Es bleibt uns daher zu untersuchen übrig, ob diese Be-

dingung in allen Fällen erfüllt werden könne oder nicht. Aus der letzten Gleichung ergibt sich aber $z+\frac{m'}{n'}=\frac{m'n-mn'}{n'^2\left(\frac{n}{n'}-x\right)}$, oder, wenn man für x seinen Werth $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{a}$ setzt, und die Wurzelgröße in den Zähler schafft:

$$z+\frac{m'}{n'}=(m'n-mn')\frac{\left(\frac{n}{n'}a+b\mp\sqrt{D}\right)}{an^2+2bnn'+cn'^2}.$$

In dieser Gleichung kann man das Zeichen von $\sqrt{D}$ nach Belieben wählen, weil es frei steht, für x die eine oder die andere Wurzel der Gleichung $ax^2+2bx+c=0$ zu nehmen; in beiden Fällen ist jedoch der Werth von z verschieden.

Der Annahme zufolge hat man aber

$$an^2+2bnn'+cn'^2=P, \text{ woraus}$$

$$\frac{an}{n'}+b=\pm\sqrt{\left(D+\frac{aP}{n'^2}\right)}. \text{ Folglich}$$

$$z+\frac{m}{n'}=(m'n-mn')(\mp\frac{\sqrt{D}\pm\sqrt{\left(D+\frac{aP}{n'^2}\right)}}{P}$$

wo das Zeichen von $\sqrt{D}$ allein willkührlich ist, indem das von $\sqrt{\left(D+\frac{aP}{n'^2}\right)}$ durch den Werth von $\frac{an}{n'}+b$ bestimmt ist. Da es jedoch hauptsächlich darauf ankommt, den größten Werth von z zu betrachten; so gibt man dem $\sqrt{D}$ ein dem von $\sqrt{\left(D+\frac{aP}{n'^2}\right)}$ übereinstimmendes Zeichen. Auf solche Art findet man dann in allen Fällen $z+\frac{m'}{n'}=\frac{\sqrt{D}+\sqrt{\left(D+\frac{aP}{n'^2}\right)}}{P}$, wobei der zweite Theil jederzeit als positiv angesehen werden kann.

III. Es sei vorerst P positiv. Man hat dann

$$\frac{\sqrt{D}+\sqrt{\left(D+\frac{aP}{n'^2}\right)}}{P}>\frac{2\sqrt{D}}{P}>2,$$

weil $P<\sqrt{D}$; außerdem $m'<n'$: mithin ist der Werth von z allemal positiv und größer als die Einheit. Der vorgelegte Bruch $\frac{n}{n'}$, welcher der Gleichung $an^2+2bnn'+cn'^2=+P$

Genüge thut, ist demnach stets einer von den Näherungswerthen der in die Form eines Kettenbruches entwickelten Wurzel x der Gleichung

$$ax^2+2bx+c=0.$$

IV. Es sei jetzt P negativ. Man hat hier

$$z+\frac{m'}{n'}=\frac{\sqrt{D}+\sqrt{\left(D-\frac{aP}{n'^2}\right)}}{P}.$$

Um zu sehen, ob z überall positiv und größer als die Einheit werden könne, bringen wir den Werth desselben auf folgende Form:

$$z=\frac{2\sqrt{D}}{P}-\frac{1+m'}{n'}+\frac{1}{n'}-\frac{\sqrt{D}}{P}+\frac{1}{P}\sqrt{\left(D-\frac{aP}{n'^2}\right)}.$$

Das Aggregat der beiden ersten Glieder des zweiten Theiles ist allemal größer als 1, weil $\sqrt{D}>P$, und $\frac{1+m'}{n'}<1$, oder höchstens $=1$. Unser z wird daher positiv sein und die Einheit übersteigen, wenn

$$\sqrt{\left(D-\frac{aP}{n'^2}\right)}>\sqrt{D}-\frac{P}{n'} \quad \text{oder } n'>\frac{a+P}{2\sqrt{D}}$$

ist. So lange mithin n' sich über dieser Grenze befindet, wird z die Einheit übertreffen; dagegen läßt sich im Allgemeinen dieß nicht mit Sicherheit behaupten, wenn n' unter jener Grenze liegt.

V. Diese Ausnahme findet übrigens nicht mehr statt, welchen Werth auch n' haben mag, wenn c negativ ist, wobei a wieder positiv angenommen wird. Denn die vorgelegte Gleichung erhält in diesem Falle die Form

$$an^2+2bnn'-cn'^2=-P, \text{ oder } cn'^2-2bnn'-an^2=+P,$$

unter welcher Gestalt unsere Gleichung, auf den ersten Fall zurückgeführt, keine Ausnahmen darbietet.

VI. Die aufzulösende Gleichung

$$ay^2+2byz+cz^2=-P,$$

in welcher a und c positiv sind, läßt sich jedoch immer auf folgende

$$a'y'^2+2by'z'-c'z'^2=-P,$$

worin a' und c' positiv sind und

$$b'^2-a'c'=b^2ac=D$$

ist, bringen. Da in dieser Gestalt unsere Gleichung mit der in V betrachteten übereinstimmt, so findet man ihre sämmtlichen Auflösungen in re-

lativen Primzahlen durch die Näherungswerthe von der in einen Kettenbruch entwickelten Wurzel der Gleichung

$$a'x^2+2b'x-c'=0,$$

wofern $P<\sqrt{D}$ ist. Alle Auflösungen in relativen Primzahlen der Gleichung

$$ay^2+2byz+cz^2=\pm P$$

können demnach durch Entwickelung in die Form eines Kettenbruches gefunden werden, sobald $\sqrt{D}>P$ ist.

VII. Wir haben jetzt noch nachzuweisen, daß die oben angeführte Transformation jederzeit bewerkstelliget werden könne. Zu diesem Behufe betrachten wir vorerst die Formel

$$ay^2+2byz+cz^2,$$

in welcher der mittlere Coefficient 2b einen oder den andern der äußersten a und c oder beide, abgesehen von ihren Zeichen, übertrifft, und suchen diese Formel in eine ähnliche zu verwandeln, worin der mittlere Coefficient geringer als jeder der beiden äußersten werde, oder wenigstens den kleinsten von ihnen nicht übersteige. Es sei also $2b>a$, und im Falle, wo zugleich $2b>a$ und $2b>c$ ist, a die kleinste von den beiden Zahlen a und c. Indem wir $y=y'-mz$ machen, wo m eine noch unbestimmte Zahl ist, erhalten wir durch Substitution die transformirte Formel

$$ay'^2-2(am-b)y'z+(am^2-2bm+c)z^2.$$

Nichts hindert uns nun, die Größe m dergestalt zu wählen, daß $2(am-b)$ kleiner oder gleich a werde; man braucht deshalb bloß m der dem Bruche $\frac{b}{a}$ darüber oder darunter nächst liegenden ganzen Zahl gleich zu machen.

Setzen wir $am-b=b'$, $am^2-2bm+c=c'$; so geht die transformirte Formel in

$ay'^2-2b'y'z+c'z^2$ über, wobei $b'^2-ac'=b^2-ac$ und $2b'<a$.

Nun ist $2b>a$ und $2b'<a$, mithin $b'<b$, was die Hauptsache dieser ersten Operation ausmacht. Sollte ferner in der transformirten Formel der mittlere Coefficient $2b'$, welcher kleiner als a ist, den Coefficienten c' an numerischer Größe übersteigen; so verfahren wir auf eine ähnliche Art, um eine neue transformirte Formel zu erhalten, in welcher der mittlere Coefficient $2b''<2b'$ ist. Durch eine solche Reihe von Operationen, bei denen die ganzen Zahlen $b, b', b''\ldots$ fortwährend im Abnehmen begriffen sind, wird man nothwendigerweise einmal zu einer transformirten Formel gelangen, welche keine weitere Reduktion erheischt, und worin der mittlere Coefficient keinen der äußersten übertrifft. In dieser Formel wird die mit b^2-ac analoge Größe einerlei Werth und einerlei Zeichen wie in der ursprünglichen Formel haben, indem eine

solche Eigenschaft bei dem Uebergang von einer transformirten zu andern immer wieder vorkommt.

VIII. Ist nun $b^2-ac=D$ eine positive Zahl, und nehmen wir unsere Formel $ay^2+2byz+cz^2$ als auf ihre einfachste Form reducirt an, in welcher 2b weder a noch c übertrifft; so müssen a und c nothwendigerweise mit entgegengesetzten Zeichen versehen sein: denn sonst wäre ac positiv und $>4b^2$, folglich b^2-ac negativ, was der Voraussetzung widerstreitet. Es ist hiermit also erwiesen, daß die Gleichung

$$ay^2+2byz+cz^2=\pm P,$$

in welcher a, c positiv sind, sich jederzeit in eine ähnliche

$$a'y'^2+2b'y'z'-c'z'^2=\pm P$$

umwandeln lasse, worin a' und c' ebenfalls positiv sind und

$$b'^2-a'c'=b^2-ac=D \text{ bleibt.}$$

IX. Als Beispiel mag die Gleichung

$$35y^2+172yz+210z^2=P$$

dienen. Da die nächst an $\frac{b}{a}=\frac{86}{35}$ liegende Zahl 2 beträgt, so setzen wir $y=y'-2z$.

Dadurch entsteht die erste transformirte Gleichung

$$35y'^2+32y'z+6z^2=P.$$

In dieser Gleichung ist der mittlere Coefficient 32 größer als der äußerste 6; wir schreiten daher zu einer zweiten Transformation, indem $z=z'-3y'$ gesetzt wird, weil 3 die an $\frac{16}{6}$ nächstliegende ganze Zahl ist. Die zweite transformirte Gleichung wird hiernach

$$6z'^2-4z'y'-7y'^2=P,$$

welche die verlangte Bedingung erfüllt, weil der mittlere Coefficient kleiner als jeder der äußersten 6 und 7 ist. Zu gleicher Zeit sieht man, daß sowohl in der zweiten transformirten als in der ursprünglichen Gleichung die Größe $b^2-ac=46$ macht.

Die Auflösung der Gleichung $35y^2+172y^2+210z^2=P$ wäre somit auf jene der Gleichung $6z'^2-4z'y'-7y'^2=P$ zurückgebracht, wobei die Größen y und z mit denen von y' und z' in der durch folgende Gleichungen ausgesprochenen Relation stehen:

$$y=7y'-2z' \text{ und } z=z'-3y'$$

Note X zu §. 178.

Merkmal, woran man erkennen kann, ob eine vorliegende Reihe eine recurrirende sei.

1. Man habe als gegebene Reihe $A+Bx+Cx^2+Dx^3 \ldots$, in welcher $A, B, C \ldots$ bekannte Größen sind und die wir, der Kürze halber, durch S darstellen wollen. Es fragt sich jetzt, ob diese Reihe zu den recurrirende gehöre, oder mit andern Worten, ob dieselbe durch die Entwickelung einer rationalen gebrochenen Funktion, worin die höchste Potenz von x in dem Nenner die im Zähler übertrifft, hergeleitet werden könne. Angenommen daß die fragliche Reihe die Entwickelung von $\frac{a}{a'+b'x}$ sei; haben wir $S=\frac{a}{a'+b'x}$, mithin auch $\frac{1}{S}=\frac{a'+b'x}{a}=p+qx$:

Dividirt man daher die Einheit durch das Polynom S, so muß der vollständige Quotient ohne Rest die Form $p+qx$ erhalten, wofern die Reihe eine recurrirende der ersten Ordnung sein soll.

2) Geht die Division von 1 durch S nicht auf, so ist die vorliegende Reihe nicht die Entwickelung von $\frac{a}{a'+b'x}$; und es ist die Frage, ob nicht $S=\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$ wäre. Hieraus:

$$\frac{1}{S}=\frac{a'+b'x+c'x^2}{a+bx}=p+qx+\frac{\alpha x^2}{a+bx}:$$

Dividirt man demnach die Einheit durch S, so muß, nachdem bereits im Quotienten die beiden Glieder $p+qx$ gefunden worden, der Rest durch x^2 theilbar sein, wenn S eine recurrirende Reihe der zweiten Ordnung ist. Wird jener Rest durch $S'x^2$ bezeichnet, wo S' eine neue Reihe von der Form $T+T'x+T''x^2 \ldots$ ist, so haben wir

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S'x^2}{S}=p+qx+\frac{\alpha x^2}{a+bx}, \text{ folglich}$$

$$\frac{S'}{S}=\frac{\alpha}{a+bx}, \text{ oder } \frac{S}{S'}=\frac{a+bx}{\alpha}=p'+q'x.$$

Dividirt man also das Polynom durch das Polynom S', so wird, wenn S eine recurrirende Reihe der zweiten Ordnung ist, ein Quotient von der Form $p'+q'x$, ohne irgend einen Rest, zum Vorschein kommen. Aus der Gleichung

$$\frac{1}{S}=p+qx+\frac{S'}{S}x^2 \text{ ergibt sich } S=\frac{1}{p+qx+\frac{S'x^2}{S}},$$

oder, wenn man für $\frac{S}{S'}$ seinen Werth $p'+q'x$ substituirt,

$$S = \frac{1}{p+qx+\frac{x^2}{p'+q'x}} = \frac{p'+q'x}{(p+qx)(p'+q'x)+x^2}$$

als erzeugender Bruch der Reihe.

3) Geschieht der Bedingungsgleichung $\frac{S}{S'} = p' + q'x$ kein Genüge, so wird untersucht, ob die gegebene Reihe S von der dritten Ordnung

oder $S = \frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}$ sei. Hieraus

$$\frac{1}{S} = \frac{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}{a+bx+cx^2} = p+qx+\frac{\alpha x^2+\beta x^3}{a+bx+cx^2}.$$

Dividirt man mithin die Einheit durch S, so muß, nachdem die beiden Glieder $p+qx$ gesucht worden, man einen Rest $S'x^2$ erhalten, wo S' eine Reihe von der Form $V+V'x+V''x^2\ldots$ ist. Wir haben also

$$\frac{1}{S} = p+qx+\frac{S'x^2}{S} = p+qx+\frac{\alpha x^2+\beta x^3}{a+bx+cx^2}; \text{ folglich}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x} = p'+q'x+\frac{\gamma x^2}{\alpha+\beta x}$$

Dividirt man daher das Polynom S durch S', so findet man, nachdem die beiden Glieder $p'+q'x$ gefunden sind, den Rest $S''x^2$, wo S'' eine neue Reihe von der Form $U+U'x+U''x^2\ldots$ ist. Folglich

$$\frac{S}{S'} = p'+q'x+\frac{S''x^2}{S'} = p'+q'x+\frac{\gamma x^2}{\alpha+\beta x}, \text{ woraus}$$

$$\frac{S''}{S'} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta x}, \text{ oder } \frac{S'}{S''} = \frac{\alpha+\beta x}{\gamma} = p''+q''x.$$

Ist mithin S eine recurrirende Reihe der dritten Ordnung, so muß die Division von S' durch S'' einen Quotienten von der Form $p''+q''x$ ohne einen Rest geben. Vermittelst der Gleichungen

$\frac{1}{S} = p+qx+\frac{S'x^2}{S}$, $\frac{S}{S'} = p'+q'x+\frac{S''x^2}{S'}$, $\frac{S'}{S''} = p''+q''x$ erhält man

$$S = \frac{(p'+q'x)(p''+q''x)+x^2}{(p+qx)(p'+q'x)(p''+q''x)+[(p+qx)+(p''+q''x)]x^2}$$

als erzeugenden Bruch der vorgelegten Reihe.

4) Aus diesen Betrachtungen ziehen wir folgende, von Lagrange gegebene Regel: Um zu untersuchen, ob eine vorliegende Reihe S eine recurrirende sei, dividire man die Einheit durch S, wobei die Division nur so weit fortgesetzt wird, bis man im Quotienten die zwei Glieder von der Form $p+qx$ und einen Rest $S'x^2$ gefunden hat; hierauf dividi-

man S durch S', bis man ebenfalls im Quotienten zu zwei Gliedern von der Form $p'+q'x$ und einem Rest $S''x^2$ gelangt ist; man dividire alsdann von Neuem S' durch S'', bis man im Quotienten wieder zwei Glieder von der Form $p''+q''x$ und den Rest $S'''x^2$ erhält, u. s. f. Kommt man durch diese wiederholte Operation einmal auf einen solchen Quotienten $P+Qx$ ohne einen Rest, so ist die vorgelegte Reihe eine recurrirende, und zwar von der Ordnung der letzten Division; widrigenfalls kehrt das angeführte Verfahren fortwährend wieder.

5) Es diene als Beispiel die Reihe:

$$S=1+2x+3x^2+3x^3+7x^4+5x^5+15x^6+9x^7+31x^8+17x^9+63x^{10}+33x^{11}\ldots$$

Man hat $\frac{1}{S}=1-2x$ nebst dem Rest:

$$x^2+3x^3-x^4+9x^5-5x^6+21x^7-13x^8+45x^9-29x^{10}+93x^{11}\ldots=(S'x^2).$$

Ferner ist $\frac{S}{S'}=1-x$ nebst dem Reste:

$$7x^2-7x^3+21x^4-21x^5+49x^6\ldots=(S''x^2).$$

Weiter ist $\frac{S'}{S''}=\frac{1}{7}+\frac{4x}{7}$ ohne einen Rest.

Die gegebene Reihe ist demnach eine recurrirende Reihe der dritten Ordnung. Für den erzeugenden Bruch bekommt man $S=\frac{1+3x+3x^2}{1+x-2x^2-2x^3}$, dessen dreigliederige Relationsscala ist: $-1, +2, +2$.

Ebenso findet man, daß die Reihe

$$S=1+x+x^2+2x^3+4x^4+6x^5+7x^6+7x^7+7x^8+8x^9+10x^{10}+12x^{11}+13x^{12}$$
$$+13x^{13}+13x^{14}+14x^{15}\ldots$$

eine recurrirende Reihe ist, welcher der Erzeugungsbruch

$$\frac{1-2x+2x^2}{1-3x+4x^2-3x^3+x^4}$$

entspricht.

Note XI zu §. 178.

Zerlegung der trigonometrischen Funktionen sin x und cos x in Faktoren.

1) Man hat

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\ldots\right)$$
$$=x(1-\alpha x^2)(1-\beta x^2)(1-\gamma x^2)\ldots,$$

wo es nur noch darauf ankommt, die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ zu bestimmen.

Jeder Werth von x, für welchen $\sin x$ verschwindet, führt zu einem Faktor des zweiten Theils. Für jede ganze Zahl n wird aber $\sin(n\pi)$ Null, mithin muß unter den Faktoren unseres angesetzten Produktes immer einer existiren, welcher für einen jener Werthe von x verschwindet. Angenommen also, daß für $x=\pi$ der Faktor $1-\alpha x^2=0$ werde, so ist $\alpha=\frac{1}{\pi^2}$. Für $x=2\pi$ werde $1-\beta x^2=0$, mithin $\beta=\frac{1}{4\pi^2}$, u. s. f. Werden diese Werthe in unsere Gleichung substituirt, so findet man:

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots$$

ohne Ende.

2) Man hat ferner:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\ldots=(1-\alpha x^2)(1-\beta x^2)(1-\gamma x^2)\ldots$$

wo es wiederum gilt, die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ zu finden. Die Werthe von x, für welche $\cos x$ verschwindet, und die in der allgemeinen Formel $x=(2n-1)\frac{\pi}{2}$, wo für n jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann, begriffen sind, werden sämmtliche Faktoren des Produktes bestimmen. Angenommen nämlich, daß für $x=\frac{\pi}{2}$ der Faktor $1-\alpha x^2=0$ werde, so ist $\alpha=\frac{4}{\pi^2}$; für $x=\frac{3\pi}{2}$ werde $1-\beta x^2=0$, woraus $\beta=\frac{4}{9\pi^2}$ u. s. w.

Werden diese Werthe substituirt, so entsteht:

$$\cos x=\left[1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right]\left[1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right]\left[1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right]\ldots$$

ohne Ende.

Ueber die Anwendung der eben gefundenen Faktorenreihen verweisen wir den Leser auf Leonhard Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen, im ersten Bande IX., X. und XI. Kapitel.

Note XII zu §. 182.

Summation der Sinus und Cosinus einer Reihe von Bogen, welche eine arithmethische Progression bilden.

Es sei die in arithmetischer Progression stehende Bogenreihe:

$$x,\ x+h,\ x+2h,\ \ldots\ x+(n-1)h,$$

wo x und h zwei reelle Größen und n eine beliebige ganze Zahl darstellen.

Man hat $\cos x+\cos(x+h)+\cos(x+2h)\ldots+\cos[x+(n-1)h]$
$+[\sin x+\sin(x+h)+\sin(x+2h)\ldots+\sin[(x+(n-1)h]\sqrt{-1}$
$=e^{x\sqrt{(-1)}}+e^{(x+h)\sqrt{-1}}+e^{(x+2h)\sqrt{(-1)}}\ldots+e^{[x+(n-1)\sqrt{-1}}.$

Erwägt man nun, daß

$$1+y+y^2+\ldots+y^{n-1}=\frac{y^n-1}{y-1}$$

so findet man, wenn $y=e^{h\sqrt{-1}}$ gesetzt wird:

$$1+e^{h\sqrt{-1}}+e^{2h\sqrt{-1}}\ldots+e^{(n-1)h\sqrt{-1}}=\frac{e^{nh\sqrt{(-1)}}-1}{e^{h\sqrt{-1}}-1}$$

$$=\frac{e^{(n-\frac{1}{2})h\sqrt{-1}}-e^{-\frac{1}{2}h\sqrt{-1}}}{e^{\frac{1}{2}h\sqrt{-1}}-e^{-\frac{1}{2}h\sqrt{-1}}}=\frac{e^{(n-\frac{1}{2})h\sqrt{-1}}-e^{-\frac{1}{2}h\sqrt{-1}}}{2\sin\frac{h}{2}\sqrt{-1}};$$

Also:

$$e^{x\sqrt{-1}}+e^{(x+h)\sqrt{-1}}+e^{(x+2h)\sqrt{-1}}\ldots+e^{[x+(n-1)h\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{e^{(x-\frac{1}{2}h)\sqrt{-1}}-e^{(x+nh-\frac{1}{2})h\sqrt{-1}}}{2\sin\frac{h}{2}}\sqrt{-1}$$

$$=\frac{\sin\left[x+nh-\frac{h}{2}\right]-\sin\left[x-\frac{h}{2}\right]}{2\sin\frac{h}{2}}$$

$$+\frac{\cos\left[x-\frac{h}{2}\right]-\cos\left[x+nh-\frac{h}{2}\right]}{2\sin\frac{h}{2}}\sqrt{(-1)},$$

was uns folgende zwei Gleichungen liefert:

$$\cos x+\cos(x+h)\ldots+\cos[x+(n-1)h]=\frac{\sin\left[x+nh-\frac{h}{2}\right]-\sin\left[x-\frac{h}{2}\right]}{2\sin\frac{h}{2}}$$

$=\dfrac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left[x+\frac{(n-1)h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}}$, und $\sin x+\sin(x+h)\ldots+\sin[x+(n-1)h]$

$$=\frac{\cos\left[x-\frac{h}{2}\right]-\cos\left[x+nh-\frac{h}{2}\right]}{2\sin\frac{h}{2}}=\frac{\sin\left[x+\frac{(n-1)h}{2}\right]\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Für $x=0$ geben diese Formeln:

$$1+\cos h+\cos 2h\ldots+\cos(n-1)h=\frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\frac{(n-1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}},$$

$$\sin h+\sin 2h+\ldots\sin(n-1)h=\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\frac{(n-1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}.$$

2

B M M' H Q A P P' x

3

4

y B P Q O' I' O" A C D P' Q' P" x O I

7

M T P x x' p

8

M A k P x B m

9

y M B x' p k A P x

13

A' A x' x B' B

14

A A' x x' B B'

m q p

18

m A p q k T P M

19

m I t M M' O B A P q P T' T P'

24

c C b B a A H R O P L

25

c C b B a H R P A O' L